ALEKSANDER ŚNIEŻEK PAWEŁ TĘCZA

ZBIÓR ZADAŃ Z ALGEBRY DLA SZKÓŁ ŚREDNICH

Wydanie pierwsze

Warszawa 1994
Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne

Projekt okładki i karty tytułowej
Jacek Tofil

Redaktor
Zygmunt Kołosowski

Redaktor techniczny
Danuta Gąsiorowska

ISBN 83-02-05451-8

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne
Warszawa 1994
Wydanie pierwsze
Arkuszy drukarskich 19,0
Skład i druk: Opolskie Zakłady Graficzne, ul. Niedziałkowskiego 8-12
zam. 56/94

Spis treści

Przedmowa

Niniejszy zbiór zadań jest przeznaczony dla uczniów i nauczycieli szkół średnich wszystkich typów. Zaproponowaliśmy 1555 zadań z algebry realizujących „program maksimum". Do prawie wszystkich zadań w zbiorze są podane odpowiedzi, wskazówki lub szkice rozwiązań. Zadania, które naszym zdaniem są szczególnie ważne i których treść należy pamiętać, wyróżniliśmy gwiazdką *.

Opracowując „Zbiór zadań z algebry" korzystaliśmy z dostępnych nam zbiorów zadań w języku polskim, rosyjskim i angielskim.

Wyrażamy nadzieję, że zbiór nasz okaże się pomocny uczniom i nauczycielom.

Autorzy

§ 1. Zbiór liczb rzeczywistych

1. Oblicz: $(4+\sqrt{11})(4-\sqrt{11})-(4\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+(8-2\sqrt{15})^2$.

2. Oblicz: $3(1+\sqrt{7})^2-2(\sqrt{7}-3)^2+(4\sqrt{2}-\sqrt{5})(4\sqrt{2}+\sqrt{5})$.

W zadaniach 3—12 udowodnij równość.

3. $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

4. $\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2=4$.

5. $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}=14$.

6. $\left(\frac{11}{5-\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2=\sqrt{\frac{91}{4}+10\sqrt{3}}$.

7. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

8. $\sqrt{8+2\sqrt{3}}=\sqrt{4+\sqrt{13}}+\sqrt{4-\sqrt{13}}$.

9. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}(1+\sqrt{5})$.

10. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}$.

11. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

12. $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

13. Porównaj liczby: 2^{350} i 3^{174}.

14. Udowodnij, że jeżeli w liczbie sześciocyfrowej cyfra pierwsza jest równa czwartej, druga piątej i trzecia szóstej (licząc od rzędu najwyższego do najniższego), to liczba ta jest podzielna przez 7, 11 i 13.

15. Udowodnij, że jeżeli liczba trzycyfrowa $A=(xyz)=100x+10y+z$ dzieli się przez 37, to liczby $B=(yzx)$ i $C=(zxy)$ dzielą się także przez 37.

16. Udowodnij, że suma trzech kolejnych naturalnych potęg liczby 3 jest podzielna przez 13.

17. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $2n^3+n$ jest podzielna przez 3.

18. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $n(n+1)(2n^2+1)$ jest podzielna przez 6.

19. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $\frac{n}{2}(n^2+5)$ jest podzielna przez 3.

20. Udowodnij, że dla dowolnej parzystej liczby naturalnej n, liczba $n(n+2)(2n-1)$ jest podzielna przez 24.

21. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n, liczba n^3+3n^2+5n+3 jest podzielna przez 3.

22. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n, liczba n^5-n jest podzielna przez 30.

23. Udowodnij, że dla dowolnej nieparzystej liczby całkowitej n, liczba n^3+3n^2-n-3 jest podzielna przez 48.

24. Udowodnij, że różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych nie dzielących się przez 3, jest podzielna przez 3.

25. Udowodnij, że różnica czwartych potęg dwóch liczb całkowitych różniących się o 2, jest podzielna przez 16.

26. Udowodnij, że jeżeli x, y, z są liczbami całkowitymi i liczba $x+y+z$ jest podzielna przez 6, to liczba $x^3+y^3+z^3$ jest podzielna przez 6.

27. Udowodnij, że jeżeli m, n są liczbami całkowitymi i liczba m^2+n^2 jest podzielna przez 3, to liczby m i n są podzielne przez 3.

28. Udowodnij, że jeżeli n jest nie mniejszą od 5 liczbą pierwszą, to liczba n^2-1 jest podzielna przez 24.

29. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $\frac{3n-5}{12}(n^3-3n^2+2n)$ jest liczbą całkowitą.

30. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ jest liczbą naturalną.

31. Dla jakich całkowitych n, liczba $\frac{n^3-n^2+2}{n-1}$ jest liczbą całkowitą.

32. Udowodnij, że dla żadnego całkowitego n, liczba n^2+1 nie jest podzielna przez 3.

33. Udowodnij, że dwie kolejne liczby całkowite nieparzyste są pierwsze względem siebie.

34. Udowodnij, że suma dwóch kolejnych liczb naturalnych i suma ich kwadratów są liczbami pierwszymi względem siebie.

35. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n, ułamek $\frac{14n+3}{21n+4}$ jest nieskracalny.

36. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n, ułamek $\frac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ jest nieskracalny.

37. Udowodnij, że jeżeli ułamek $\frac{n}{k}$, gdzie $n, k \in N$ jest skracalny, to ułamek $\frac{n-k}{n+k}$ jest także skracalny.

38. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których każda z liczb: n, $n+2$, $n+6$, $n+8$, $n+12$, $n+14$ jest liczbą pierwszą.

39. Dla jakich naturalnych n, liczba n^4+4 jest liczbą pierwszą?

40. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą różnymi liczbami pierwszymi. Wykaż, że $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_k}$ nie jest liczbą całkowitą.

41. Podaj wszystkie liczby pierwsze p, dla których istnieje liczba naturalna n taka, że $p+1=n^5$.

42. Udowodnij, że żadna z liczb Fermata $F_n=2^{2^n}+1$, gdzie $n \in N$ i $n>1$, nie jest sumą dwóch liczb pierwszych.

43. Liczby pierwsze p i q, gdzie $p>q$, nazywamy bliźniaczymi, jeżeli $p-q=2$. Udowodnij, że liczby pierwsze p i q, gdzie $p>q$ są bliźniacze wtedy i tylko wtedy, gdy $pq+1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

44. Udowodnij, że liczby $x=\underbrace{111...1}_{300}\underbrace{000...0}_{m}$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

45. Udowodnij, że suma kwadratów pięciu kolejnych liczb naturalnych nie może być kwadratem liczby naturalnej.

46. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n, liczba $\frac{100^{n+1}+4\cdot 10^{n+1}+4}{9}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

47. Udowodnij, że liczba 101 010 nie da się przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

48. Znajdź wszystkie liczby całkowite k, dla których liczba k^2+1 jest podzielna przez $k+1$.

49. Znajdź taką liczbę naturalną n, aby liczby $n+1$ i $n-110$ były kwadratami liczb naturalnych.

50. Wykaż, że jeżeli para liczb naturalnych (m, n) jest rozwiązaniem równania $m^{-1}+n^{-1}=7^{-1}$, to liczba $m+n$ jest podzielna przez 4.

W zadaniach 51-56 rozwiąż równanie w liczbach całkowitych.

51. $x^2+2xy-11=0$.

52. $xy=x+y$.

53. $(xy-1)^2=(x+1)^2+(y+1)^2$.

54. $2^x+3=5^y$.

55. $2x^3+xy-7=0$.

56. $3x+xy-4y=45$.

57. Udowodnij, że równanie $x^2-y^2=1+2y-x$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

58. Udowodnij, że równanie $x^2+1990=y^2$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

59. Udowodnij, że równanie $x^2+y^2+z^2=t^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych.

60. Udowodnij, że równanie $x^2=4yz+1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych.

W zadaniach 61 i 62 rozwiąż równanie.

61. $[x]=2x-3$.

62. $[x]+x=4{,}75$.

gdzie symbol „$[x]$" oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

63. Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest równy 3200, a ich największy wspólny dzielnik jest równy 8. Znajdź te liczby.

64. Udowodnij, że suma cyfr liczby będącej kwadratem liczby całkowitej nie może być równa 5.

65. Liczba całkowita a przy dzieleniu przez liczby 5 oraz 7 daje resztę 1. Jaką resztę daje liczba a przy dzieleniu przez 35?

66. Różnica dwóch liczb całkowitych nieparzystych jest podzielna przez 5. Jaką cyfrę jedności ma różnica sześcianów tych liczb.

W zadaniach 67 i 68 odpowiedz na pytanie: w jakim systemie pozycyjnym prawdziwa jest równość.

67. $4\cdot 13=100$.

68. $251=15^2$.

69. Wiadomo, że $a=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 1990$, a $b=10000^{1000}$. Porównaj liczby a i b.

70. Czy sumując odwrotności kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 000 000, przekroczymy liczbę 1?

71. Czy sumując odwrotności kwadratów kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1, przekroczymy liczbę 2?

72. Ogrodnik przywiózł na bazar ogórki. Zapytany przez sąsiada o ich liczbę odpowiedział: gdybym ułożył je w kupki po 10 sztuk lub po 12 sztuk, to w obu przypadkach zostanie mi 8 ogórków. Oblicz ile ogórków miał ogrodnik, wiedząc jeszcze, że ich liczba jest większa od 300 i mniejsza od 400.

73. Dwaj bracia Bolek i Lolek wyszli równocześnie z domu do szkoły. Lolek stawiał kroki o 20% krótsze od kroków Bolka, ale za to w tym samym czasie stawiał tych kroków o 20% więcej niż Bolek. Który z nich pierwszy przyszedł do szkoły?

74. Wśród 10 skrzyń zawierających monety, jedna zawiera monety fałszywe. W każdej skrzyni jest nie mniej niż 10 monet. Jak za pomocą jednego ważenia wykryć skrzynię z monetami fałszywymi wiedząc, że moneta fałszywa ma masę 18 g, a moneta prawdziwa 20 g i niczym innym się te monety nie różnią.

75. Trzynaście kilogramów miodu należy rozlać do słoików mieszczących po $1\frac{1}{2}$ kg i po $2\frac{1}{2}$ kg miodu. Ile słoików każdej wielkości trzeba przygotować?

76. Smok ma 2000 głów. Rycerz może ściąć jednym cięciem miecza 33 głowy lub 21 głów, lub 17 głów, lub 1 głowę. Smokowi dorastają wówczas odpowiednio 48, 0, 14 lub 349 głów. Smok zostanie zabity, gdy wszystkie głowy będą ścięte. Czy rycerz może zabić smoka?

77. Dwunastu ludzi niesie dwanaście bochenków chleba. Każdy mężczyzna niesie po 2 bochenki, kobieta po $\frac{1}{2}$ bochenka, dziecko po $\frac{1}{4}$ bochenka. Ilu jest mężczyzn, ile kobiet, i ile dzieci?

78. Czterej chłopcy, Piotr, Jurek, Janusz i Jacek urządzili wyścigi na 100 m. Po zawodach każdego z nich zapytano o wynik wyścigu. Piotr odpowiedział: „Ja nie byłem pierwszy oni ostatni". Jurek odpowiedział. „Ja nie byłem ostatni". Jacek odpowiedział: „Ja byłem pierwszy". Trzech z nich powiedziało prawdę, a jeden skłamał. Kto skłamał, a kto był pierwszy?

Ustalamy dowolnie liczbę naturalną m. Mówimy, że liczba całkowita n przystaje do liczby całkowitej k modulo m, jeżeli $m|n-k$. Piszemy wówczas: $n=k \pmod{m}$.

W zadaniach 79-81 rozwiąż równanie w zbiorze liczb całkowitych.

79. $3n=4 \pmod{7}$.

80. $n^2=1 \pmod{5}$.

81. $n^2=3 \pmod{5}$.

82. Wiadomo, że $\frac{a}{2a+b}=\frac{1}{4}$ i $a,b\in \boldsymbol{R}$ i $b\neq -2a$. Oblicz $\frac{2b}{3a+b}$.

W zadaniach 83—85 rozwiąż równanie w liczbach rzeczywistych.

83. $x^2-2\sqrt{2}x+y-2\sqrt{y}+3=0$.

84. $x^2+5y^2+4xy+2y+1=0$.

85. $4x^2+9y^2+16z^2-4x-6y-8z+3=0$.

86. Rozwiąż w liczbach wymiernych równanie $x+y\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

W zadaniach 87—120 udowodnij, że

87. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc=(b+c)(c+a)(a+b)$.

88. $(bc+ca+ab)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ac)^2+(c^2-ab)^2=(a^2+b^2+c^2)^2$.

89. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=(b+c)(c+a)(a+b)$.

90. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2$.

91. Jeżeli $by\neq 0$ i $a\neq b$, i $x\neq y$, to $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}\Leftrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{x+y}{x-y}$.

92. Jeżeli $ab\neq 0$ i $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=a-b$, to $a=b$ lub $ab=-1$.

93. Jeżeli $bc\neq 0$ i $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, to $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2}{b^2}$.

94. Jeżeli $b=a+1$ i $c=ab$, i $d=ab+1$, to $a^2+b^2+c^2=d^2$.

95. Jeżeli $a+c=2b$ i $2bd=c(b+d)$ i $bd\neq 0$, to $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

96. Jeżeli $A=a+b+c+d$ $B=a+b-c-d$, $C=a-b+c-d$, $D=a-b-c+d$ i $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$, to $AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2)$.

97. Jeżeli $a+b+c=0$, to $a^3+b^3+c^3=3abc$.

98. Jeżeli $x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1$, to $xyz=0$.

99. Jeżeli $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ i $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, i $abc\neq 0$, i $xyz\neq 0$, to $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

100. Jeżeli $s=a+b+c$, to $(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2$.

101. Dla dowolnych liczb a, b, c: $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$.

102. Dla $a\neq 0$ i $b\neq 0$: $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\geqslant\frac{1}{3}$.

103. Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, b_1, b_2: $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}\geqslant\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}$.

104. Dla dowolnych dodatnich liczb a_1, a_2, b_1, b_2 i takich, że: $a_1+a_2>b_1+b_2$ prawdziwa jest nierówność $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}>b_1+b_2$.

105. Dla dowolnych liczb a, b: $a^2+b^2+2\geqslant 2(a+b)$.

106. Dla dowolnych liczb x, y: $(x+y)(1+xy)\leqslant(1+x^2)(1+y^2)$.

***107.** Dla dowolnych dodatnich liczb a, b: $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

Uwaga:

1) Liczbę $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ nazywamy średnią arytmetyczną liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2) Jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \boldsymbol{R}_+$, to liczbę $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$ nazywamy średnią geometryczną liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

***108.** Dla dowolnych dodatnich liczb a, b: $\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}$.

Uwaga: Jeżeli $a,b\in\boldsymbol{R}_+$, to liczbę $\frac{2ab}{a+b}$ nazywamy średnią harmoniczną liczb a, b.

***109.** Dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c, d: $\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$.

***110.** Dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c: $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.

111. Dla dowolnych dodatnich liczb x, y, z: $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant 3$.

112. Dla dowolnych dodatnich liczb x, y, z: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant 9$.

113. Dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c: $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}\geqslant 3$.

114. Dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c: $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)\geqslant 9$.

115. Dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c, d: $\frac{cd}{ab}+\frac{da}{bc}+\frac{ab}{cd}+\frac{bc}{da}\geqslant 4$.

116. Dla dowolnych liczb a, b, c:
$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geqslant 6abc$.

117. Jeżeli $ab>0$, to $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$.

118. Jeżeli $ab>0$, to $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$.

119. Jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n\in\boldsymbol{R}_+$ i $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$, to $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\geqslant 2^n$.

120. Jeżeli $a, b, c\in\langle 0;\ 1\rangle$, to $abc\,(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant\frac{1}{64}$.

121. Dla jakich dodatnich liczb a, b, c prawdziwa jest nierówność: $\frac{a+c}{b+c}>\frac{a}{b}$?

122. Udowodnij, że dla wszystkich dodatnich liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ oraz $k\in\boldsymbol{N}$ spełniających warunek:

$a_1+2a_2+\ldots+2^{n-1}a_n<b_1+2b_2+\ldots+2^{n-1}b_n$ prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{k+2a_1+2^2a_2+\ldots+2^na_n}{k+2b_1+2^2b_2+\ldots+2^nb_n}<\frac{k+a_1+\ldots+2^{n-1}a_n}{k+b_1+\ldots+2^{n-1}b_n}.$$

W zadaniach 123 i 124 udowodnij, że nierówność prawdziwa jest dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

***123.** $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

124. $|x|\mp|y|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$.

§ 2. Wstępne wiadomości o funkcjach

W zadaniach 125 i 126 wyznacz miejsca zerowe funkcji.

125. $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{dla } x\in \boldsymbol{W} \\ x^2-1 & \text{dla } x\in \boldsymbol{R}\setminus \boldsymbol{W}. \end{cases}$

126. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x\in \boldsymbol{R}_- \\ x^2+x & \text{dla } x\in \boldsymbol{R}_+\cup\{0\}. \end{cases}$

W zadaniach 127—134 zbadaj parzystość i nieparzystość funkcji.

127. $f(x)=|x|.$

128. $f(x)=\frac{|x|}{x}.$

129. $f(x)=\sqrt{x}.$

130. $f(x)=x|x|.$

131. $f(x)=x^5+x^3+x.$

132. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}.$

133. $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{dla } x>0. \\ -x^2-2 & \text{dla } x<0. \end{cases}$

134. $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{dla } x\neq 0. \\ 0 & \text{dla } x=0. \end{cases}$

W zadaniach 135—138, zakładając, że funkcja f jest określona w zbiorze $\boldsymbol{R}$, zbadaj parzystość i nieparzystość funkcji g.

135. $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}.$

136. $g(x)=f(x)-f(-x).$

137. $g(x)=|x|\cdot\frac{f(-x)-f(x)}{2}.$

138. $g(x)=x|x|\cdot\frac{f(-x)-f(x)}{2}.$

W zadaniach 139—146 zbadaj na podstawie definicji monotoniczność funkcji.

139. $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{x}$ w zbiorze $\boldsymbol{R}_-$.

140. $f(x)=\sqrt{x}$ w zbiorze $\boldsymbol{R}_+$.

141. $f(x)=x^3$ zbiorze $\boldsymbol{R}$.

142. $f(x)=x^2-2x$ w przedziale $\langle 1;\infty)$.

143. $f(x)=x^2-5x+6$ w przedziale $(-\infty;\frac{5}{2}\rangle$.

144. $f(x)=-x^2+4x-3$ w przedziale $(-\infty; 2\rangle$.

145. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ w przedziale $\langle -1; 1\rangle$.

146. $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$ w przedziale $(-\infty; 0)$.

147. Udowodnij, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla } x\in \boldsymbol{W} \\ -x & \text{dla } x\in \boldsymbol{R}\setminus \boldsymbol{W} \end{cases}$$

jest różnowartościowa w zbiorze $\boldsymbol{R}$, lecz nie jest w tym zbiorze monotoniczna.

148. Wykaż, że funkcja Dirichleta

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{dla } x\in \boldsymbol{W} \\ 0 & \text{dla } x\in \boldsymbol{R}\setminus \boldsymbol{W} \end{cases}$$

jest funkcją okresową, lecz nie ma okresu zasadniczego (podstawowego).

149. Wykaż, że jedynymi okresami funkcji Dirichleta (patrz zadanie nr 148) są liczby wymierne różne od zera.

150. Udowodnij, że jeżeli funkcja $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ jest okresowa, to również funkcja $g\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ taka, że $g(x)=f(ax+b)$ gdzie $a, b\in\boldsymbol{R}$, jest okresowa.

151. Wykaż, że jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest równość $f(x+a)=\frac{1+f(x)}{-1-f(x)}$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą różną od zera, to funkcja f jest okresowa.

152. Udowodnij, że jeżeli funkcja $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ jest nieparzysta i ma okres s, to liczby ms, gdzie $m\in\boldsymbol{C}$ są miejscami zerowymi funkcji f.

153. Wiadomo, że funkcja f: $\langle 0;\ \infty) \to \langle 0;\ \infty)$ i prawdziwa jest dla dowolnych $x,\ y \in \langle 0;\ \infty)$ równość: $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
a) Wyznacz $f(0)$.
b) Wykaż, że dla $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ i $x \in \langle 0;\ \infty)$ prawdziwa jest równość $f(nx)=nf(x)$.
c) Wykaż, że dla $n,\ m \in \mathbf{N}$ i $x \in \langle 0;\ \infty)$ prawdziwa jest równość $f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}f(x)$.

Zadania, w których należy znaleźć niewiadomą funkcję na podstawie zadanej tożsamości, którą funkcja ta ma spełniać, nazywają się równaniami funkcyjnymi. Powyższe równanie funkcyjne nosi nazwę równania Cauchy'ego. Można udowodnić, że wśród wszystkich funkcji f: $\langle 0;\ \infty) \to \langle 0;\ \infty)$, jedyną funkcją spełniającą równanie Cauchy'ego jest funkcja liniowa f: $x \to ax$, gdzie $a=f(1)$.

154. Dane jest równanie $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, gdzie f: $(-\infty;\ \infty) \to (0;\ \infty)$. Wykaż, że $f(0)=1$.

155. Dane jest równanie funkcyjne $f(x \cdot y)=f(x)+f(y)$, gdzie f: $(0;\ \infty) \to (-\infty;\ \infty)$. Wykaż, że $f(1)=0$.

156. Znajdź wszystkie funkcje f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające równanie funkcyjne $2f(x)+f(1-x)=x$.

157. Znajdź wszystkie funkcje f: $\mathbf{R}-\{1\} \to \mathbf{R}$ spełniające dla każdego $x \neq 0$ równanie funkcyjne $f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}$.

158. Znajdź wszystkie funkcje f: $\mathbf{R}-\{1\} \to \mathbf{R}$ spełniające dla każdego $x \neq 0$ równanie funkcyjne $(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}$.

159. Niech $\alpha,\ \beta$ będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $\alpha+\beta \neq 0$. Znajdź wszystkie funkcje f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające równanie funkcyjne $\alpha f(x)+\beta f(-x)=(\alpha+\beta)(x+1)$.

160. Znajdź największą wartość funkcji $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}_+$

161. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x)=\frac{x}{ax^2+b}$ gdzie $a,b \in \mathbf{R}_+$.

162. Znajdź największą wartość funkcji $f(x)=x^3+\frac{48}{x}$, $x \in \mathbf{R}_+$.

163. Znajdź największą wartość funkcji f: $(0,1) \to \mathbf{R}$ i $f(x)=x^4-x^6$.

164. Łatwo wykazać (wykaż to), że dla dowolnych liczb $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ prawdziwa jest nierówność Schwarza:
$|a_1b_1+a_2b_2| \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2+b_2^2}$.
Korzystając z nierówności Schwarza wyznacz największą wartość funkcji $f(x)=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$.

165. Liczbę dodatnią a przedstaw w postaci sumy dwóch liczb dodatnich, których iloczyn jest największy.

166. Który z prostokątów o danym obwodzie $2p$ ma największe pole?

167. Który z prostokątów o danym polu S ma najmniejszy obwód?

168. Objętość prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równa V. Przy jakich długościach krawędzi, pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest najmniejsze?

169. Suma długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka jest równa c. Znajdź prostopadłościan o największej objętości.

Metryką (odległością) w zbiorze Z nazywamy funkcję d: $Z^2 \to \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ taką, że dla dowolnych $x,\ y,\ z \in Z$:
— $d(x,y)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y$,
— $d(x,y)=d(y,x)$,
— $d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z)$.
Zbiór Z wraz z metryką d (dokładniej parę (Z,d)) nazywamy przestrzenią metryczną.

170. Udowodnij, że funkcja d: $d(x,y)=|x-y|$, $x,y \in \mathbf{R}$ metryzuje zbiór $\mathbf{R}$ (jest metryką w zbiorze $\mathbf{R}$).

171. Udowodnij, że funkcja d: $d(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{dla } x \neq y \\ 0 & \text{dla } x=y \end{cases}$ metryzuje dowolny zbiór Z.

172. Udowodnij, że funkcja d: $d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, gdzie $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ jest metryką na płaszczyźnie kartezjańskiej π, to znaczy, na płaszczyźnie z wprowadzonym prostokątnym kartezjańskim układem współrzędnych.

Uwaga: Funkcja d określona jak wyżej nazywa się metryką geometryczną.

173. Udowodnij, że funkcja d: $d(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$, gdzie $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ jest metryką na płaszczyźnie kartezjańskiej π.

§ 3. Funkcja liniowa. Równania i nierówności stopnia pierwszego

174. Znajdź funkcję liniową, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkt $A=(-2, 3)$ i która dla argumentów mniejszych od 2 przyjmuje wartości dodatnie, a dla argumentów większych od 2 przyjmuje wartości ujemne.

175. Znajdź funkcję liniową wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkt $A=(1, -4)$ i jest nachylony do osi OX pod kątem 135°.

176. Znajdź funkcję liniową wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkt $A=(1, -3)$ i jest równoległy do wykresu funkcji f: $y=2x$.

W zadaniach 177—184 narysuj wykres funkcji.

177. f: $y=2|x|$.

178. f: $y=1+x+|1-x|$.

179. f: $y=2|x+1|+|x-2|$.

180. f: $y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$.

181. f: $y=2x+\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

182. f: $y=||x+3|-2|$.

183. f: $y=\frac{|x|}{x}(x+1)$.

184. f: $y=\frac{2-x}{|x-2|}\cdot x+2$.

W zadaniach 185—193 rozwiąż równanie z niewiadomą x.

185. $1-\frac{x-1}{2}=3x+1$.

186. $x\sqrt{2}-\frac{2x+1}{3}=3$.

187. $x\sqrt{5}+7=x-\frac{1-x\sqrt{2}}{2}$.

188. $1-\frac{3(x+1)}{2}=\frac{7-3x}{2}$.

189. $1-\frac{x+1}{2}+3x=\frac{5x+1}{2}$.

190. $\left|3x+\frac{1}{2}\right|=4$.

191. $|7x-1|=2x+3$.

192. $|x+2|+|x-2|=4$.

193. $|x-2|+|x-3|+2|x-4|=9$

W zadaniach 194—207 rozwiąż nierówność z niewiadomą x:

194. $\frac{3x}{2}-\frac{2-x}{3}>x+1$.

195. $\frac{5}{2}x-\frac{3(1-x)}{4}<1-\frac{x+1}{2}$.

196. $\frac{7x-1}{4}\geqslant\frac{x}{2}-\frac{2-x}{3}$.

197. $\frac{9-7x}{3}+1\leqslant x-\frac{1-x}{2}$.

198. $x+2-\frac{3-x}{2}>-\frac{x}{2}+2x$.

199. $5-\frac{1-2x}{3}<\frac{2x}{3}$.

200. $|3x-2|<1$.

201. $\left|5+\frac{x+1}{2}\right|>3$.

202. $\left|7-\frac{1}{4}x\right|\leqslant 2$.

203. $\left|1-\frac{x+1}{2}\right|\geqslant 2$.

204. $\left|2-\frac{1-2x}{3}\right|>2x+1$.

205. $|x+3|-|x|>1$.

206. $6|2x+1|+3|x-4|+|x|<20$.

207. $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}>x+1$.

W zadaniach 208—212 ustal dziedzinę funkcji f.

208. $f\colon y=\sqrt{1-4x}+\frac{3x^2+5}{3+x}+\frac{1}{3-x}$.

209. $f\colon y=\sqrt{3x-1}-\frac{2x-1}{\sqrt{7-2x}}$.

210. $f\colon y=\frac{1}{\sqrt{|x-1|-2}}$.

211. $f\colon y=\sqrt{7-5x}+\sqrt{5x-7}$.

212. $f\colon y=\sqrt{-|3x+5|}$.

213. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną spełniającą układ nierówności: $x^2-1\leqslant(x+1)^2$ i $1-\frac{x+2}{3}<2-\frac{3-x}{6}$.

214. Podaj wszystkie liczby naturalne spełniające nierówność $\left|2-\frac{3x-1}{3}\right|<1$.

215. Podaj wszystkie liczby całkowite spełniające układ nierówności: $|4x-7|>1$ i $|3x-1|\leqslant 8$.

216. $A=\{x\in \boldsymbol{R}\colon |3x-15|=3x-15\}$, $B=\{x\in \boldsymbol{R}\colon |19-2x|<1\}$.
a) wyznacz: $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$.
b) Podaj ilustrację graficzną iloczynów kartezjańskich $A\times B$ i $B\times A$.

217. Dla jakich wartości parametru k rozwiązanie równania $1-\frac{x-9k}{10}=\frac{3k-x}{2}-\frac{3x-1}{5}$ należy do przedziału $<-1; 2)$?

W zadaniach 218—221 przeprowadź dyskusję równania z niewiadomą x, ze względu na liczbę rozwiązań.

218. $\frac{ax-3}{2}=1-\frac{x-4a}{3}$.

219. $b-\frac{x-5}{4}=\frac{ax-b}{2}$.

220. $|ax+b|=1$.

221. $|ax-1|=b$.

W zadaniach 222—227 rozwiąż układy równań.

222. $3x+2y=-1$ i $2x+3y=3$.

223. $x-2y=1$ i $-2x+4y=-2$.

224. $2x+y=1$ i $4x+2y=3$.

225. $x+y+z=1$ i $x-y+z=2$, i $2x+y+z=-1$.

226. $x+y+2z=0$ i $x+2y+z=0$, i $-x+y-4z=0$.

227. $x+2y+z=1$ i $x+y-z=1$, i $-x+y+5z=1$.

228. Dla jakich wartości parametru p układ równań $2x-y=5$ i $x+y=3p-1$ jest spełniony przez parę liczb nieujemnych?

229. Dla jakich wartości parametru p układ równań $x+y=2$ i $2x+y=3p$ jest spełniony przez parę liczb, z których jedna jest dodatnia, a druga ujemna?

230. Wyznacz te wartości parametru m, dla których para liczb (x, y) spełniająca układ równań $x+y=m$ i $3x-2y=2m-1$ jest rozwiązaniem nierówności $|x|+|y|\leqslant 1$.

W zadaniach 231—233 przeprowadź dyskusję układu równań o niewiadomych x, y ze względu na liczbę rozwiązań.

231. $2x+(m-1)y=3$ i $(m+1)x+4y=-3$

232. $ax+2y=1$ i $2x+ay=1$.

233. $ax+2y=1$ i $x+y=b$.

W zadaniach 234—241 narysuj w prostokątnym układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne x, y spełniają równanie.

234. $2x+y+1=0$.

235. $4x+1=0$.

236. $2y-1=0$.

237. $|x-3|=1$.

238. $|y+1|=2$.

239. $|x-y|=1$.

240. $x^2-4y^2=0$.

241. $y^2+6x=x^2+9$.

W zadaniach 242—254 narysuj w prostokątnym układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne x, y spełniają nierówność.

242. $3x-y+1<0$.

243. $2x+y+3\geqslant 0$.

244. $2x+3>0$.

245. $3y-5\leqslant 0$.

246. $|x+1|\geqslant 3$.

247. $|-2y+3|<2$.

248. $|x+y|>1$.

249. $|2x-y|\leqslant x+2y$.

250. $|x|-2|y|\geqslant 1$.

251. $x^2>y^2$.

252. $x^2\leqslant 4y^2$.

253. $x^2+y^2\leqslant 2x+4y-5$.

254. $3x^2+8y^2+14xy>0$.

255. W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj zbiór punktów, których współrzędne x, y spełniają równanie $|x+y|+|x-y|=2$.

W zadaniu 173 wprowadzono na płaszczyźnie kartezjańskiej π metrykę d: $d(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$, gdzie $A=(x_1,y_1)$ $B=(x_2,y_2)$. Nazywamy ją metryką miejską.

W zadaniach 256—258 rozważamy przestrzeń metryczną (π,d), gdzie π jest płaszczyzną kartezjańską, a d metryką miejską.

256. Narysuj zbiór wszystkich punktów $P=(x, y)$ dla których $d(O, P)=2$, gdzie $O=(0, 0)$.

257. Narysuj zbiór wszystkich punktów $P=(x, y)$ dla których $d(A, P)\leqslant 1$, gdzie $A=(1, 1)$.

258. Narysuj zbiór wszystkich punktów $P=(x, y)$ dla których $d(A, P)=d(B, P)$, gdzie $A=(0, 0)$, $B=(1, 1)$.

259. Znajdź największą wartość parametru z, dla której spełniony jest układ warunków: $x-y+1\geqslant 0$ i $x+y-1\geqslant 0$, i $-3x+y+3\geqslant 0$, i $z=2x+y$ przez przynajmniej jedną parę (x, y).

260. Znajdź największą wartość parametru z, dla której spełniony jest układ warunków: $3x+y\leqslant 18$ i $x+2y\leqslant 20$, i $3x+2y\leqslant 24$, i $x\geqslant 0$, i $y\geqslant 0$, i $z=2x+3y$ przez przynajmniej jedną parę (x, y).

261. Znajdź największą i najmniejszą wartość parametru z, dla której spełniony jest układ warunków: $2x+y\geqslant 2$ i $x+3y\geqslant 3$, i $x-y\geqslant -1$, i $3x-y\leqslant 6$, i $x+y\leqslant 5$, i $z=x+2y$ przez przynajmniej jedną parę (x, y).

262. Gdy zapytano sławnego greckiego matematyka Pitagorasa ilu uczniów uczęszcza do jego szkoły, odpowiedział: „Połowa moich uczniów studiuje matematykę, czwarta część muzykę, siódma część milczy, a oprócz tego są tam jeszcze trzy kobiety”. Ilu uczniów było w szkole Pitagorasa.

263. Na sprawdzianie z matematyki 12% piszących nie rozwiązało zadania zupełnie, 32% rozwiązało je z błędami, a 14 uczniów rozwiązało zadanie poprawnie. Ilu uczniów pisało sprawdzian?

264. W zawodach „Zgaduj zgadula” postawiono 30 pytań. Za każdą prawidłową odpowiedź zaliczano 7 punktów, a za nieprawidłową odpowiedź uczestnik tracił 12 punktów. Ile dobrych odpowiedzi dał jeden z uczestników, jeżeli zdobył 77 punktów?

265. Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest równa 8. Znajdź tę liczbę wiedząc, że jest ona mniejsza o 36 od liczby otrzymanej z przestawienia jej cyfr.

266. Liczba trzycyfrowa ma na miejscu jedności cyfrę 4. Jeżeli przestawimy cyfry jedności i dziesiątek, to liczba powiększy się o 18, a jeżeli przestawimy cyfry setek i jedności, to liczba powiększy się o 99. Znajdź tę liczbę.

267. Po podwójnej obniżce ceny najpierw o 25%, a później o 5%, książka kosztowała 5 358 zł. Jaka była pierwotna cena książki?

268. Statek przepłynął 40 km z prądem rzeki w 2 godziny a 35 km pod prąd w $2\frac{1}{2}$ godziny. Oblicz prędkość statku względem wody i prędkość prądu rzeki.

269. Statek płynie Odrą z Wrocławia do Szczecina 3 dni, a ze Szczecina do Wrocławia 6 dni. Jaki jest czas przepływu wody Odry z Wrocławia do Szczecina?

270. Stop miedzi i cynku waży 24N. Przy zanurzeniu w wodzie stop ten traci na wadze $2\frac{8}{9}$N. Znajdź ciężar miedzi i cynku w tym stopie, jeżeli wiadomo, że miedź traci na wadze przy zanurzeniu w wodzie $11\frac{1}{9}$%, a cynk $14\frac{2}{7}$% swojego ciężaru.

271. 36N cynku waży w wodzie 31N, 23N ołowiu waży w wodzie 21N a stop cynku i ołowiu o wadze 292N waży w wodzie 261N. Ile niutonów ołowiu zawiera ten stop?

272. Dziadek i babka mają razem 140 lat. Dziadek ma obecnie dwa razy tyle, ile babka miała wtedy, gdy dziadek miał tyle, ile babka ma teraz. Ile lat ma dziadek, a ile babka?

§ 4. Funkcja kwadratowa. Równania i nierówności stopnia drugiego

273. Wykres funkcji kwadratowej $y=x^2+bx+c$ przechodzi przez punkty $A=(-1, 0)$ i $B=(1, -4)$.
a) Znajdź współczynniki b i c oraz narysuj wykres tej funkcji.
b) Dla jakich x funkcja przyjmuje wartości ujemne?
c) Ile jest równa wartość najmniejsza funkcji i dla jakiego x?
d) W jakich przedziałach funkcja maleje?
e) Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.
f) Zapisz funkcję w postaci kanonicznej oraz iloczynowej.
g) Podaj równanie osi symetrii wykresu tej funkcji.

274. Wyznacz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $y=x^2+bx+c$ wiedząc, że osiąga ona minimum równe 5 dla $x=2$.

275. Wyznacz współczynniki a, b, c funkcji $y=ax^2+bx+c$ wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $A=(1, -1)$ i największa wartość funkcji równa jest $\boldsymbol{R}$ dla $x=2$.

276. $f(x)=ax^2+bx+5$. Wyznacz a i b wiedząc, że $\bigwedge_{x\in \boldsymbol{R}} f(x+1)-f(x)= =8x+3$.

277. Wyznacz $f(x+1)$ wiedząc, że $f(x-1)=2x^2-3x+1$.

278. Wiadomo, że wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji $y=ax^2+bx+c$ ma odciętą 2, a jednym z jej miejsc zerowych jest 1. Znajdź drugie miejsce zerowe tej funkcji.

W zadaniach 279—291 rozwiąż równanie z niewiadomą x.

279. $7x^2-(2x-3)(2x+3)-(x-4)^2=3$

280. $x^2+2x+3=3|x+1|$.

281. $x^4+36=13x^2$.

282. $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8$.

283. $(x^2-5x)(x^2-5x-2)=24$.

284. $x^2-4x+8=(x^2-4x+2)(x^2-4x+4)$.

285. $x(x-1)(x-2)(x-3)=120$.

286. $x+\sqrt{2x-1}=2$.

287. $\sqrt{x-2}+x=9$.

288. $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$.

289. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$.

290. $|x^2-8x+12|=x^2-8x+12$.

291. $|3x-x^2|=x^2-3x$.

292. Znajdź liczbę naturalną n wiedząc, że dopisując do liczby n po jej prawej stronie cyfrę 7, otrzymujemy liczbę o 4 mniejszą niż n^2.

293. Wykaż, że równanie $x^2-(a+b)x+ab-c^2=0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie dla wszystkich wartości parametrów a, b, c.

294. Wykaż, że jeśli równanie kwadratowe ma rozwiązania rzeczywiste α i β, to można to równanie przedstawić w postaci $\boxed{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.}$

295. Podaj równanie kwadratowe, którego rozwiązania są odwrotnościami rozwiązań rzeczywistych równania $ax^2+bx+c=0$, gdzie a i c są różne od zera.

296. Rozwiązaniami rzeczywistymi równania $ax^2+bx+c=0$, gdzie $ac\neq 0$, są liczby x_1 i x_2. Podaj równanie kwadratowe o rozwiązaniach:

a) $\frac{x_1}{x_2}$ i $\frac{x_2}{x_1}$, b) x_1^2 i x_2^2, c) x_1^3 i x_2^3.

297. Podaj równanie kwadratowe, którego rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 będą spełniać warunki: $x_1x_2=3$ i $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4$.

W zadaniach 298—305 rozwiąż układ równań z niewiadomymi x, y.

298. $x^2+y=5$ i $2x-y=3$.

299. $2x-y=1$ i $xy=3$.

300. $x^2+y^2=9$ i $x-y=3$.

301. $x+y=1$ i $x^2+y^2+6x=7$.

302. $x^2+y^2=4$ i $xy=\sqrt{3}$.

303. $x+xy+y=11$ i $x^2y+xy^2=30$.

304. $x^2+y^2=13$ i $x+y+xy=11$.

305. $x^2+xy=28$ i $y^2+xy=21$.

306. Dla jakich liczb rzeczywistych p i q rozwiązaniami równania $x^2+(1-p)x-q-3=0$ są liczby p i q?

W zadaniach 307—328 rozwiąż nierówność z niewiadomą x.

307. $x^2<x+20$.

308. $x^2>4$.

309. $5<2x^2$.

310. $-1\leqslant 3x^2$.

311. $-3>4x^2$.

312. $3x\geqslant 2x^2$.

313. $(3x+2)(2-x)<0$.

314. $2x^2+5>x$.

315. $x^2+9\leqslant 6x$.

316. $|x^2-3x+1|\leqslant 19$.

317. $|x^2-|x||<6$.

318. $|x+1|+|x-1|\geqslant x^2$.

319. $x^4+x^2\geqslant 20$.

320. $(x^2-5x)^2-2(x^2-5x)>24$.

321. $(2x^2-3x-8)(2x^2-3x-6)<3$.

322. $x(x+1)(x+2)(x+3)<24$.

323. $x+2\sqrt{x}\leqslant 15$.

324. $\sqrt{3x-22}<x-2$.

325. $\sqrt{2x-3}>x-9$.

326. $\sqrt{3-|x|}\leqslant x-1$.

327. $\sqrt{4-x^2}\geqslant x$.

328. $x-\sqrt{x-3}<9$.

329. Wiedząc, że $f(x)=x^2-x-12$ i $g(x)=8-x$ rozwiąż nierówność.
a) $f[g(x)]\leqslant 0$. b) $g[f(x)]\leqslant 0$.

330. Wykaż, że nierówność $(x^2-2x+3)(x^2-2x+4)\geqslant x^2-2x+7$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x.

331. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a wartość najmniejsza funkcji $y=x^2-ax+2$ jest większa od najmniejszej wartości funkcji $y=x^2-x+a+1$?

332. Rozwiąż układ nierówności: $5>x^2$ i $x^2\geqslant 3x$.

333. Podaj wszystkie liczby naturalne spełniające układ nierówności $3\leqslant x^2-2x+3<18$.

W zadaniach 334—336 ustal dziedzinę funkcji f.

334. $f\colon y=\sqrt{x^2-5x}-\dfrac{2-3x}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

335. $f\colon y=\dfrac{\sqrt{3-x^2}}{1-x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{6x-x^2}}$.

336. $f\colon y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3-|x^2-1|}$.

337. Znajdź wszystkie dodatnie argumenty x, dla których wartości funkcji $y=2x^2-x$ są większe od wartości funkcji $y=x^2+2$.

338. $A=\{x\in\boldsymbol{R}\colon x^2\leqslant 5x\}$, $B=\{x\in\boldsymbol{R}\colon 9>x^2\}$. Wyznacz: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

339. $A=\{x\in\boldsymbol{R}\colon |x|\leqslant 4\}$, $B=\{x\in\boldsymbol{R}\colon x^2>1\}$. Wyznacz: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

340. $A=\{x\in\boldsymbol{R}\colon |x|>1\}$, $B=\{x\in\boldsymbol{R}\colon x^2\leqslant 4\}$. Wyznacz: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

341. $A=\{x\in\boldsymbol{R}\colon |x+1|<3\}$, $B=\{x\in\boldsymbol{R}\colon x^2\geqslant 2\}$. Wyznacz $A\cap B$.

342. $A=\{x\in\boldsymbol{R}\colon |2x-1|>3\}$, $B=\{x\in\boldsymbol{R}\colon x^2\leqslant 5\}$. Wyznacz $B\setminus A$.

W zadaniach 343—348 narysuj wykres funkcji f.

343. $f\colon y=|-x^2+4x+5|$.

344. $f\colon y=|4x-x^2|+2$.

345. $f\colon y=x^2-4|x|-5$.

346. $f\colon y=|x^2-4|+x^2$.

347. $f\colon y=x^2+x+\sqrt{(x^2+1)^2-4x^2}$.

348. $f\colon y=|x^2-9|+|x^2-4|+5$.

349. Ustal dziedzinę i narysuj wykres funkcji
$y=x^2+\sqrt{x^2-4}-\sqrt{4-x^2}$.

350. Narysuj wykres funkcji

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2, & \text{dla } x\leqslant 0\\ |x^2-1|, & \text{dla } x>0\end{cases}$$

i z jego pomocą ustal, dla jakich rzeczywistych wartości parametru m równanie $f(x)=m$ ma trzy różne rozwiązania.

351. Narysuj wykres funkcji $y=|x^2+2x-3|$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$ i z jego pomocą ustal zależność liczby k rzeczywistych rozwiązań równania $|x^2+2x-3|=a$ od parametru $a\in\boldsymbol{R}$. Narysuj wykres funkcji $k=f(a)$.

W zadaniach 352 i 353 w prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne x, y spełniają nierówność.

352. $y+4\geqslant x^2$.

353. $y<-|x^2-2|$.

W zadaniach 354 i 355 w prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne x, y spełniają układ nierówności.

354. $y+1\geqslant x^2$ i $y-1\leqslant 0$.

355. $y\geqslant x^2$ i $y+|x|\leqslant 6$.

356. $A=\left\{(x,\ y)\colon x\in\boldsymbol{R}\text{ i } y\in\boldsymbol{R}\text{ i } y\leqslant\frac{3}{2}-\left|x+\frac{1}{2}\right|\right\}$, $B=\{(x,\ y)\colon x\in\boldsymbol{R}$ i $y\in\boldsymbol{R}$, i $y\geqslant|x^2+x|-2\}$. W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj zbiór $A\cap B$.

W zadaniach 357 i 358 zbadaj, dla jakich rzeczywistych wartości parametru m równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.

357. $x^2+(m-3)x-m+3=0$.

358. $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$.

W zadaniach 359 i 360 zbadaj, dla jakich $k\in\boldsymbol{R}$ równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste.

359. $x^2+kx-k+3=0$.

360. $(k+1)x^2-4kx+2k+3=0$.

W zadaniach 361 i 362 przeprowadź dyskusję równania z niewiadomą x ze względu na liczbę rozwiązań.

361. $x^2-kx+k+3=0$.

362. $(k+2)x^2-4kx+4k=1$.

363. Niech k oznacza liczbę rozwiązań rzeczywistych równania $x-x^2=m$, gdzie $m\in\langle -1;\ 1\rangle$. Naszkicuj wykres funkcji $k=f(m)$.

364. Niech $p(m)$ będzie liczbą różnych rozwiązań rzeczywistych równania $(m+2)x^2+6mx+4m-1=0$, gdzie m jest parametrem. Naszkicuj wykres funkcji $y=p(m)$.

365. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru p układ równań $x^2+y^2-2x=1$ i $y-x=p$ jest układem sprzecznym?

W zadaniach 366 i 367 przeprowadź dyskusję układu równań z niewiadomymi x, y i parametrem $m\in\boldsymbol{R}$.

366. $x^2+y^2=5$ i $2x-y+m=0$.

367. $mx-y=1$ i $y=x^2+2x+m$.

368. Dla jakich wartości parametru $p\in\boldsymbol{R}$ zbiory:

$A=\{(x,\ y)\colon x\in\boldsymbol{R}$ i $y\in\boldsymbol{R}$, i $y\geqslant x^2+px-p^2\}$,

$B=\{(x,\ y)\colon x\in\boldsymbol{R}$ i $y\in\boldsymbol{R}$, i $x+y<-1\}$ są rozłączne?

369. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m równanie $x^2+(2m-1)x+m^2-3m=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste różnych znaków?

370. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru k równanie $x^2-2(k-1)x+k^2-3=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste jednakowych znaków?

371. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru k równanie $x^2+(2k-3)x+2k+5=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste ujemne?

372. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m równanie $x^2-(m-3)x+m=0$ ma dwa różne rzeczywiste rozwiązania dodatnie?

373. Dla jakich wartości parametru $m\in\boldsymbol{R}$ iloczyn rozwiązań rzeczywistych równania $x^2-(m-4)x+m^2-7m+12=0$ jest równy połowie sumy tych rozwiązań?

374. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m równanie $x^2-(3m-5)x+m^2-4m+3=0$ ma rozwiązania rzeczywiste różnych znaków takie, że rozwiązanie dodatnie jest większe od wartości bezwzględnej rozwiązania ujemnego?

375. Nie rozwiązując równania $x^2+3x-2=0$ oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{x_1^2x_2+x_1x_2^2}{2x_1^2-3x_1x_2+2x_2^2}$, gdzie x_1, x_2 są rozwiązaniami rzeczywistymi podanego równania.

376. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m suma kwadratów rozwiązań rzeczywistych równania $x^2+(3m-2)x+m+2=0$ jest większa od 8?

377. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru a suma kwadratów rozwiązań rzeczywistych równania $x^2+ax+4=0$ jest dwa razy większa od sumy tych rozwiązań?

378. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m równanie $x^2+mx+2m-2=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest sinusem, a drugie cosinusem tego samego kąta?

379. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru k kwadrat różnicy rozwiązań rzeczywistych równania $x^2-2x+k=0$ jest równy 16?

380. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru k równanie $x^2+4x+k=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 spełniające warunek $3x_1-x_2=0$?

381. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m równanie $x^2-6x+2m^2=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest kwadratem drugiego?

382. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m równanie $2x^2+mx+30=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 spełniające warunek $x_1:x_2=3:5$?

383. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m równanie $2x^2+(2m-1)x+m-1=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 spełniające warunek $3x_1-4x_2=11$?

384. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m równanie $x^2+(m-3)x-2m+6=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste większe od 1?

385. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m równanie $x^2-(2m-1)x+m^2-2=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste mniejsze od 3?

386. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m liczba 1 leży między rozwiązaniami rzeczywistymi równania $(m-4)x^2-4x+m-3=0$?

387. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m równanie $x^2-mx+2m-3=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste należące do przedziału $(-1;\ 5)$?

388. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m równanie $x^2-(m-1)x+2m-5=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest dodatnie, a drugie mniejsze od -1?

W zadaniach 389—391 znajdź wszystkie rzeczywiste wartości parametru a, dla których podana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych.

389. $(a-1)x^2-(a+1)x+a+1>0.$

390. $(a-2)x^2+2(2a-3)x<6-5a.$

391. $(4-a^2)x^2-2(a-2)x+1>0.$

392. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru m nierówność $f(x) \geqslant g(x)$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych, jeśli $f(x)=mx^2-3x-2$ a $g(x)=2x^2-x-m$?

393. Wyznacz wszytkie takie $p \in \boldsymbol{R}$, że $\bigwedge\limits_{x \in \boldsymbol{R}} [3+px>-p(1+x^2)]$.

W zadaniach 394 i 395 zbadaj, dla jakich $k \in \boldsymbol{R}$ dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

394. f: $y=\sqrt{x^2-kx+k}$. **395.** f: $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-kx+1}}$.

***396.** Wykaż, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ prawdziwa jest nierówność:
$|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n| \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}$.
Uwaga: Nierówność nazywa się nierównością Schwarza.

397. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru a zbiór wartości funkcji $f(x)=ax^2-(2a-1)x+2a-1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$ zawiera się w przedziale $\langle 0; \infty)$?

W zadaniach 398 i 399 ustala wartość logiczną zdania.

398. $\bigvee\limits_{a \in \boldsymbol{R}} \bigwedge\limits_{x \in \boldsymbol{R}} (ax^2+2x+4>0)$.

399. $\bigwedge\limits_{p \in \boldsymbol{R}} \bigvee\limits_{x \in \boldsymbol{R}} (x^2-p^2=px)$.

400. $A=\{x \in \boldsymbol{R}\colon \bigwedge\limits_{t \in \boldsymbol{R}} (t^2+tx+1>0)\}$, $B=\{x \in \boldsymbol{R}\colon \bigwedge\limits_{s \in \boldsymbol{R}} (xs^2+s+1 \geqslant 0)\}$.
Wyznacz $A \setminus B$.

401. Wyznacz zbiór $A \cap B$, jeżeli $A=\{x \in \boldsymbol{R}\colon |x^2-x|-2<0\}$,
$B=\left\{x \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee\limits_{p \in \boldsymbol{R}} \{p^2+(x+1)p+1 \leqslant 0\}\right\}$.

402. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru k równanie $x^2-2mx+2m-k=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste dla każdej wartości parametru $m \in \boldsymbol{R}$?

403. Dane jest równanie $x^2+(m+1)x+m^2+k=0$. Dla jakich $k \in \boldsymbol{R}$ równanie to dla każdej liczby rzeczywistej m nie ma rozwiązań rzeczywistych?

404. Który z prostokątów o obwodzie d ma największe pole?

405. Dla jakich wartości parametru $a \in \boldsymbol{R}$ suma kwadratów rozwiązań rzeczywistych równania $x^2+ax+a-2=0$ jest najmniejsza?

406. Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 18 cm. Jakie powinny być długości boków tego trójkąta, aby objętość bryły otrzymanej przez jego obrót dokoła podstawy była największa?

407. Który z prostokątów wpisanych w trójkąt równoboczny o boku długości a ma największe pole?

408. Okno jest figurą wypukłą ograniczoną trzema bokami prostokąta i półokręgiem, którego średnicą jest czwarty bok tego prostokąta. Jak należy dobrać wymiary okna, aby przy danym obwodzie $2p$ przepuszczało jak największą ilość światła?

409. Który z prostokątów o obwodzie 12 cm ma najkrótszą przekątną?

410. Dla jakich wartości parametru $m \in \boldsymbol{R}$ odwrotność sumy kwadratów rozwiązań rzeczywistych równania $x^2-mx+2m-5=0$ jest największa?

411. Wykaż, że jeśli stosunek rozwiązań rzeczywistych równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$ jest równy 1:2, to $2b^2=9ac$.

412. Wykaż, że jeśli współczynniki rzeczywiste a, b, c równania $ax^2+bx+c=0$ spełniają warunki $2b^2=9ac$ i $ac \neq 0$, to takie równanie ma dwa różne rozwiązania, których stosunek jest równy 1:2.

413. Udowodnij, że jeśli między współczynnikami rzeczywistymi równań $x^2+px+q=0$ i $x^2+mx+n=0$ zachodzi związek $mp=2(n+q)$, to przynajmniej jedno z tych równań ma rozwiązanie rzeczywiste.

414. Udowodnij, że jeśli równania $x^2+px+q=0$ i $x^2+mx+n=0$ o współczynnikach rzeczywistych mają wspólne rozwiązanie rzeczywiste, to $(n-q)^2=(m-p)(np-mq)$.

415. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a funkcje $f(x)=x^2+ax+1$ i $g(x)=x^2+x+a$ mają wspólne miejsce zerowe?

416. Wiadomo, że $f(x)=ax^2+bx+c$ i a, b, c są liczbami całkowitymi. Wykaż, że jeśli dla każdej liczby całkowitej k liczba $f(k)$ jest podzielna przez 5, to każda z liczb a, b, c jest podzielna przez 5.

417. Wykaż, że jeśli współczynniki a, b, c funkcji kwadratowej $y=ax^2+bx+c$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to nie ma ona wymiernych miejsc zerowych.

418. Udowodnij, że funkcja $f(x)=ax^2+bx+c$ przyjmuje dla każdego całkowitego x wartości całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy $2a$, $a+b$ i c są liczbami całkowitymi.

419. Do magazynu dostarczono tyle worków cukru, jaką ma masę cukier w każdym worku. Po sprzedaniu 50 worków okazało się, że pozostała część o masie 975 kg. Ile kilogramów cukru dostarczono do magazynu?

420. Książka kosztowała 9 000 zł. Po dwukrotnej obniżce cen o ten sam procent cena książki wyniosła 5 760 zł. Ile procent wynosiła każda z obniżek?

421. Turysta przeszedł 105 km. Gdyby na pokonanie tej trasy przeznaczył o dwa dni więcej, to każdego dnia mógłby pokonywać o 6 km mniej. Ile kilometrów dziennie przechodził turysta?

422. W roku 1845 na uroczystości urodzin spytał ktoś solenizanta ile ma lat, na co solenizant odpowiedział: „Gdy mój wiek sprzed 15 lat pomnożę przez mój wiek za 15 lat, to otrzymam rok mojego urodzenia". Ile lat miał solenizant?

423. (Zadanie Bezouta). Kupiec kupił konia i po pewnym czasie sprzedał go za 24 pistole tracąc przy tym tyle procent, ile pistoli kosztował koń. Za ile pistoli kupiec kupił konia?

424. Z naczynia o pojemności 40 litrów napełnionego alkoholem odlano pewną ilość alkoholu i dolano wody. Gdy znowu odlano taką samą ilość mieszaniny i dopełniono naczynie wodą, w naczyniu pozostało 10 litrów alkoholu. Ile litrów cieczy odlano za każdym razem?

§ 5. Wielomiany. Równania i nierówności

425. Dla jakich rzeczywistych wartości parametrów a i b równe są wielomiany $W(x)$ i $G(x)\cdot H(x)$, gdy:
a) $W(x)=x^4+4x^3-8x-4$, $G(x)=x^2-2$, $H(x)=x^2+ax+b$.
b) $W(x)=x^3+5x^2+4$, $G(x)=x-2$, $H(x)=x^2+ax+b$?

426. Dla jakich a, $b\in R$ wielomian $W(x)=x^4+ax^3+bx^2-8x+1$ jest kwadratem innego wielomianu?

427. Dla jakich rzeczywistych wartości współczynników a, b, c, d wielomian $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ jest funkcją:
a) parzystą, b) nieparzystą?

W zadaniach 428—438 wykonaj dzielenie wielomianów.

428. $(x^3+4x^2+x-6):(x+3)$.

429. $(x^4-x^3-7x^2+13x-6):(x^2+2x-3)$.

430. $(x^7-3x^5+2x^4+x^3-4x^2+x-2):(x^3-x+2)$.

431. $(x^3-3x-2):(x-2)$.

432. $(x^9+3x^8-x^7-x^2-3x+1):(x^7-1)$.

433. $(x^5+2x^2-1):(x+1)$.

434. $(x^5+32):(x+2)$.

435. $(x^3-ax^2+2a^3):(x+a)$.

436. $[x^4+(2a+1)x^3-x^2-(4a^2+1)x+2a]:(x^2+x-2a)$.

437. $[x^4-2ax^3-ax^2+2(a^2+1)x-4a]:(x^3-ax+2)$.

438. $(x^3-3ax+a^3+1):(x+a+1)$.

439. Wyznacz współczynniki rzeczywiste a, b, c wielomianu $W(x)=ax^4+bx^3+c$ wiedząc, że iloczyn reszt z dzielenia tego wielomianu przez dwumiany x^2+1 i x^3+1 jest równy $2(x-1)(x-5)$.

440. Dla jakich rzeczywistych wartości parametrów a i b wielomian $W(x)=x^3+ax^2-x+b$ jest podzielny przez trójmian x^2-3x+5?

441. Dla jakich rzeczywistych wartości parametrów a, b, c wielomian $W(x)=x^4-x^3+ax^2+bx+c$ jest podzielny przez wielomian $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$?

442. Wykaż, że jeśli wielomian $W(x)=x^6+ax^4+bx^2+c$ jest podzielny przez x^2+x+1, to jest także podzielny przez x^2-x+1.

443. Wykaż, że nie istnieje liczba rzeczywista a, dla której wielomian $W(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$ jest podzielny przez $(x-a)^2$.

444. Oblicz sumę współczynników wielomianu $W(x)=3(x^2-3x+3)^{1994}-4(x^3+2x^2-4)^{1995}$.

445. Wykaż, że suma współczynników wielomianu $W(x)=(9x^7+8x^4-5)^n-(x^9-4x^6+8)^n$ jest podzielna przez 7 dla każdego naturalnego n.

446. Sprawdź, czy istnieje taki wielomian $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, że $W(2)=3$ i $W(-2)=2$.

447. Wykaż, że jeśli $W(26)=8$ i $W(29)=15$, to co najmniej jeden ze współczynników wielomianu $W(x)$ nie jest liczbą całkowitą.

448. Wykaż, że jeśli $W(x)$ jest wielomianem stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych takim, że $W(7)=6$ i $W(k)=11$ gdzie $k\in C$, to $k=2$ lub $k=6$, lub $k=8$, lub $k=12$.

449. Dla jakich całkowitych wartości współczynników a, b liczba $1+\sqrt{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=3x^2+ax^2+bx+12$?

450. Wykaż, że wielomian $W(x)=ax^3-bx^2-cx+d$, w którym współczynniki a, b, c, d są kolejnymi liczbami naturalnymi, ma trzy pierwiastki rzeczywiste, w tym co najmniej jeden pierwiastek całkowity oraz oblicz, dla jakich wartości współczynników a, b, c, d suma tych pierwiastków jest największa.

451. Dany jest wielomian $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ o współczynnikach całkowitych a, b, c, d. Wykaż, że jeśli $W(0)$ i $W(1)$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

452. Wykaż, że jeśli wielomian $W(x)$ różny od wielomianu zerowego spełnia dla każdego rzeczywistego x warunek $W(x)\cdot W(x+2)=W(x^2+x+2)$, to nie ma on pierwiastków rzeczywistych.

453. Wykaż, że jeśli współczynniki a, b, c, d wielomianu $W(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.

454. Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $c>0$ i $b^2+4c<4ac$, to wielomian $W(x)=x^4+2x^3+ax^2+bx+c$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

455. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)=x^{2001}+1$ przez dwumian x^2-1.

456. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian x^4+x^3-x-1 jest wielomianem x^3+x^2+x+1. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez x^2-1.

***457.** Wykaż, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-a$ jest równa $W(a)$.
Uwaga: Twierdzenie nazywa się twierdzeniem o reszcie.

458. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru k reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=k^2x^{20}-6x^{10}-3k$ przez dwumian $x-1$ jest równa 4?

459. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=x^4+2x^3-ax^2-a^2x+5$ przez dwumian $x+2$ jest mniejsza od 11?

460. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian x^3-3x-2 jest trójmianem kwadratowym $3x^2-4x+1$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-2$.

461. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian kwadratowy x^2+x-2 jest równa $x+1$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x+2$.

462. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x-1$ jest równa 3, a reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x+1$ jest równa 1. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x-1)(x+1)$.

*463. Wykaż, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Uwaga: Twierdzenie nazywa się twierdzeniem Bezouta.

464. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a wielomian $W(x)=x^4-(a^2-3)x^2+8$ jest podzielny przez dwumian $x-2$?

465. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a wielomian $W(x)=a^2x^{50}+4x^{30}-5a$ jest podzielny przez dwumian $x+1$?

W zadaniach 466—468 znajdź rzeczywiste wartości parametrów a, b dla których wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$.

466. $W(x)=x^4-x^3-4x^2+ax+b$, $P(x)=(x+2)(x-3)$.

467. $W(x)=x^4+ax^2-3x+b$, $P(x)=x^2+x-2$.

468. $W(x)=x^3-(a+b)x^2-(a-b)x+3$, $P(x)=x^2-4x+3$.

469. Wykaż, że dla każdego naturalnego n wielomian
$W(x)=(x-2)^{2n}+(x-1)^n-1$
jest podzielny przez trójmian kwadratowy x^2-3x+2.

470. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru p wielomian $W(x)=x^3-px+p-1$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste?

471. Wykaż, że jeżeli r jest pierwiastkiem całkowitym wielomianu $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, to $r-1$ jest dzielnikiem $W(1)$, a $r+1$ jest dzielnikiem $W(-1)$.

472. Wykaż, że jeśli $P(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych i wielomian $Q(x)=P(x)+3$ ma co najmniej cztery różne pierwiastki całkowite, to wielomian $P(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

473. Wykaż, że liczba 2 jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu $W(x)=x^4+6x^3-11x^2-60x+100$.

474. Dobierz liczby rzeczywiste p, q tak, by liczba 3 była pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu $W(x)=x^3-5x^2+px+q$.

475. Wykaż, że jeżeli wielomian $W(x)=x^3+ax+b$ ma podwójny pierwiastek rzeczywisty, to $4a^3+27b^2=0$.

*476. Wykaż, że jeżeli wielomian o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity różny od zera, to pierwiastek ten jest dzielnikiem wyrazu wolnego w tym wielomianie.

W zadaniach 477 i 478 znajdź pierwiastki rzeczywiste wielomianu $W(x)$.

477. $W(x)=x^3+3x^2-6x-8$.

478. $W(x)=x^4-4x^3+7x^2-8x+4$.

*479. Wykaż, że jeżeli wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny, nieskracalny i różny od zera, to licznik tego pierwiastka jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a mianownik jest dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej niezależnej w tym wielomianie.

W zadaniach 480 i 481 znajdź pierwiastki rzeczywiste wielomianu $W(x)$.

480. $W(x)=3x^3-7x^2-x+1$.

481. $W(x)=9x^4+9x^3+5x^2-4x-4$.

482. Dla jakich całkowitych wartości parametrów a i b wielomian $W(x)=x^3+ax^2+bx+2$ ma trzy różne pierwiastki wymierne?

W zadaniach 483—496 rozłóż podany wielomian na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.

483. $x^3-4x^2-3x+12$.

484. x^3+3x^2-x-3.

485. x^4-2x^3-x+2.

486. x^6-1.

487. x^4+9.

488. x^8-1.

489. x^6+1.

490. x^3-7x+6.

491. x^3+2x^2-2x+3.

492. $x^4+x^3+2x^2+x+1$.

493. $x^4-2\sqrt{2}x^3+2x^2-16$.

494. x^8+x^4+1.

495. x^4+x^2+2x+6.

496. $x^4+x^2+\sqrt{2}x+2$.

497. Wykaż, że dla każdego całkowitego x wartość wielomianu $W(x)=x^5-5x^3+4x$ jest liczbą podzielną przez 120.

498. Wykaż, że dla każdego całkowitego x wartość wielomianu $W(x)=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{4}x^3+\frac{11}{24}x^2+\frac{1}{4}x$ jest liczbą całkowitą.

499. Wykaż, że dla każdego naturalnego n wielomian $W(x)=x^{3n+2}+x+1$ jest podzielny przez trójmian kwadratowy x^2+x+1.

500. Znajdź wszystkie liczby całkowite x, dla których wartość wielomianu $W(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+5$ jest liczbą pierwszą.

501. Udowodnij, że wielomian $W(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$, gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są parami różnymi liczbami całkowitymi, nie da się przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych stopnia niższego niż n.

***502.** Wykaż, że liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, gdzie $a\neq 0$, wtedy i tylko wtedy,

gdy $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$ i $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$ i

$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$.

U w a g a: Wzory nazywają się wzorami Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego.

503. Dla jakich rzeczywistych wartości współczynników a, b, c pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^3-ax^2+bx-c$ są liczby a, b, c?

504. Dla jakich $a, b\in \boldsymbol{R}$ wielomian $W(x)=x^3+ax+b$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3 takie, że $x_1=x_2=x_3-3$?

505. Wykaż, że jeżeli wielomian $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, to $b^2\geqslant 3ac$.

506. Wykaż, że jeżeli wielomian $W(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3 takie, że $x_1:x_2=x_2:x_3$, to $b^3=ca^3$.

507. Wykaż, że jeżeli wielomian $W(x)=x^3+px+q$, gdzie $q\neq 0$, ma trzy pierwiastki rzeczywiste, to $p<0$.

508. Wykaż, że jeżeli wielomian $W(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, z których jeden jest średnią arytmetyczną pozostałych, to $27c=9ab-2a^3$.

509. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^3+px+q$, to $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2p$ i $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3q$.

W zadaniach 510—530 rozwiąż równania.

510. $x^3-2x^2-9x+18=0$.

511. $x^3-\sqrt{2}x^2-9x+3\sqrt{18}=0$.

512. $x^4-2x^2-15=0$.

513. $x^3-2x^2-5x+6=0$.

514. $x^3-7x^2+16x-12=0$.

515. $x^4+x^2+6x-8=0$.

516. $2x^2-5x^2+8x-3=0$.

517. $2x^3+2x^2+x+\frac{1}{4}=0$.

518. $x^3-4x^2-|5x-20|=0$.

519. $2x^4+5=|5x^3+2x|$.

520. $|x^3-4x|=3x^2$.

521. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^4+\left(x-\frac{3}{2}\right)^4=1$.

522. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=6$.

523. $4\sqrt{2}x^3-22x^2+17\sqrt{2}x-6=0$.

524. $x^3-(a+2)x+\sqrt{a+1}=0$. gdzie $a\geqslant -1$.

525. $(1+x+x^2)^2-\frac{a+1}{a-1}(1+x^2+x^4)$, gdzie $|a|\geqslant 2$.

526. $x^4-3ax^3+3a^3x+a^4=0$, gdzie $a>0$.

527. $x^4+(x+1)(5x^2-6x-6)=0$.

528. $x^4+3x^3+4x^2-13x-9=0$.

529. $x^3+2\sqrt{3}x^2+3x+\sqrt{3}-1=0$.

530. $x^4-12x^2+16\sqrt{2}x-12=0$.

531. Udowodnij, że nie istnieje liczba rzeczywista x spełniająca równanie $x^4+5x^2-12x+9=0$.

532. Liczby -1 i 2 są rozwiązaniami równania $2x^3+mx^2-x+n=0$. wyznacz trzecie rozwiązanie tego równania.

533. Wiadomo, że liczba 1 jest rozwiązaniem równania $x^3+2x^2+m=x$. Wyznacz najmniejsze rozwiązanie tego równania.

534. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru m równanie $m^2x^3+m(m+6)x^2+(m+6)x=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste?

W zadaniach 535 i 536 zbadaj, dla jakich rzeczywistych wartości parametru m równanie ma dokładnie trzy różne rozwiązania rzeczywiste.

535. $(m+1)x^3-2x^2+(m-1)x=0$.

536. $x^4-(m+2)x^2+m=0$.

537. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a równanie $x^4-(a+1)x^2+4=0$ ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste?

538. Przeprowadź dyskusję równania $x^4-10x^2+9=m$ z niewiadomą x ze względu na liczbę rozwiązań.

539. Przeprowadź dyskusję równania $x^4+4x^3-8x+a=0$ z niewiadomą x ze względu na liczbę rozwiązań.

540. Dla jakiego naturalnego n równanie $x^{n+1}+64=x^n+64x$ ma dokładnie:

a) dwa rozwiązania rzeczywiste,

b) trzy rozwiązania całkowite?

541. Wykaż, że jeżeli liczba rzeczywista r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to jest rozwiązaniem równania $W[W(x)]=W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyrazem wolnym wielomianu $W(x)$ jest liczba 0.

542. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru p równanie $x^3-(p+1)x^2+(p-3)x+3=0$ ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest średnią arytmetyczną pozostałych?

543. Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania równania $3x^3+2\sqrt{3}x^2-21x+6\sqrt{3}=0$ wiedząc, że iloczyn dwóch z tych rozwiązań jest równy 1.

544. Znajdź rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, x_3 równania
$$x^3-6x^2+px+q=0$$
z niewiadomą x wiedząc, że $x_1:x_2:x_3=1:2:3$.

545. Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste a i b są rozwiązaniami równania $x^3-px+2=0$, to liczba ab jest rozwiązaniem równania $x^3+px^2-4=0$.

546. Wykaż, że jeśli równania $x^3+ax+b=0$ i $x^3+cx+d=0$ mają wspólne niezerowe rozwiązanie rzeczywiste, to $(ad-bc)(a-c)^2=(b-d)^3$.

547. Udowodnij, że prawdziwa jest równość $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$.

W zadaniach 548—565 rozwiąż nierówność.

548. $x^3>5x$.

549. $x^3-2x^2+18\geqslant 9x$.

550. $x^3-4x>7x^2-28$.

551. $x^3+2x^2+18\geqslant 9x$.

552. $x^4-2x^2<3$.

553. $x^3+2x^2-5x-6>0$.

554. $x^3\leqslant 7x+6$.

555. $x^3-x^2-x<2$.

556. $(x^3+8)(25-x^2)<0$.

557. $2x^4+3x^3+3x\leqslant 2$.

558. $x^4-x^3-x^2-x\leqslant 2$.

559. $x^3-3x^2+27\leqslant 9x$.

560. $(x+5)(x^2+6x+9)(x-2)\geqslant 0$.

561. $(4-x^2)(x^2-6x+8)(x^3-27)\geqslant 0$.

562. $(1-x^3)(x^2-3x+2)(9-x^2)\leqslant 0$.

563. $|x^3-1|<x^2+x+1$.

564. $|x^3-1|<-2x^2+x+1$.

565. $(2x^2-3x-8)(2x^2-3x-6)<3$.

W zadaniach 566—569 rozwiąż układ nierówności.

566. $x^2\geqslant 6$ i $4x>x^3$.

567. $6x\geqslant x^3$ i $x^2<2$.

568. $x^3+3>x^2+3x$ i $x\geqslant x^3$.

569. $6<x^3-5x^2+4x+6\leqslant 26$.

W zadaniach 570—572 ustal dziedzinę funkcji f.

570. $f\colon\ y=\sqrt{4x-x^3}-\dfrac{1-x^2}{\sqrt{3-x^2}}$.

571. $f\colon\ y=\sqrt{x^4-8x}+\dfrac{x}{x^3-3x^2-x+3}$.

572. $f\colon\ y=x^3-\dfrac{\sqrt{|x|-x^4}}{1-2|x|}$.

573. Wiedząc, że $f(x)=x^2-3x-10$ i $g(x)=x^2-4$ ustal dziedzinę funkcji $y=\sqrt{f[g(x)]}$.

574. Rozwiąż nierówność $W[W(x)]\geqslant x^2-x+37$ wiedząc, że $W(x)=x^2-x+1$.

575. Wykaż, że jeśli $W(x)=x^2+x+1$, to $W[W(x)]>W(x)$ dla każdego $x\in\mathbf{R}$.

576. Rozwiąż nierówność $x^4+x^3-7x^2+ax+b>0$ wiedząc, że liczby 1 i -1 są pierwiastkami wielomianu po lewej stronie nierówności.

577. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=a^3x^6+3a^2x^5-ax^2+5$ przez dwumian $x+1$ nie przekracza liczby 2?

578. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=x^5-x^4-5ax^2+5ax+6x-4$ przez dwumian $x-a$ jest mniejsza od 2?

579. Wykaż, że nierówność $x^8+x^6-4x^4+x^2+1\geqslant 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

580. Wykaż, że nierówność $x^{16}-x^{11}+x^6-x+1>0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

581. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru k nierówność $(x^2+2)(x^2-k)+2k+1>0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej?

§ 6. Funkcje wymierne. Równania i nierówności wymierne

W zadaniach 582 i 583 doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie.

582. $\left(a-\dfrac{4ab}{a+b}+b\right):\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{b+a}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right).$

583. $\left[\left(\dfrac{3}{a-b}+\dfrac{3a}{a^3-b^3}\cdot\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right):\dfrac{2a+b}{a^2+2ab+b^2}\right]\dfrac{3}{a+b}.$

W zadaniach 584—586 oblicz wartość podanego wyrażenia wiedząc, że $x+\dfrac{1}{x}=a$, gdzie a jest daną liczbą rzeczywistą.

584. $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, **585.** $x^3+\dfrac{1}{x^3}$, **586.** $x^4+\dfrac{1}{x^4}$.

587. Dobierz liczby rzeczywiste A, B, C tak, by równość $\dfrac{x+3}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ była prawdziwa dla wszystkich $x\neq -1$.

588. Dana jest funkcja $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}\setminus\{1\}$. Podaj wzór funkcyjny i dziedzinę funkcji:
a) $y=f(f(x))$. b) $y=f(f(f(x)))$.

W zadaniach 589—599 w prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj wykres funkcji f.

589. $f\colon y=\dfrac{|x^3-x^2|}{x^3-x^2}\cdot x^2$.

590. $f\colon y=\dfrac{x^4-1}{|x^2-1|}$.

591. $f\colon y=\dfrac{x+3}{x-1}$.

592. $f\colon y=\dfrac{2x-5}{x-3}$.

593. $f\colon y=\dfrac{-3x-2}{x+2}$.

594. $f\colon y=\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$.

595. $f\colon y=\frac{|x-2|}{x^2-4}$.

596. $f\colon y=\frac{x^3-x^2+5x}{(x-2)|x^3-x^2+5x|}$.

597. $f\colon y=\frac{|x^2-1|(x+2)}{x^3-x^2-x+1}$.

598. $f\colon y=\frac{2|x|-3}{3|x|-2}$.

599. $f\colon y=\frac{|x+1|-|x-1|}{x}$.

W zadaniach 600—603 w prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne x, y spełniają nierówność.

600. $xy\leqslant 1$.

601. $(x-3)(y+2)\leqslant 1$.

602. $x+y<xy$.

603. $xy-2x+y\leqslant 3$.

W zadaniach 604—609 rozwiąż równanie.

604. $\frac{4x-1}{x+1}-\frac{3}{x-1}=5-\frac{x^2+5}{x^2-1}$.

605. $\frac{4}{1-4x^2}=\frac{1-2x}{1+2x}+\frac{1+2x}{1-2x}$.

606. $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{2-x}=\frac{x^2}{x^2-4}-1$.

607. $\frac{x+2}{x-2}=\frac{x+3}{x-3}+\frac{2}{x^2-5x+6}$.

608. $\frac{x^2-3x+4}{x+2}+\frac{x+2}{x^2-3x+4}=\frac{5}{2}$.

609. $\frac{1}{x^2-3x+3}+\frac{2}{x^2-3x+4}=\frac{6}{x^2-3x+4}$.

610. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru m funkcja $y=(m-1)x^2+(m-2)x+1$ przyjmuje wartość najmniejszą równą 1?

W zadaniach 611—626 rozwiąż nierówność.

611. $\frac{3x-1}{x+2}<1$.

612. $x^2>\frac{1}{x}$.

613. $\frac{x^2+4x+6}{x+4}\geqslant 3$.

614. $\frac{3x^2+x-4}{x^2-1}\leqslant 2$.

615. $\frac{x+2}{x+3}\geqslant\frac{x-2}{x-3}$.

616. $\frac{10x+8}{x+2}\geqslant\frac{5x-17}{x-3}$.

617. $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}\leqslant 1$.

618. $\frac{15}{4+3x-x^2}>1$.

619. $\frac{x^3-x^2+2x+7}{x+8}\leqslant 1$.

620. $\frac{4x^3-3x^2-4x+3}{x^2-3x+2}\leqslant 1$.

621. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-x+1}\leqslant\frac{1-2x}{x^3+1}$.

622. $\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|\geqslant 2$.

623. $\left|\frac{x^2-2x}{x^2-4}\right|\leqslant 1$.

624. $\left|\frac{x^2-5x+3}{x^2-1}\right|<1$.

625. $\frac{x^2-|x|-12}{x-3}\geqslant 2x$.

626. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{|x|-1}\geqslant\frac{2}{x-1}$.

W zadaniach 627—629 ustal dziedzinę funkcji f.

627. $f\colon y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$.

628. $f\colon y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

629. $f\colon y=\frac{1-3x}{\sqrt{2-\frac{3x+1}{x-2}}}$.

630. Wykaż, że funkcja $f(x)=\frac{x^6-7x^2-6}{x^8+x^4-20}$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego całkowitego x.

631. Udowodnij, że nierówność $\frac{1}{3}\leqslant\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\leqslant 3$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

632. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a nierówność $-5\leqslant\frac{x^2+ax+9}{x^2+2x+3}\leqslant 4$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej?

633. Które spośród liczb rzeczywistych są mniejsze od swoich sześcianów i większe od swoich odwrotności?

634. Wyznacz, jeśli istnieją, kresy zbioru $A=\{x\in\boldsymbol{R}\colon \left|\frac{3x-2}{x+1}\right|\geqslant 3\}$.

635. $A=\{x\in\boldsymbol{R}\colon x^3+x+6\geqslant 4x^2\}$, $B=\{x\in\boldsymbol{R}\colon \left|\frac{2x-3}{x-1}\right|<2\}$.

a) Wyznacz: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

c) Podaj ilustracje graficzne iloczynów $A\times B$ i $B\times A$.

636. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru m punkt przecięcia prostych o równaniach $y=x+m$ i $y=mx-4$ należy do wykresu funkcji $y=2x-2$?

637. Dla jakich wartości parametru $m \in \boldsymbol{R} \setminus \{-2\}$ rozwiązaniem układu równań $(2-m)x - my = 4$ i $2x + y = m$ jest para liczb rzeczywistych (x, y) takich, że $x \geqslant y + 6$?

638. Dla jakich wartości parametru k rozwiązaniem układu równań $2x - 3ky = 5k$ i $x + 2y = 5$ jest para (x, y) liczb rzeczywistych takich, że $x > 0$ i $y \leqslant 0$?

639. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań $(m+1)x - my = 4$ i $3x - 5y = m$ jest para (x, y) liczb rzeczywistych takich, że $x - y < 2$?

640. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru m funkcja $y = (m-1)x^2 - \sqrt{3}mx + m + 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$ ma wartość najmniejszą mniejszą lub równą 1?

641. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru k równanie $(k+2)x^2 - 4x - k + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 takie, że $x_1 + x_2 \geqslant 2$?

642. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru k równanie $(k-1)x^2 + 2kx - k - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 takie, że $x_1 x_2 \geqslant 1$?

643. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru m równanie $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ ma dwa rozwiązania jednakowych znaków?

644. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru m równanie $(m+2)x^2 - (3m+2)x + 2m - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste dodatnie?

645. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru k połowa najmniejszej wartości funkcji f: $y = x^2 - (k-1)x + k - 1$ jest większa od odwrotności sumy miejsc zerowych tej funkcji?

646. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru m suma odwrotności rozwiązań równania $2x + m(1 - x^2) = 2 + 2x^2$ jest większa od 2?

647. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a równanie $(a-2)x^4 - 2(a+3)x^2 + a - 1 = 0$ ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste?

648. Mianownik pewnego nieskracalnego ułamka, będącego ilorazem dwóch liczb naturalnych, jest mniejszy o 1 od kwadratu licznika tego ułamka. Jeżeli licznik i mianownik ułamka powiększymy o 2, to otrzymamy liczbę większą od $\frac{1}{4}$, a jeśli licznik i mianownik tego ułamka pomniejszymy o 3, to otrzymamy liczbę mniejszą od $\frac{1}{10}$. Co to za ułamek?

649. Jeden zbiornik zawiera mieszaninę spirytusu z wodą w stosunku 2:3, drugi w stosunku 3:7. Ile litrów należy wziąć z każdego zbiornika, aby otrzymać 12 litrów mieszaniny o stosunku spirytusu do wody równym 3:5?

650. Dane są dwa stopy tych samych metali. W pierwszym stopie stosunek metali jest równy 1:2, w drugim 2:3. Ile kilogramów każdego z tych stopów należy wziąć, aby otrzymać 10 kg stopu zawierającego te metale w stosunku p? Dla jakich p zadanie ma rozwiązanie?

651. W jednym stopie stosunek miedzi do cynku jest równy 1:2, w drugim 2:3. W jakim stosunku należy przetopić te stopy, aby otrzymać stop trzeci, o stosunku miedzi do cynku równym 17:27?

652. Dwóch robotników może wykonać razem pewną pracę w 20 dni. Jeden z nich pracując oddzielnie potrzebuje na wykonanie tej pracy o 30 dni mniej niż drugi. W ile dni może wykonać tę pracę każdy robotnik pracując oddzielnie?

653. Dwa różne automaty wykonują razem pewną pracę w 3 godziny. Gdyby pierwszy automat pracował sam przez jedną godzinę, a następnie drugi pracował sam przez 6 godzin, to wykonałyby 75% całej pracy. W ile godzin każdy automat może wykonać całą pracę?

654. Koparka A może wykonać pewną pracę w czasie o 5 dni krótszym niż koparka B. Obie koparki pracując jednocześnie mogą wykonać tę pracę w 6 dni. Po dwóch dniach wspólnej pracy koparka A została wycofana. Ile dni po wycofaniu koparki A musi pracować koparka B, aby dokończyć pracę?

655. Zbiornik można napełnić z pomocą jednego kranu o 2 godziny dłużej, a z pomocą drugiego o 4,5 godziny dłużej niż przy użyciu obu kranów jednocześnie. W jakim czasie można napełnić zbiornik z pomocą każdego kranu oddzielnie?

656. Droga ma długość 36 km. Jeden rowerzysta przebywa ją w czasie o 15 minut krótszym niż drugi, który jedzie o 2km/h wolniej. Oblicz prędkości rowerzystów.

657. Pociąg był zatrzymany pod semaforem przez 16 minut i nadrobił opóźnienie na drodze 80 km, jadąc z prędkością o 10 km/h większą od zaplanowanej. Jaka była planowana prędkość pociągu?

658. Na drodze 36 metrów przednie koło ciągnika wykonało o 6 obrotów więcej niż tylne. Gdyby obwód każdego koła zwiększyć o 1 metr, to na tej samej drodze przednie koło wykonałoby o 3 obroty więcej niż tylne. Oblicz średnice kół ciągnika.

659. Po okręgu o długości 54 cm poruszają się ruchem jednostajnym w tym samym kierunku dwa punkty, spotykając się co 9 sekund. Oblicz prędkość każdego z nich wiedząc, że jeden obiega okrąg w czasie o 12 sekund krótszym niż drugi.

660. Samochód przebył drogę od A do B z prędkością $v_1 = 40$ km/h, a z powrotem z prędkością $v_2 = 30$ km/h. Jaka jest średnia prędkość samochodu w obie strony?

§ 7. Indukcja matematyczna

W zadaniach 661—686 wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość.

661. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

662. $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

663. $1+5+9+\ldots+(4n-3)=n(2n-1)$.

664. $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$.

665. $4+10+16+\ldots+(6n-2)=n(3n+1)$.

666. $1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n=-n$.

667. $1-4+9-16+\ldots+(2n-1)^2-(2n)^2=-n(2n+1)$.

668. $1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$.

669. $1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

670. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

671. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

672. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

673. $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$.

674. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$.

675. $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot n^2=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$.

676. $1+5^1+5^2+\ldots+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$.

677. $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

678. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n}$.

679. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

680. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.

681. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

682. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{2(3n+2)}$.

683. $\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}+\frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)}+\ldots+\frac{1}{(\sqrt{2}+n-1)(\sqrt{2}+n)}=\frac{n}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+n)}$.

684. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$.

685. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$.

*686. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, gdzie a, b są dowolnie ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

687. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n prawdziwa jest równość:

$$\frac{m+1}{2}+\frac{m+3}{4}+\frac{m+7}{8}+\ldots+\frac{m+2^n-1}{2^n}=\frac{(m-1)(2^n-1)}{2^n}+n.$$

688. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

689. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 1$ i dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:

$$x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

690. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq\pm 1$ i dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość.

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

691. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 liczba 10^n-4 jest podzielna przez 12.

W zadaniach 692—695 wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe jest zdanie.

692. Liczba 7^n-1 jest podzielna przez 6.

693. Liczba 5^n-1 jest podzielna przez 4.

694. Liczba $3^{4n-2}+1$ jest podzielna przez 10.

695. Liczba $5^{2n-1}+3$ jest podzielna przez 8.

696. Wykaż, że dla każdej parzystej liczby naturalnej m, liczba 13^m+6 jest podzielna przez 7.

W zadaniach 697—712 wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe jest zdanie.

697. Liczba $2^{n+2}+3^{2n+1}$ jest podzielna przez 7.

698. Liczba $3^{4n-2}+5^{2n-1}$ jest podzielna przez 14.

699. Liczba $2^{6n+1}+9^{n+1}$ jest podzielna przez 11.

700. Liczba $11^{n+2}+12^{2n+1}$ jest podzielna przez 133.

701. Liczba $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ jest podzielna przez 11.

702. Liczba $6^{2n}+10\cdot 3^n$ jest podzielna przez 66.

703. Liczba $3^{3n-1}+5\cdot 2^{3n-2}$ jest podzielna przez 19.

704. Liczba $10^{3n+1}-3(-1)^n$ jest podzielna przez 7.

705. Liczba $10^{2n}-(-1)^n$ jest podzielna przez 101.

706. Liczba $10^{3n+1}-10(-1)^n$ jest podzielna przez 143.

707. Liczba 10^n+4^n-2 jest podzielna przez 6.

708. Liczba $4^n+15n-1$ jest podzielna przez 9.

709. Liczba $3^{2n+1}+40n-67$ jest podzielna przez 64.

710. Liczba $2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4$ jest podzielna przez 25.

711. Liczba $5^{2n-1}\cdot 2^{n+1}+3^{n+1}\cdot 2^{2n-1}$ jest podzielna przez 38.

712. Liczba n^3+5n jest podzielna przez 6.

713. Wykaż, że dla każdej parzystej liczby naturalnej m, liczba m^3+20m jest podzielna przez 48.

714. Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 9.

715. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $5^{n+1}+2\cdot 3^n+1$ jest podzielna przez 8.

716. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $4^n(3n-1)+1$ jest podzielna przez 9.

717. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n wielomian $W(x)=x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ jest podzielny przez trójmian kwadratowy x^2+x+1.

718. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n wielomian $W(x)=nx^{n+1}-(n+1)\,x^n+1$ jest podzielny przez $(x-1)^2$.

719. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba zapisana w układzie dziesiątkowym za pomocą 3^n jedynek jest podzielna przez 3^n.

720. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 2 prawdziwa jest nierówność $2^n>2n+1$.

721. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n równej 1 lub większej od 4 prawdziwa jest nierówność $2^n>n^2$.

722. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 prawdziwa jest nierówność $3^n>n^2+4$.

723. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $n^3\geqslant\frac{n(n+1)}{2}$.

724. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 3 prawdziwa jest nierówność $(n+1)\,2^n<3^n$.

725. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n równej 1 lub większej od 9 prawdziwa jest nierówność $2^n>n^3$.

726. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 6 prawdziwa jest nierówność $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<\sqrt{n}$.

727. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

728. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$.

729. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

730. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$.

731. Wykaż, że jeśli iloczyn liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $n>1$, jest równy 1, to $x_1+x_2+\ldots+x_n\geqslant n$.

***732.** Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, ... ,a_n i każdej liczby naturalnej n większej od 1 prawdziwa jest nierówność $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

***733.** Wykaż, że dla każdego rzeczywistego $x\geqslant -1$ i dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $(1+x)^n\geqslant 1+nx$.
Uwaga: Nierówność nazywa się nierównością Bernoulliego.

734. Wykaż, że dla każdego rzeczywistego $x \geqslant 0$ i dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx+\frac{1}{2}n(n-1)x^2.$$

735. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b oraz każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $(a+b)^n < 2^n(a^n+b^n)$.

736. Wykaż, że dla wszystkich liczb naturalnych k, n takich, że $k \leqslant n$ prawdziwa jest nierówność $1+\frac{k}{n} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$.

§ 8. Ciągi liczbowe

737. Ile wyrazów ciągu $(a_n): a_n = \frac{5n+26}{2n-1}$ jest większych od 4?

738. Ile wyrazów ciągu $(a_n): a_n = \frac{9n-17}{n+2}$ nie jest większych od 5?

739. Które wyrazy ciągu $(a_n): a_n = \frac{5n-19}{n+1}$ należą do przedziału $(-1; 2\rangle$?

740. Które wyrazy ciągu $(a_n): a_n = \frac{10n-31}{2n+1}$ spełniają nierówność $|a_n| < 2$?

741. Wykaż, że ciąg $(a_n): a_n = \frac{1999...9}{999...95}$, gdzie w liczniku i mianowniku jest n dziewiątek, jest ciągiem stałym.

W zadaniach 742—751 zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

742. $a_n = \frac{6n+7}{n+1}$.

743. $a_n = \frac{3n-2}{3-4n}$.

744. $a_n = \frac{n^2-1}{3n-2}$.

745. $a_n = \frac{2^n}{n+1}$.

746. $a_n = n^2 - 7n + 3$.

747. $a_n = \frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n}$.

748. $a_n = \frac{4999...9}{999...98}$, gdzie w liczniku i mianowniku jest n dziewiątek.

749. $a_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$.

750. $a_n = \sqrt{n}$.

751. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

752. Wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n=\sqrt{n^2+n}-n$ jest ciągiem rosnącym.

753. Jaki warunek powinny spełniać liczby dodatnie a, b, c, d, aby ciąg $u_n=\frac{an+b}{cn+d}$ był ciągiem rosnącym?

754. Ciąg (a_n) jest określony wzorem: $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$.
Wykaż, że:
a) ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym,
b) wszystkie wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału $\langle\frac{1}{2};1\rangle$.

755. Wykaż, że ciąg $(a_n)\colon a_n=\sqrt{k+\sqrt{k+...+\sqrt{k}}}$, gdzie $k>0$ i pierwiastek występuje n razy, jest ciągiem rosnącym, a jego wszystkie wyrazy są mniejsze od $\sqrt{k}+1$.

756. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1=0$ i $a_{n+1}=a_n^2-2^n$, gdzie $n\in \mathbf{N}$. Wykaż, że dla każdej liczby $n>4$ prawdziwa jest nierówność $a_n>2^n$.

757. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1=1$ i $a_{n+1}=a_n+8n$. Wykaż, że $a_n=(2n-1)^2$ dla każdej liczby naturalnej n.

758. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1=\frac{1}{2}$ i $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2^n}$.
Wykaż, że $a_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}$ dla każdej liczby naturalnej n.

***759.** Ciągiem Fibonacciego nazywamy ciąg (a_n) określony następująco: $a_1=a_2=1$ i $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Udowodnij, że
$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ dla każdej liczby naturalnej n.

760. Udowodnij, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem Fibonacciego, to $a_n^2-a_{n-1}\cdot a_{n+1}=(-1)^{n-1}$.

761. Udowodnij, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem Fibonacciego, to $a_{n+1}\cdot a_{n+2}-a_n\cdot a_{n+3}=(-1)^n$.

762. Wyznacz, trzy początkowe wyrazy ciągu (a_n), w którym $\bigwedge_{n\in N} S_n=n^2+3n-2$, gdzie S_n jest sumą n początkowych wyrazów ciągu.

763. Wyznacz siódmy wyraz ciągu (a_n), w którym $\bigwedge_{n\in N} S_n=\frac{6n^2}{n+2}$, gdzie S_n jest sumą n początkowych wyrazów ciągu.

764. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określona jest wzorem $S_n=\frac{n}{n+1}$. Wykaż, że $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

W zadaniach 765 i 766 zbadaj, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

765. $a_n=\frac{3n-5}{2}$,

766. $a_n=\frac{n}{n+1}$.

767. Wykaż, że jeśli ciąg (a_n): $a_n=n^2-5n+2$, to ciąg (b_n): $b_n=a_{n+1}-a_n+9$ jest ciągiem arytmetycznym.

768. Udowodnij, że jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są ciągami arytmetycznymi i $c_n=a_n\cdot b_n$ oraz $d_n=c_{n+1}-c_n$, to ciąg (d_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy równej podwojonemu iloczynowi różnic ciągów (a_n) i (b_n).

769. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określona jest wzorem $S_n=2n^2+3n$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

770. Dla jakich x, ciąg $\left(\frac{1}{\sqrt{2+x}}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)$ jest ciągiem arytmetycznym?

771. Wiedząc, że liczby $x+y$, $x+2y+1$, $x^2+4y+3x$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, zbadaj dla jakich $x\in \mathbf{R}$, ciąg ten jest ciągiem rosnącym.

772. Czy z ciągu $\left(1, \frac{1}{2}, ... , \frac{1}{n}, ...\right)$ można wybrać nieskończony ciąg arytmetyczny?

773. Udowodnij, że jeżeli $a+b\neq 0$ i $b+c\neq 0$ i $a+c\neq 0$ i ciąg (a^2, b^2, c^2) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$ jest również ciągiem arytmetycznym.

774. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna ma długość 30 wiedząc, że długości jego boków tworzą ciąg arytmetyczny.

775. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o polu 150 wiedząc, że długości boków tego trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny.

776. Wykaż, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, h długością wysokości opuszczonej na bok o długości b, a r długością promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt oraz ciąg (a,b,c) jest ciągiem arytmetycznym, to $h=3r$.

777. Jednym z rozwiązań równania $ax^2+bx+c=0$ jest liczba -3 oraz ciąg (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym o sumie wyrazów 24. Znajdź drugie rozwiązanie tego równania.

778. Trzy pierwiastki rzeczywiste wielomianu $W(x)$ o współczynnikach całkowitych tworzą ciąg arytmetyczny. Suma tych pierwiastków jest równa 21, a iloczyn 315. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej wielomian ten przyjmuje wartość podzielną przez 48.

779. Wykaż, że jeśli ciąg (a^3,b^3,c^3) jest ciągiem arytmetycznym i liczby rzeczywiste a, b, c są różne od zera, to
$(a^2+ab+b^2)^{-1}+(b^2+bc+c^2)^{-1}=2(a^2+ac+c^2)^{-1}$.

780. Znajdź takie liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 aby ciąg $(-7, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 23)$ był ciągiem arytmetycznym.

781. Czwarty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) równy jest 7, a wyraz dziesiąty 31. Wyznacz wyraz dwudziesty pierwszy tego ciągu.

782. Różnica między wyrazem siódmym i trzecim pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 8, a ich suma 20. Wyznacz ten ciąg.

783. Znajdź ciąg arytmetyczny wiedząc, że suma jego trzech pierwszych wyrazów jest równa 15, a ich iloczyn 80.

784. Znajdź ciąg arytmetyczny, w którym suma trzech początkowych wyrazów jest równa 15, natomiast suma kwadratów tych wyrazów 93.

785. Wykaż, że jeśli w ciągu arytmetycznym (a_n) prawdziwe są równości $a_n=m$ i $a_m=n$, gdzie $m\neq n$, to różnica tego ciągu jest równa -1.

786. Wykaż, że w skończonym ciągu arytmetycznym suma wyrazów k-tego licząc od początku ciągu i wyrazu k-tego licząc od końca ciągu jest równa sumie wyrazów skrajnych tego ciągu.

787. Wartość użytkowa maszyny maleje co roku o tę samą kwotę. Po ilu latach maszyna traci wartość użytkową całkowicie, jeżeli wiadomo, że jej wartość po 25 latach będzie trzy razy mniejsza niż po 15 latach?

788. Udowodnij, że jeżeli a, b, c, d są liczbami całkowitymi i ciąg (a, b, c, d) jest ciągiem arytmetycznym, to liczba $abcd+(b-a)^4$ jest kwadratem liczby całkowitej.

789. Udowodnij, że jeżeli drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest średnią geometryczną wyrazu pierwszego i czwartego, to wyraz szósty jest średnią geometryczną wyrazu czwartego i dziewiątego.

790. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c są odpowiednio k-tym, l-tym i m-tym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego, przy czym $k\neq l$ i $k\neq m$, to $\frac{a-b}{k-l}=\frac{a-c}{k-m}$.

791. Udowodnij, że jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \boldsymbol{R}_+$ i ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest ciągiem arytmetycznym, to

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

792. Wykaż, że jeżeli wszystkie wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) są różne od zera, to prawdziwa jest równość

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2}+\frac{1}{a_2 \cdot a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n}=\frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}.$$

793. Czy istnieją cztery różne liczby całkowite tworzące ciąg arytmetyczny taki, że kwadrat największej z nich jest równy sumie kwadratów pozostałych?

794. Znajdź cztery różne liczby całkowite tworzące ciąg arytmetyczny wiedząc, że największa z tych liczb jest równa sumie kwadratów liczb pozostałych.

795. Znajdź liczbę trzycyfrową podzielną przez 45 wiedząc, że jej cyfry tworzą ciąg arytmetyczny.

796. Wyrazy ciągu (a_n) dla $n \geqslant 3$ spełniają warunek: $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1$. Podaj wzór na a_n w zależności od a_1, a_2 i n.

797. Znajdź wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n) wiedząc, że $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 10$ i różnice między sąsiednimi wyrazami ciągu (a_n) tworzą ciąg arytmetyczny.

798. Udowodnij, że liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i $\sqrt{5}$ nie mogą być wyrazami tego samego ciągu arytmetycznego.

799. Oblicz sumę wszystkich nieparzystych liczb naturalnych mniejszych od 200.

800. Oblicz sumę trzycyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 4.

801. Oblicz sumę dwucyfrowych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1.

802. Oblicz sumę dwucyfrowych liczb naturalnych, które nie są podzielne przez 3.

803. Piąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8, a jedenasty 32. Oblicz sumę 21 początkowych wyrazów tego ciągu.

804. O ciągu arytmetycznym (a_n) wiadomo, że: $a_1 + a_5 = \frac{5}{3}$ i $a_3 \cdot a_4 = \frac{65}{72}$. Oblicz sumę 17 początkowych wyrazów tego ciągu.

805. Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wiedząc, że suma wyrazu szóstego, dziewiątego, dwunastego i piętnastego jest równa 20.

806. Iloczyn wyrazu trzeciego i siódmego malejącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 28, a przy dzieleniu wyrazu drugiego tego ciągu przez wyraz szósty otrzymujemy 3 i resztę 2. Oblicz sumę 13 początkowych wyrazów ciągu (a_n).

807. W pewnym ciągu arytmetycznym o wyrazie pierwszym 1, suma pięciu początkowych jego wyrazów stanowi 25% sumy pięciu wyrazów następnych. Wyznacz różnicę r tego ciągu.

808. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8, a siódmy 20. Ile początkowych wyrazów należy zsumować, by otrzymać 77?

809. Znajdź 10-wyrazowy ciąg arytmetyczny wiedząc, że suma jego wyrazów o numerach parzystych jest równa 25, a suma wyrazów pozostałych 15.

810. Znajdź liczby tworzące ciąg arytmetyczny wiedząc, że suma pierwszych czterech wyrazów tego ciągu jest równa 40, suma ostatnich czterech 104, a suma wszystkich wyrazów 216.

811. Wyznacz wyraz pierwszy i różnicę ciągu arytmetycznego o wyrazie piątym równym 18 wiedząc, że w tym ciągu suma n początkowych wyrazów stanowi 25% sumy $2n$ początkowych wyrazów.

812. Oblicz wartość liczbową wyrażenia
$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

W zadaniach 813—815 rozwiąż równanie z niewiadomą x.

813. $1 + 4 + 7 + \ldots + x = 145$

814. $(x+1) + (x+4) + (x+7) + \ldots + (x+28) = 155$.

815. $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \ldots + \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 3$.

816. Miary stopniowe kątów wewnętrznych n-kąta wypukłego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 5°. Ustal, ile boków ma ten wielokąt wiedząc, że jego najmniejszy kąt wewnętrzny ma 120°.

817. Pan Sinus, zapalony turysta, wyruszył w podróż krajoznawczą, pokonując każdego dnia 40 kilometrów. Po 6 dniach wyruszył z tego samego miejsca, tą samą trasą jego przyjaciel Cosinus, pokonując pierwszego dnia 82 kilometry, a każdego następnego dnia o 4 kilometry mniej niż dnia poprzedniego. W którym dniu i w jakiej odległości od miejsca wyjazdu, pan Cosinus dogoni przyjaciela?

818. W pewnej rodzinie ojciec — wielki miłośnik książek — dawał każdemu ze swoich pięciu synów w dzień ich urodzin począwszy od piątego roku życia tyle książek, ile dany syn miał lat. Tak się przy tym złożyło, że liczby oznaczające wiek synów tworzyły ciąg arytmetyczny o różnicy 3. Ile lat miał każdy z synów, gdy ich wspólna biblioteka liczyła 325 książek?

819. Znajdź wszystkie ciągi kolejnych liczb naturalnych mające tę własność, że suma ich wyrazów jest równa 25.

820. W pewnym ciągu arytmetycznym (a_n) prawdziwa jest równość $S_m = S_n$, gdzie $m \neq n$. Wykaż, że $S_{m+n} = 0$.

821. Udowodnij, że jeżeli w ciągu arytmetycznym (a_n) prawdą jest, że $S_m : S_n = m^2 : n^2$, to $a_m : a_n = (2m-1):(2n-1)$, gdzie $S_m + a_1 + a_2 + ... + a_m$ i $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

822. Wykaż, że jeśli w ciągu arytmetycznym (a_n) prawdą jest, że
$a_n = \frac{1}{m}$ i $a_m = \frac{1}{n}$ i $m \neq n$, to $S_{mn} = \frac{1+mn}{2}$,
gdzie $S_{mn} = a_1 + a_2 + ... + a_{mn}$.

823. Wykaż, że jeżeli w ciągu arytmetycznym $S_n = n^2 p$ i $S_k = k^2 p$, gdzie $p \in N$ i $n \neq k$, to $S_p = p^3$.

824. Wszystkie liczby naturalne ustawione w porządku rosnącym podzielono na grupy: (1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), ... Oblicz sumę liczb występujących w n-tej grupie.

825. Wykaż, że jeśli S_n, S_{2n}, S_{3n} oznaczają odpowiednio sumę n, $2n$, $3n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), to $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

826. W pewnym ciągu arytmetycznym suma $3n$ początkowych wyrazów jest równa 90, a suma $2n$ początkowych wyrazów jest równa 50. Oblicz sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

827. Wykaż, że jeśli równanie $x^4 + px^2 + q = 0$ ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste tworzące ciąg arytmetyczny, to $9p^2 = 100q$.

828. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru k, równanie $x^4 - (3k+2)x^2 + k^2 = 0$ ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste tworzące ciąg arytmetyczny?

829. Dane są ciągi arytmetyczne: (17, 21, 25, ...) oraz (16, 21, 26, ...). Oblicz sumę stu początkowych liczb występujących równocześnie w obu ciągach.

830. Wykaż, że suma wszystkich liczb dowolnego wiersza tablicy

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2, 3, 4 \\ 3, 4, 5, 6, 7 \\ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

jest kwadratem liczby wyrazów tego wiersza.

831. Udowodnij, że suma wszystkich liczb tablicy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 2 & 3 & 4 & ... & n+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n+1 & n+2 & ... & 2n-1 \end{bmatrix}$$

jest równa n^3.

832. Dana jest następująca tablica liczb naturalnych zwana tablicą Pitagorasa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 2 & 4 & 6 & ... & 2n \\ 3 & 6 & 9 & ... & 3n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2n & 3n & ... & n^2 \end{bmatrix}$$

Oblicz n wiedząc, że suma wszystkich liczb tablicy jest równa 36 100.

W zadaniach 833 i 834 zbadaj, czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

833. $a_n = 5 \cdot 2^{3n-1}$. **834.** $a_n = \frac{3^n}{n+2}$.

835. Dla jakich liczb rzeczywistych x ciąg $(\sqrt{13}+2, x, \sqrt{13}-2)$ jest ciągiem geometrycznym?

836. Przedstaw liczbę 195 w postaci sumy trzech składników tworzących ciąg geometryczny i takich, że składnik pierwszy będzie mniejszy o 120 od składnika trzeciego.

837. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, będących liczbami całkowitymi różnymi od zera, jest podzielna przez sumę tych wyrazów.

838. Wykaż, że jeśli długości boków trójkąta tworzą ciąg geometryczny, to długości odpowiadających tym bokom wysokości trójkąta tworzą także ciąg geometryczny.

839. Wykaż, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, a h długością wysokości tego trójkąta opuszczonej na bok o długości a i ciąg (a, b, c, h) jest ciągiem geometrycznym, to trójkąt ten jest trójkątem prostokątnym.

840. Udowodnij, że jeśli $a>b>c>0$ i ciąg (a,b,c) jest ciągiem geometrycznym, to dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a^n+c^n>2b^n$.

841. Cienką bibułkę o grubości $\frac{1}{16}$ mm składamy na pół, znów na pół, jeszcze raz na pół itd. Przypuśćmy, że naszą bibułkę złożyliśmy w myśli, bo w praktyce się nie uda, 50 razy. Jaka będzie grubość złożonej bibułki?

842. Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (b_n) określony wzorem $b_n=5a_{n+1}-2a_n$ jest także ciągiem geometrycznym.

843. Liczby 18 i 162 są odpowiednio trzecim i piątym wyrazem ciągu geometrycznego. Oblicz drugi wyraz tego ciągu.

844. Wyznacz ciąg geometryczny (a_n) wiedząc, że suma wyrazu pierwszego, trzeciego i piątego tego ciągu jest równa 21, a różnica pomiędzy wyrazem trzecim i pierwszym 3.

845. Suma pierwszego i trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego jest równa 15, a suma kwadratów tych wyrazów 153. Znajdź iloraz tego ciągu.

846. Między liczby 3 i 375 wstaw liczby rzeczywiste x i y tak dobrane, by ciąg $(3, x, y, 375)$ był ciągiem geometrycznym.

847. Na trzech półkach ułożono 76 książek. Okazało się, że liczby książek znajdujących się na poszczególnych półkach tworzą ciąg geometryczny, przy czym największy wyraz tego ciągu jest o 4 mniejszy od sumy wyrazów pozostałych. Oblicz ile książek było na każdej półce.

848. Wykaż, że jeśli ciąg (x, y, z) jest ciągiem geometrycznym, to $(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2$.

849. Wykaż, że jeśli ciąg (a, b, c, d) jest ciągiem geometrycznym, to $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$.

850. Wykaż, że jeśli ciąg (a, b, c, d) jest ciągiem geometrycznym, to $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

851. Trzy liczby, których suma jest równa 7 tworzą ciąg geometryczny malejący. Największa z tych liczb jest o $33\frac{1}{3}\%$ większa od sumy dwóch pozostałych. Znajdź te liczby.

852. Cztery liczby rzeczywiste tworzą ciąg geometryczny, w którym suma wyrazów skrajnych jest równa -21, a suma wyrazów pozostałych 6. Znajdź te liczby.

853. Znajdź cztery liczby tworzące ciąg geometryczny, w którym pierwszy wyraz jest większy od drugiego o 36, a trzeci od czwartego o 4.

854. Wyznacz wszystkie ciągi geometryczne w których każdy wyraz zaczynając od trzeciego jest równy sumie dwóch poprzednich.

855. Liczby x_1, x_2 są rozwiązaniami równania $x^2-3x+A=0$, a liczby x_3, x_4 są rozwiązaniami równania $x^2-12x+B=0$. Oblicz A i B wiedząc, że liczby x_1, x_2, x_3, x_4 tworzą ciąg geometryczny rosnący.

856. Wykaż, że w skończonym ciągu geometrycznym iloczyn wyrazu k-tego licząc od początku ciągu i wyrazu k-tego licząc od końca ciągu jest równy iloczynowi wyrazów skrajnych tego ciągu.

857. Wykaż, że jeżeli ilorazem ciągu geometrycznego (a_n) jest $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to każdy wyraz tego ciągu oprócz wyrazu pierwszego i ostatniego równy jest różnicy wyrazu następującego po nim i wyrazu go poprzedzającego.

858. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie $ax^3+bx^2+cx+d=0$ wiedząc, że $a\neq 0$ i współczynniki a, b, c, d tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 3.

859. Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o objętości 27 i przekątnej długości $\sqrt{91}$ wiedząc, że długości trzech krawędzi tego prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny.

860. Wykaż, że jeżeli długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg geometryczny, to co najmniej dwie z tych długości są liczbami niewymiernymi.

861. Wyznacz wszystkie trzywyrazowe ciągi geometryczne w których wyraz pierwszy i iloraz są liczbami naturalnymi, a suma wyrazów jest równa 91.

862. Wykaż, że jeśli dla ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach dodatnich prawdziwe są równości $a_{n+m}=A$ i $a_{n-m}=B$, gdzie $m<n$, to $a_n=\sqrt{AB}$.

863. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c różne od zera są odpowiednio k-tym, l-tym i m-tym wyrazem pewnego ciągu geometrycznego , to $a^{l-m}\cdot c^{k-l}=b^{k-m}$.

864. Udowodnij, że liczby 11, 12 i 13 nie mogą być wyrazami tego samego ciągu geometrycznego.

865. Przy kopaniu studni płacono za pierwszy metr głębokości p zł, a za każdy metr następny dwukrotnie więcej niż za metr poprzedni. Jaka była głębokość studni, jeżeli za jej wykopanie zapłacono $511p$ zł?

866. W pewnym ciągu geometrycznym (a_n) prawdziwe są równości: $a_1+a_5=17$ i $a_2+a_6=-34$. Ile wyrazów początkowych tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać 43?

867. W ciągu geometrycznym (a_n) suma wyrazów drugiego i szóstego jest równa 34, a suma wyrazu trzeciego i siódmego jest równa 68. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać nie mniej niż 63?

868. Pewien ciąg geometryczny ma parzystą liczbę wyrazów, których suma jest trzy razy większa od sumy wyrazów o numerach nieparzystych. Wyznacz iloraz tego ciągu.

869. Wykaż, że dzieląc sumę wszystkich wyrazów, n wyrazowego ciągu geometrycznego (a_n), przez sumę odwrotności tych wyrazów, otrzymujemy iloraz równy iloczynowi wyrazu pierwszego i ostatniego tego ciągu.

870. Wykaż, że jeżeli ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q takim, że $|q|\neq 1$, to $a_1a_2+a_2a_3+\dots+a_{n-1}a_n=\frac{q(a_n^2-a_1^2)}{q^2-1}$.

871. Udowodnij, że jeżeli S_1, S_2, ... , S_n są sumami n początkowych wyrazów n ciągów geometrycznych, w których pierwsze wyrazy są równe 1, a ilorazy odpowiednio równe 1, 2, ... , n, to
$S_1+S_2+2S_3+3S_4+\dots+(n-1)S_n=1^n+2^n+\dots+n^n$.

872. Ciąg (a_n) określają rekurencyjnie równości: $a_1=0$ i $a_{n+1}=3a_n+1$. Znajdź i udowodnij wzór na dowolny wyraz tego ciągu.

873. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie równościami: $a_1=1$ i $a_{n+1}=2a_n+1$.

874. Wykaż, że jeżeli suma $2n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym a i ilorazie $q\neq-1$ jest równa sumie n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym b i ilorazie q^2, to $b=a+aq$.

875. Wykaż, że jeżeli S_n, S_{2n} i S_{3n} oznaczają odpowiednio sumę n, $2n$ i $3n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), to $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$.

876. W rosnącym ciągu geometrycznym suma $3n$ początkowych wyrazów jest równa 14, a suma $2n$ początkowych wyrazów 6. Oblicz sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

877. Udowodnij, że liczba $\underbrace{111\dots1}_{2n}-\underbrace{222\dots2}_{n}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

878. Udowodnij, że liczba $\underbrace{444\dots4}_{n+1}\underbrace{888\dots89}_{n}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

879. Oblicz sumę $1+11+111+\dots+\underbrace{111\dots1}_{n}$.

880. Oblicz sumę $1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+5\cdot2^4+\dots+100\cdot2^{99}$.

881. Udowodnij, że suma 30 początkowych wyrazów ciągu (3, 33, 333, ...) należy do przedziału $(10^{29}; 10^{30})$.

882. Wykaż, że jeśli ciąg (ab, b^2, c^2) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg $(b, c, 2b-a)$ jest ciągiem geometrycznym.

883. Pomiędzy liczby -2 i 25 wstaw dwie liczby x, y takie, by ciąg $(-2, x, y)$ był ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(x, y, 25)$ był ciągiem geometrycznym.

884. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru m ciąg (x, y, z), którego wyrazami są liczby spełniające układ równań $x+2y+z=2m$ i $x-4y-z=-8$, i $2x-y-z=m-8$ jest ciągiem:
a) arytmetycznym,
b) geometrycznym?

885. Wykaż, że jeżeli ciąg (a, x, b) jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg (a, y, b) jest ciągiem geometrycznym i a, b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to $|y| \leqslant x$.

886. W 11-wyrazowym ciągu arytmetycznym (a_n) o wyrazie pierwszym 24, wyrazy: pierwszy, piąty i jedenasty tworzą ciąg geometryczny. Jaka jest różnica ciągu (a_n)?

887. Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego wiedząc, że jego wyrazem piątym jest 18, a wyraz pierwszy, trzeci i trzynasty tworzą ciąg geometryczny.

888. Trzy liczby rzeczywiste, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli od pierwszej liczby odejmiemy 1, od drugiej 4, a od trzeciej 3, to otrzymane liczby utworzą ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

889. Trzy liczby rzeczywiste, których suma jest równa 9, tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 12, od trzeciej odejmiemy 3, a pierwszą zostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Znajdź te liczby.

890. Znajdź trzy liczby rzeczywiste tworzące ciąg geometryczny wiedząc, że jeśli do drugiej z tych liczb dodamy 8, to powstała trójka liczb utworzy ciąg arytmetyczny, a jeśli do trzeciego wyrazu powstałego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to otrzymamy trzy liczby tworzące ponownie ciąg geometryczny.

891. Trzy liczby rzeczywiste, których suma jest równa 21, tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są także odpowiednio pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Znajdź te liczby.

892. Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli odejmiemy od pierwszej 2, od drugiej 3, od trzeciej 9 i od czwartej 25, to otrzymane różnice utworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź te liczby.

893. Z czterech liczb rzeczywistych trzy pierwsze tworzą ciąg geometryczny, a trzy ostatnie ciąg arytmetyczny. Znajdź te liczby wiedząc, że suma pierwszej i ostatniej liczby jest równa 14, a suma pozostałych 12.

894. Trzy liczby rzeczywiste różne od zera tworzą ciąg arytmetyczny, a kwadraty tych liczb zapisane w tym samym porządku tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz iloraz tego ciągu geometrycznego.

895. W ciągu geometrycznym $(1, x, x^2, \ldots, x^{2n})$, gdzie n jest liczbą naturalną, iloczyn wyrazów o numerach nieparzystych jest równy 64, a iloczyn wyrazów pozostałych 32. Oblicz n i x.

896. Wykaż, że jeżeli ciąg $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to $(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n)^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$.

897. Przyjmując, że dane są a i n oblicz sumę
$S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \ldots + na^{n-1}$.

898. Wiedząc, że ciąg $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q i przyjmując, że dane są a_1 i q_1, oblicz sumę $S_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n$.

899. Znajdź wszystkie ciągi, które są jednocześnie ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi.

900. Wykaż, że jeśli dwa pierwsze wyrazy ciągu arytmetycznego rosnącego (a_n) są dodatnie i równe dwom pierwszym wyrazom ciągu geometrycznego (b_n), to $a_n < b_n$ dla każdej liczby naturalnej $n > 1$.

§ 9. Funkcja wykładnicza i logarytmicza. Równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne

W zadaniach 901—905 narysuj wykres funkcji f.

901. $f\colon y=2^{x-2}+3.$

902. $f\colon y=-2^x+4.$

903. $f\colon y=2^x\cdot 2^{|x|}.$

904. $f\colon y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-1.$

905. $f\colon y=|1-3^x|.$

906. Wykaż, że jeśli $4^x+4^{-x}=23$, to $2^x+2^{-x}=5$.

907. Oblicz drugi wyraz ciągu geometrycznego $(4^{x_1}, 4^{x_2},\ldots)$ wiedząc, że $x_1+x_2+\ldots+x_{12}=174$ i $x_5=10$.

908. Przy jakiej podstawie logarytm liczby 8 jest równy $\frac{3}{5}$?

W zadaniach 909—914 oblicz.

909. $\log_8\frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$

910. $\log 5\cdot\log 20+(\log 2)^2.$

911. $10\cdot 100^{\frac{1}{2}\log 3-\log 2}.$

912. $\log_{\sqrt{3}}8\cdot\log_4 81.$

913. $\log_{\sqrt{7}}3\cdot\log_3 49.$

914. $\dfrac{\log_6^2 3+\log_6 16}{\log_6 3\cdot\log_6 48+\log_6^2 4}.$

W zadaniach 915—918 wykaż równość.

915. $2^{\log_{\sqrt[3]{25}}\sqrt{5}}=\sqrt[4]{8}.$

916. $\log_{12}18\cdot\log_{24}54+5(\log_{12}18-\log_{24}54)=1.$

917. $1+\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4=\log_3 12.$

918. $\log_6 2=\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5.$

919. Oblicz $\log_{\sqrt{a}}\sqrt[3]{b^2}$ wiedząc, że $\log_a b=\frac{3}{4}$.

920. Oblicz $\log_9 20$ wiedząc, że $\log 2=a$ i $\log 3=b$.

921. Oblicz $\log_{54}168$ wiedząc, że $\log_7 12=a$ i $\log_{12}24=b$.

922. Udowodnij, że jeżeli $\log_{30}3=a$ i $\log_{30}5=b$, to $\log_{30}8=3-3a-3b$.

923. Udowodnij, że jeżeli $\log_{12}3=r$, to $\log_{12}2=\frac{1-r}{2}$.

924. Udowodnij, że jeżeli $\log_2 3=a$, to $\log_{24}54=\frac{3a+1}{a+3}$.

925. Udowodnij, że $\log_2 5$ jest liczbą niewymierną.

W zadaniach 926—928 wyznacz dziedzinę funkcji f.

926. $f\colon y=\log_x\frac{x}{4-x}.$

927. $f\colon y=\sqrt{4x-x^2}-\log_3\left(\frac{x^2+2x-8}{x-2}-2\right).$

928. $f\colon y=\sqrt{2-\frac{x-3}{x-2}}+\log_4(9x-x^3).$

929. Dla jakich wartości parametru a dziedziną funkcji $f\colon y=\log[(2a+1)x^2+3x-a]$ jest zbiór liczb rzeczywistych?

930. Udowodnij, że funkcja $f\colon y=x\log\frac{x+2}{x-2}$ jest funkcją parzystą.

931. Udowodnij, że funkcja $f\colon y=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ jest funkcją nieparzystą.

W zadaniach 932—944 narysuj wykres funkcji f.

932. $f\colon y=\log_2(-x).$

933. $f\colon y=\log_2\frac{1}{x}.$

934. $f\colon y=\log_2(x+3).$

935. $f\colon y=|\log_2 x|.$

936. $f\colon y=\log_2|x|.$

937. $f\colon y=\log_2(2x).$

938. $f\colon y=2^{\log_2(9-x^2)}.$

939. $f\colon y=\log_2 x^2.$

940. $f\colon y=\dfrac{\log_2 x^2}{|\log_2 x|}$.

941. $f\colon y=\dfrac{\log_2 x^2}{|\log_2(-x)|}$.

942. $f\colon y=\log_2\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

943. $f\colon y=\left|\log_2\dfrac{x-4}{x^2-16}\right|$.

944. $f\colon y=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}$.

945. Oblicz $\log_{abc}x$ wiedząc, że $\log_a x=2$ i $\log_b x=3$, i $\log_c x=6$.

946. Udowodnij, że jeżeli $a>0$, $b>0$, $b\neq 1$, $c>0$, $c\neq 1$, $\log_b a=m$, $\log_c b=n$, to $\log_{bc}(ab)=\dfrac{n(m+1)}{n+1}$.

947. Udowodnij, że jeżeli $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$ $ab\neq 1$, $x>0$, to

$$\log_{ab}x=\frac{1}{\dfrac{1}{\log_a x}+\dfrac{1}{\log_b x}}.$$

948. Udowodnij, że jeżeli $x>0$, $x\neq 1$, $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, $ab\neq 1$, to

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab}x}=1+\log_a b.$$

949. Udowodnij, że

$$\log_a N\cdot\log_b N+\log_b N\cdot\log_c N+\log_c N\cdot\log_a N=\frac{\log_a N\cdot\log_b N\cdot\log_c N}{\log_{abc}N}$$

gdzie $N>0$, $N\neq 1$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $c>0$, $c\neq 1$, $abc\neq 1$.

950. Udowodnij, że jeżeli $x\in\boldsymbol{R}_+\setminus\{1\}$, to $(\log_2 x)^{-1}+(\log_3 x)^{-1}+\ldots+(\log_{1993}x)^{-1}=(\log_{1993!}x)^{-1}$.

951. Udowodnij, że: $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\ldots\cdot\log_{n+1}n=\log_{n+1}2$ dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 3$.

952. Udowodnij, że jeżeli a, b, $c\in\boldsymbol{R}_+\setminus\{1,\ 8\}$ i $b=8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$, i $c=8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, to $a=8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

953. Udowodnij, że jeżeli $k\in\boldsymbol{R}_+\setminus\{1\}$ i a, $b\in\boldsymbol{R}_+$, i $a^2+b^2=7ab$, to $\log_k\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{1}{2}(\log_k a+\log_k b)$.

954. Udowodnij, że jeżeli podstawę logarytmu i liczbę logarytmowaną podniesiemy do tej samej potęgi różnej od zera, to wartość logarytmu nie ulegnie zmianie.

955. Udowodnij, że $(\log_3 5)^{-1}+(\log_8 5)^{-1}<2$.

956. Udowodnij, że $(\log_2\pi)^{-1}+(\log_\pi 2)^{-1}>2$.

957. Udowodnij, że jeżeli $a>1$ i $c>1$, to $3\log_c a+\log_a c+\log_{a^2}c\geqslant 4$.

958. Udowodnij, że jeżeli $a>1$ i $b>1$, to $\log_a b+\log_b a\geqslant 2$.

959. Udowodnij, że jeżeli a, $b\in(0;\ 1)$ i $\log_{\frac{1}{2}}a\cdot\log_{\frac{1}{2}}b=1$, to $ab\leqslant\dfrac{1}{4}$.

960. Korzystając z funkcji $f\colon y=x+\dfrac{1}{x}$ porównaj liczby $f(\log_5 6)$ i $f(\log_5 4)$.

961. Udowodnij, że $x>0$, $y>0$, $z>0$, $xyz=\dfrac{1}{64}$, to $(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+(\log_{\frac{1}{2}}y)^2+(\log_{\frac{1}{2}}z)^2\geqslant 12$.

962. Udowodnij, że jeżeli x_1, x_2, ... , $x_n\in\boldsymbol{R}_+$ i $x_1\cdot x_2\cdot,\ldots\cdot x_n=a$, i $a\neq 1$, to $(\log_a x_1)^2+(\log_a x_2)^2+\ldots+(\log_a x_n)^2\geqslant\dfrac{1}{n}$.

963. Udowodnij, że jeżeli ciąg $(a,\ b,\ c)$ jest ciągiem geometrycznym i a, b, $c\in\boldsymbol{R}_+$, to ciąg $(\log a,\ \log b,\ \log c)$ jest ciągiem arytmetycznym.

964. Udowodnij, że jeżeli a, b, $c\in\boldsymbol{R}_+\setminus\{1\}$ i $x\in\boldsymbol{R}_+$, i ciąg $(\log_a x,\ \log_b x,\ \log_c x)$ jest ciągiem geometrycznym, to $\log_a b=\log_b c$.

965. Wiedząc, że dla ciągu (x_n) o wyrazach dodatnich prawdziwe są warunki: $\log_2 x_1=-2$ i dla $n\geqslant 2$, $\log_2 x_n-\log_2 x_{n-1}=-2$, oblicz $x_1+x_2+\ldots+x_n$.

966. Udowodnij, że jeżeli x, k, m, $n\in\boldsymbol{R}_+\setminus\{1\}$, to ciąg $(\log_k x,\ \log_m x,\ \log_n x)$ jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy $n^2=(kn)^{\log_k m}$.

967. Udowodnij, że funkcja $f\colon d(x,y)=\log_2(1+|x-y|)$ metryzuje zbiór liczb rzeczywistych.

W zadaniach 968—990 rozwiąż równanie z niewiadomą x.

968. $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

969. $\left(\frac{4}{9}\right)^x\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$.

970. $6^x\cdot 8^x=4\cdot 3^x$.

971. $2^{3x}\cdot 7^{x-2}=4^{x+1}$.

972. $\sqrt{2^x\cdot\sqrt[3]{4^x\cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}}=4\sqrt[3]{2}$.

973. $5^{2+4+\ldots+2x}=0{,}04^{-28}$, $x\in N$.

974. $2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^x=38^{8-x}$, $x\in N$.

975. $2^{2x}+4^x=5^{x+0{,}5}$.

976. $2^{3x}\cdot 5^{x-2}=4^{x+1}$.

977. $7^{x+2}+2\cdot 7^{x-1}=345$.

978. $2\cdot 3^{x+1}-9\cdot 3^{x-1}=6$.

979. $3^{x+1}+9^x=108$.

980. $3^{2x-1}+3^{x+1}=12$.

981. $2^{4x+1}-4^{2x}-16^{x-1}=15$.

982. $5^x+5^{3-x}=30$.

983. $20\cdot 3^{x+2}-8\cdot 5^{x+1}=43\cdot 5^{x-1}-5\cdot 3^{x+2}$.

984. $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$.

985. $2\cdot 4^x-6^x=9^x$.

986. $3\cdot 4^x-7\cdot 10^x+2\cdot 25^x=0$.

987. $2^{\sqrt{x}}=\sqrt{16^{\sqrt{x}}}-2$.

988. $3^{2-\sqrt{x}}=\sqrt{9^{2-2\sqrt{x}}}+2$.

989. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$.

990. $2^{|x+1|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1$.

991. Wykaż, że jedynym rozwiązaniem równania $2^x+3^x+4^x=29$ jest liczba 2.

992. Wykaż, że jedynym rozwiązaniem równania $3^x+4^x+5^x=6^x$ jest liczba 3.

993. Znajdź liczbę całkowitą p, dla której równanie $3^{2x}-4\cdot 3^x+p=0$ ma dwa rozwiązania całkowite.

W zadaniach 994—1018 rozwiąż nierówność z niewiadomą x.

994. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}>\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^x$.

995. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7x+8}\leqslant\frac{1}{4}$.

996. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-x}{x+1}}\leqslant\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$.

997. $3^{\sqrt{x^2-4x}}<9^{\frac{x}{2}}$

998. $-5<3^{4-x^2}<1$.

999. $0{,}125\cdot 4^{x^2+3}\leqslant\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-2x^2}$.

1000. $\left(\sqrt[4]{2}\right)^{-x^3}\geqslant\frac{1}{(\sqrt{2})^{3x}}$.

1001. $(0{,}5)^{x^3}\cdot 4^{x-2}\geqslant\frac{1}{16}$.

1002. $3^{-x^3}\cdot 9<\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{6x-4}$.

1003. $2^{6-|x^2-3x|}\geqslant 4$.

1004. $3^{x+1}-3^{x-1}\geqslant 24$.

1005. $7^{5x}-7^{5x-1}<6$.

1006. $4^x<2^{x+1}+3$.

1007. $3^{2x+5}\geqslant 3^{x+2}+2$.

1008. $4\cdot 3^{x-1}\leqslant 3^x+4^{x-1}$.

1009. $4^x+2^{x+1}\leqslant 8^x$.

1010. $2^{2x+1}\geqslant 11\cdot 2^x-5$.

1011. $4^x-10\cdot 2^{x-1}<24$.

1012. $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x<5\cdot 6^x$.

1013. $\frac{1}{2^x+3}>\frac{1}{2^{x+2}-1}$.

1014. $8^x+5\cdot 2^x\geqslant 2+4^{x+1}$.

1015. $4^{\sqrt{2-x}}-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2-x}}<0$.

1016. $3^{\frac{1}{x}}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{9x}$.

1017. $\frac{2+a^{2x}}{1-a^x}>-6$, gdzie $0<a<1$.

1018. $8^x>6\cdot 9^{|x-1|}$.

W zadaniach 1019—1054 rozwiąż równanie z niewiadomą x.

1019. $\log_2 x+\log_2(2x-3)=1$.

1020. $\log_2(5-3x)-\log_2(x+1)=1$.

1021. $\log_2|3x-2|-\log_2|2x-3|=1$.

1022. $\log_x(2+x)=2+\log_x(4-x^2)$.

1023. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-\log_6 x}=\frac{1}{27}$.

1024. $2^{\log_{x-1}(x^2-5x+10)}=4$.

1025. $\frac{\log(2x)}{\log(4x-15)}=2$.

1026. $\log(\log x)+\log(\log x^2-1)=1$.

1027. $\dfrac{2}{\log x}-\dfrac{1}{1-\log x}=2.$

1028. $x^{\log x}=100x.$

1029. $\log_4[2\log_3(1+\log_2 x)]=\dfrac{1}{2}.$

1030. $\log_2[\log_3(\log_4 x)]=0.$

1031. $x^{2\log_x 10}=10x.$

1032. $\log_2(2^x+4^x)=3+\log_2\left(2^{2x-1}-\dfrac{1}{4}\right).$

1033. $\log_2(9-2^x)=3-x.$

1034. $x+\log(1+2^x)=x\log 5+\log 6.$

1035. $2x^{\log x}+3x^{-\log x}=5.$

1036. $\sqrt{5\log_2(-x)}=\log_2\sqrt{x^2}.$

1037. $\log_x[\log_2(4^x-6)]=1.$

1038. $\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(3^{x+1}-3)=6.$

1039. $\log_{16x}x^3+\log_{\frac{x}{2}}\sqrt{x}=2.$

1040. $\log_{100}x-\log\dfrac{x}{x-1}=\log\dfrac{\sqrt{x}}{2}.$

1041. $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1.$

1042. $\log_3 x\cdot\log_2 x=\log_3 2.$

1043. $\log_2(\log_3 x^2)-\log_2[\log_3(1-x)]=1.$

1044. $\log^2(4-x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}.$

1045. $\log(x-4)\cdot\sqrt{x-14}=\sqrt{x-14}.$

1046. $\log_{\frac{1}{x}}\dfrac{2}{x}=\left(\log_x\dfrac{x}{2}\right)^3.$

1047. $\dfrac{1}{\log_x 10\cdot\log x}=|2-x|.$

1048. $\log\left(\dfrac{|x|}{x}+x\right)=1.$

1049. $\dfrac{\log_2^2 x}{\log_2 x+2}=\dfrac{|x|}{x}.$

1050. $x^{\log^2 x}=\dfrac{x^{10}}{10^{9\log_x 10}}.$

1051. $|x-10|\cdot\log_2(x-3)=2x-20.$

1052. $\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x=1.$

1053. $x^{\log_2(x-2)+\log_2(x-3)}=\dfrac{1}{x}.$

1054. $x^x=(7x)^{7x}.$

W zadaniach 1055—1100 rozwiąż nierówność z niewiadomą x.

1055. $\dfrac{\log_3^2|x|+4}{\sqrt{x+4}-x+2}>0.$

1056. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-8x)\geqslant -2.$

1057. $\log_{\frac{1}{4}}|x-3|<-2.$

1058. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2)>2.$

1059. $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2-5)]\geqslant 0.$

1060. $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)>1.$

1061. $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)]>0.$

1062. $\log_{0,3}\left(\log_5\dfrac{x^2-4}{x+4}\right)\leqslant 0.$

1063. $3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7)}<1.$

1064. $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)<2.$

1065. $\log_3(2x-1)+\log_3(x+2)\geqslant 2.$

1066. $\log_3(7-2x)-\log_3(x+2)\geqslant 2.$

1067. $\log_2(5x-x^2)-\log_2(x+1)<1.$

1068. $\log_2(x^2-5)-\log_2(x-1)\leqslant 1.$

1069. $2\log_2(2x-3)-2\geqslant\log_2(x^2-4x).$

1070. $\log(x^2-9)\geqslant 2+\log(4-x^2).$

1071. $\log_3^2 x\geqslant 4.$

1072. $\log_{\frac{1}{2}}^2 x\leqslant 1.$

1073. $\log_{\frac{1}{2}}^2 x<6+\log_{\frac{1}{2}}x.$

1074. $\log_{\frac{1}{2}}^2 x+\log_{\frac{1}{2}}(2x)<1.$

1075. $\dfrac{1}{\log x}+\dfrac{1}{1-\log x}>1.$

1076. $|3-\log_{\frac{1}{2}}x|<1.$

1077. $\left|\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+2}{x}\right|>1.$

1078. $\dfrac{\log(x^2-1)}{\log(x-1)}<1.$

1079. $3\sqrt{\log x}+2\log\sqrt{\dfrac{1}{x}}\leqslant 2.$

1080. $5^{\log x}-3^{\log x-1}<3^{\log x+1}-5^{\log x-1}.$

1081. $x^{\log_3 x}+x^{2\log_3 x}>12.$

1082. $\log_{2x-3}x<1.$

1083. $\log_{2x}(2-5x)>0.$

1084. $\log_x(1-6x^2)\geqslant 1.$

1085. $\log_x\dfrac{2x-1}{x-1}>1.$

1086. $\log_{x^2}(x+2)\leqslant 1.$

1087. $\log_x(\sqrt{x}-1)<1.$

1088. $\log_{2x}(x^2-5x+6)>1.$

1089. $\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4)>1.$

1090. $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(4^{x+1}-16^x)\geqslant -8x.$

1091. $\log_{\frac{2}{3}}\left(4^{x^2+4x}+2^{x^2+4x-1}-\frac{1}{2}\right)>0.$

1092. $\log(9^x+1)\leqslant 1-\log 3+x\log 3.$

1093. $|1+\log_x 4|\leqslant 3.$

1094. $\log_2(x+1)+\log_{x+1}2\geqslant\frac{5}{2}.$

1095. $x^{2+\log_2^2 x-\log_2 x^2}-\frac{1}{x}>0.$

1096. $|x+\log x|<|x|+|\log x|.$

1097. $\sqrt{2-\log x}\geqslant\log x.$

1098. $x^{\frac{3}{4}x}<\left(\sqrt{x}\right)^{x^2-x+1}.$

1099. $|x|^{x^2-x-2}<1.$

1100. $(x^2+x+1)^x<1.$

W zadaniach 1101—1116 wyznacz dziedzinę funkcji f.

1101. $f\colon y=\sqrt{4^{\frac{x+1}{x}}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4}.$

1102. $f\colon y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{x^2-1}}.$

1103. $f\colon y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1}.$

1104. $f\colon y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(4-x)+1}.$

1105. $f\colon y=\sqrt{\log_3(x-2)+1}.$

1106. $f\colon y=x-\sqrt{\log_3|x-2|}.$

1107. $f\colon y=\frac{1}{\log(x^2+2x+2)}+\sqrt{3-x^2}.$

1108. $f\colon y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(5-3x)}.$

1109. $f\colon y=\sqrt{1-\log_{\frac{1}{3}}^2(3x)}.$

1110. $f\colon y=\frac{\sqrt{3+\log_{\frac{1}{2}}x}}{4-x^2}.$

1111. $f\colon y=\frac{\sqrt{\log(9-x^2)}}{2^x-1}.$

1112. $f\colon y=\log_{\frac{1}{2}}\left[1-\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+6\right)\right].$

1113. $f\colon y=\sqrt{\log_x(3-x)}.$

1114. $f\colon y=\log_2[2-\log_x(x^2-3x+6)].$

1115. $f\colon y=\sqrt{1-\log_{x-3}\frac{x-2}{x-4}}.$

1116. $f\colon y=\log[19-\log^2(10x)-\log x].$

W zadaniach 1117—1123 rozwiąż układ równań z niewiadomymi x, y.

1117. $2^x+2^y=12$ i $x+y=5.$

1118. $4^x+4^y=20$ i $2^{x+y}=8.$

1119. $x+y=6$ i $y^{3x+2y-1}=1.$

1120. $\log x+\log y=2$ i $x^2+y^2=641.$

1121. $\log_x 8=y+1$ i $x^y=6-x.$

1122. $\log(x^2+y^2)-1=\log 13$ i $\log(x+y)-\log(x-y)=3\log 2.$

1123. $9^{-1}\cdot 9^{\frac{x}{y}}-27\cdot 27^{\frac{y}{x}}=0$ i $\log(x-1)-\log(1-y)=0.$

1124. Wyznacz $A\cap B$ jeśli $A=\{x\in\boldsymbol{R}\colon \log_2(1-x)\leqslant 3\}$ i $B=\{x\in\boldsymbol{R}\colon |x-2|\leqslant 6\}.$

1125. Wyznacz $A\setminus B$ jeśli $A=\{x\in\boldsymbol{R}\colon \bigvee_{s\in\boldsymbol{R}} s^2-xs+x\leqslant 0\}$ i

$B=\{x\in\boldsymbol{R}\colon |2-\log x|<3.$

1126. Wyznacz $A\cap B$ jeśli $A=\left\{x\in\boldsymbol{R}\colon \sqrt{(2x-1)^2}<2\right\}$ i $B=\{x\in\boldsymbol{R}\colon \log_{\frac{1}{2}}x\leqslant\log_{\frac{1}{2}}(2-x)\}.$

1127. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{2^x+2^{-x}-1}\leqslant 1.$

1128. Jaki warunek muszą spełniać liczby rzeczywiste a i b różne od zera, aby wykresy funkcji $y=a2^x+b$ i $y=b2^{-x}+a$ miały dokładnie jeden punkt wspólny?

1129. Zbadaj, dla jakich wartości parametru a równanie $(4-\sqrt{15})^x+(4+\sqrt{15})^x=a$ ma dwa różne rozwiązania.

1130. Dla jakich rzeczywistych x ciąg $(1,\ \log_2(2^x-1),\ \log_2(2^x+3))$ jest ciągiem arytmetycznym? Wyznacz różnicę tego ciągu.

1131. Dla jakich wartości parametru a równanie $x^2-(2^a-1)x=3(4^{a-1}-2^{a-2})$ ma dwa rozwiązania różnych znaków?

1132. Dla jakich wartości parametru a nierówność $x^2-2^{a+2}x-2^{a+3}+12>0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej?

1133. Dla jakich wartości parametru m iloczyn kwadratów rozwiązań równania $(2^m-1)x^2-(2^m-1)x+5-2^{m+1}=0$ jest równy sumie tych rozwiązań?

1134. Dla jakich rzeczywistych x wartości funkcji f: $y=(2^x+2^{-x})^{-1}$ należą do przedziału $\left(-1; \frac{2}{5}\right\rangle$?

1135. Wyznacz największą liczbę x, dla której prawdziwe jest równanie $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}-\left(\frac{3}{4}\right)^{y-x}=\frac{7}{12}$ i nierówność $xy+y\leqslant 9$.

1136. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji f: $y=\log_2(x+14)$ i g: $y=6-\log_2(x+2)$.

1137. Dla jakich wartości parametru m wielomian $W(x)=x^4\log^2 m-3x^3\log m-6x^2-2\log m$ jest podzielny przez dwumian $x+1$?

1138. Dla jakich wartości parametru k równanie $\log(kx)=2\log(x+1)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?

1139. Przeprowadź dyskusję równania $\frac{\log(mx)}{\log(x+1)}=2$ z parametrem m ze względu na liczbę rozwiązań.

1140. Dla jakich wartości parametru a suma kwadratów wszystkich rozwiązań równania $2\log_a|x-1|-\log_a x=1$ jest równa 34?

1141. Liczby $\log_2(x-4)$, $\log_2(2x)$, $\log_2 x^2$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznacz różnicę tego ciągu.

1142. Suma trzech pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego rosnącego jest równa 62, suma ich logarytmów dziesiętnych jest równa 3. Wyznacz iloraz i pierwszy wyraz tego ciągu.

1143. Oblicz piąty wyraz ciągu arytmetycznego $(\log_2 x_1, \log_2 x_2, \log_2 x_3, \ldots)$ wiedząc, że $x_1+x_2+x_3=\frac{7}{8}$ i $x_3=\frac{1}{2}$.

1144. Rozwiąż nierówność $\log_a(x^2-3x)>\log_a(4x-x^2)$ z niewiadomą x wiedząc, że liczba $3\frac{3}{4}$ należy do zbioru rozwiązań tej nierówności.

W zadaniach 1145—1148 rozwiąż nierówność z niewiadomą x wiedząc, że $f(x)=\log_3 x$.

1145. $f(x^2)<2$.

1146. $f^2(x)\geqslant 4$.

1147. $f[f(x)]>1$.

1148. $f^2(x)-f(x)<2$.

1149. Funkcje f i g określone są wzorami $f(x)=x+x^{-1}$ i $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-16)$. Dla jakich rzeczywistych x prawdziwa jest nierówność $f[g(x)]\leqslant g(5)$?

1150. Dla jakich wartości parametru a nierówność $x^2\geqslant(x-1)\log_{\frac{1}{2}}a$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej?

1151. Dla jakich wartości parametru m równanie $(1-2\log_{\frac{1}{2}}m)x^2+2x-\log_{\frac{1}{2}}m=0$ ma dwa różne rozwiązania?

1152. Dla jakich wartości parametru a równanie $x^2-(2+\log_2 a)x+(1-\log_2^2 a)=0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie?

1153. Dla jakich wartości parametru a równanie $\log_2 x+\log_2(x-a)=\log_2(3x-4)$ ma dwa różne rozwiązania?

1154. Dla jakich wartości parametru a równanie $(x-1)^2=2x\log a+\log^2 a$ nie ma rozwiązań rzeczywistych?

1155. Dla jakich wartości parametru t równanie $\frac{\log(-x)+\log t}{\log(3-x)}=2$ ma dokładnie jedno rozwiązanie? Podaj to rozwiązanie.

1156. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2+2x-\log_3 m=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste, których suma odwrotności jest mniejsza od 1?

1157. Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów rozwiązań równania $x\log m=3x^2+1$ jest równa 1?

1158. Dla jakich wartości parametru a równanie
$\log_2(x+3)-2\log_4 x=a$ ma rozwiązanie należące do przedziału $\langle 3;4)$?

1159. Oblicz sumę tych wszystkich liczb naturalnych n podzielnych przez 3, dla których prawdziwa jest nierówność
$\log_2(2n)+\log_4(4n)+\log_8(8n)<14$.

1160. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań $x\log m+2y=1+\log m$ i $2x-4y=5$ jest para liczb rzeczywistych o tych samych znakach?

W zadaniach 1161—1163 naszkicuj zbiór punktów płaszczyzny o współrzędnych x, y dla których prawdziwe jest równanie.

1161. $\log\frac{xy}{10}=\log x\cdot\log y$.

1162. $\log x+\log y=\log(x+y)$.

1163. $1+\log_x y=\log_x(xy)$.

W zadaniach 1164—1166 naszkicuj zbiór punktów płaszczyzny o współrzędnych x,y, dla których prawdziwa jest nierówność.

1164. $\log_{\frac{1}{2}}(x+y)>1$.

1165. $\log_{x-y}(x+y)\leqslant 1$.

1166. $\log_x(\log_y x)>0$.

1167. Naszkicuj zbiór punktów płaszczyzny o współrzędnych x, y, dla których prawdziwy jest układ nierówności: $0<y<1$ i
$\log_y(x^2-2x)>1+\log_y{}^2$.

§ 10. Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne. Równania i nierówności trygonometryczne

W zadaniach 1168—1200 oblicz.

√ **1168.** $\sin^2 25°+\sin^2 65°$.

1169. $\sin\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$.

1170. $2\sin(-510°)\cdot\cos(-780°)+\mathrm{tg}(-1°)\cdot\mathrm{tg}\,89°$.

1171. $3\,\mathrm{tg}41°\cdot\mathrm{tg}43°\cdot\mathrm{tg}45°\cdot\mathrm{tg}47°\cdot\mathrm{tg}49°$.

1172. $3-\mathrm{tg}18°\cdot\mathrm{tg}288°+\sin 32°\cdot\sin 148°-\sin 302°\cdot\sin 122°$.

1173. $\frac{\sin 870°+\cos(-1050°)+\mathrm{tg}(-405°)}{\sqrt{12}-2}$.

1174. $\frac{\sqrt{3}\cos(-510°)-\sqrt{2}\sin(-495°)}{\mathrm{tg}^2 870°}$.

1175. $\log_{\sqrt[3]{4}}\sin 135°-\log_5\mathrm{tg}765°$.

1176. $\log\mathrm{tg}2°+\log\mathrm{tg}4°+\log\mathrm{ctg}2°+\log\mathrm{ctg}4°$.

1177. $\sin 75°$.

1178. $\mathrm{tg}15°$.

cos(27°+18°

1179. $\cos 27°\cdot\cos 18°-\sin 27°\cdot\sin 18°$.

1180. $\frac{\sin 52°\cdot\cos 7°-\cos 128°\cdot\cos 97°}{\cos 53°\cdot\cos 7°-\cos 37°\cdot\cos 83°}$.

1181. $\frac{\sin 20°\cdot\cos 10°+\cos 160°\cdot\cos 100°}{\sin 21°\cdot\cos 9°+\cos 159°\cdot\cos 99°}$.

1182. $\frac{\cos 70°\cdot\cos 10°+\cos 80°\cdot\cos 20°}{\cos 69°\cdot\cos 9°+\cos 81°\cdot\cos 21°}$.

1183. $\cos^2 105°-\sin^2 105°$.

1184. $8\sin 555°\cdot\sin 255°$.

1185. $\frac{\sin 600°}{\sin^2 15°-\cos^2 15°}$.

1186. $\cos^2\frac{7\pi}{8}-\cos^2\frac{11\pi}{8}$.

1187. $\mathrm{tg}^2 15°-2\,\mathrm{tg}^2 45°+\mathrm{tg}^2 75°$.

1188. $\mathrm{tg}15°+\mathrm{ctg}15°$.

1189. $8\sin 15°\cdot\sin 45°\cdot\sin 75°$.

1190. $\cos 36°\cdot\cos 72°$.

1191. $8\cos 20°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80°$.

1192. $(\sin 10^\circ)^{-1}-\sqrt{3}(\cos 10^\circ)^{-1}$.

1195. $\mathrm{tg}\,9^\circ-\mathrm{tg}\,27^\circ-\mathrm{tg}\,63^\circ+\mathrm{tg}\,81^\circ$.

1193. $\sin 35^\circ+\sin 25^\circ-\sin 95^\circ$.

1196. $\cos 36^\circ-\cos 72^\circ$.

1194. $\dfrac{1-4\sin 10^\circ\sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}$.

1197. $\cos 24^\circ+\cos 48^\circ-\cos 84^\circ-\cos 12^\circ$.

1198. $\mathrm{tg}\,9^\circ+\mathrm{tg}\,15^\circ-\mathrm{tg}\,27^\circ+\mathrm{ctg}\,9^\circ+\mathrm{ctg}\,15^\circ-\mathrm{ctg}\,27^\circ$.

1199. $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,20^\circ-4\cos 20^\circ$.

1200. $\mathrm{ctg}\,10^\circ\cdot\mathrm{ctg}\,50^\circ\cdot\mathrm{ctg}\,70^\circ$.

W zadaniach 1201—1243 sprawdź tożsamość.

1201. $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

1202. $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^6\alpha=1$.

1203. $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}=\sin^2\alpha$.

1204. $\mathrm{tg}\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

1206. $\mathrm{tg}^6\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

1205. $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2}{\cos\alpha}$.

1207. $\dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\sin^2\alpha-\cos^6\alpha}=\dfrac{2}{3}$.

1208. $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)+1=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$.

1209. $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)}=2$.

1210. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta)$.

1211. $\cos(4\alpha)+8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1$.

1212. $8\cos^4\alpha=3+4\cos(2\alpha)+\cos(4\alpha)$.

1213. $[1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}(2\alpha)]^{-1}=\cos(2\alpha)$.

1214. $\dfrac{\cos^2(2\alpha)-4\cos^2\alpha+3}{\cos^2(2\alpha)+4\cos^2\alpha-1}=\mathrm{tg}^4\alpha$.

1216. $\dfrac{1+\mathrm{co}(4\alpha)}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\dfrac{\sin(4\alpha)}{2}$.

1215. $\dfrac{1+\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=\dfrac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}$.

1217. $\dfrac{\mathrm{ctg}(2\alpha)+\mathrm{tg}(2\alpha)}{1+\mathrm{tg}(2\alpha)\cdot\mathrm{tg}(4\alpha)}=2\,\mathrm{ctg}(4\alpha)$.

1218. $\cos(4\alpha)\cdot\mathrm{tg}(2\alpha)-\sin(4\alpha)=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}$.

***1219.** $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$.

***1222.** $\sin\alpha=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

***1220.** $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$.

***1221.** $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

***1223.** $\cos\alpha=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

1224. $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{2}{\cos\alpha}$.

1225. $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

1226. $\dfrac{2\sin\alpha-\sin(2\alpha)}{2\sin\alpha+\sin(2\alpha)}=\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

1227. $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\mathrm{ctg}\alpha=\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

***1228.** $\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

***1229.** $\cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

1230. $1+\cos(2\alpha)+\cos(4\alpha)+\cos(6\alpha)=4\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos(3\alpha)$.

1231. $\sin(2\alpha)+\sin(4\alpha)-\sin(6\alpha)=4\sin\alpha\cdot\sin(2\alpha)\cdot\sin(3\alpha)$.

1232. $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)=0$.

1233. $\sin(250^\circ+\alpha)\cdot\cos(200^\circ-\alpha)-\cos 240^\circ\cdot\cos(220^\circ-2\alpha)=\dfrac{1}{2}$.

1234. $\dfrac{\sin(2\alpha)-\sin(3\alpha)+\sin(4\alpha)}{\cos(2\alpha)-\cos(3\alpha)+\cos(4\alpha)}=\mathrm{tg}(3\alpha)$.

1235. $\dfrac{\sin(2\alpha)-\sin(3\alpha)+\sin(5\alpha)}{1+\cos\alpha-2\sin^2(2\alpha)}=2\sin\alpha$.

*1236. $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.

*1237. $\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$.

*1238. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$.

*1239. $\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.

1240. $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$.

1241. $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)=4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$.

1242. $\sin^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-\sin^2(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=\sin(2\alpha+2\gamma)\cdot\sin(2\beta+2\delta)$.

1243. $\operatorname{tg}(3\alpha)-\operatorname{tg}(2\alpha)-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(2\alpha)\cdot\operatorname{tg}(3\alpha)$.

1244. Sprawdź tożsamość $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$ i oblicz z jej pomocą $\operatorname{tg}75°$.

1245. Korzystając z równości $\sin 36°=\cos 54°$ i tożsamości $\cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, oblicz $\sin 18°$.

W zadaniach 1246—1257 wykaż, że prawdziwa jest równość.

1246. $\frac{2\sin 6°+\sin 12°}{2\sin 6°-\sin 12°}=\operatorname{ctg}^2 3°$.

1247. $\frac{1+\sin 8°-\cos 8°}{1+\sin 8°+\cos 8°}=\operatorname{tg}4°$.

1248. $\operatorname{tg}37°30'=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$.

1249. $\sin 70°-\cos 40°=\sin 10°$.

1250. $\frac{\cos 1°-\cos 3°}{\sin 3°-\sin 1°}=\operatorname{tg}2°$.

1251. $\frac{\sin 2°+\sin 4°+\sin 6°+\sin 8°}{\cos 2°+\cos 4°+\cos 6°+\cos 8°}=\operatorname{tg}5°$.

1252. $\sin 87°-\sin 59°-\sin 93°+\sin 61°=\sin 1°$.

1253. $\sin 47°+\sin 61°-\sin 11°-\sin 25°=\cos 7°$.

1254. $\cos^2 10°-\cos^2 50°-\cos^2 70°=2\cos 50°\cdot\cos 70°$.

1255. $\sin\frac{\pi}{14}+2\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}=1$.

1256. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

1257. $\log\operatorname{tg}1°+\log\operatorname{tg}2°+\ldots+\log\operatorname{tg}89°=$
$=\log\operatorname{tg}1°\cdot\log\operatorname{tg}2°\cdot\ldots\cdot\log\operatorname{tg}89°$.

1258. Wykaż, że jeżeli $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$, to $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha=2$.

1259. Wykaż, że jeżeli $x=r\sin\alpha\cdot\cos\beta$ i $y=r\sin\alpha\cdot\sin\beta$ i $z=r\cos\alpha$, to $x^2+y^2+z^2=r^2$.

1260. Wykaż, że jeżeli $270°<\alpha<360°$, to $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=2\operatorname{tg}\alpha$.

1261. Wykaż, że jeżeli $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} \sin^n x+\cos^n x=1$, to $n=2$.

1262. Wykaż, że jeżeli $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} a\sin(2x)+b\sin(3x)+c\sin(4x)=0$,
to $a=b=c=0$.

1263. Wykaż, że jeżeli $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$, to $\alpha+\beta+\gamma=k\cdot 180°$, gdzie $k\in\mathbf{C}$.

1264. Wykaż, że jeżeli $\alpha+\beta+\gamma=180°$ i $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\neq 0$, to $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.

1265. Wykaż, że jeżeli $\alpha+\beta+\gamma=90°$ i $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\neq 0$, to $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma$.

1266. Wykaż, że jeżeli $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\neq 0$ i $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, to $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma=1$.

1267. Wykaż, że jeżeli $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(2\alpha)=\operatorname{tg}(3\alpha)$, to $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(2\alpha)\cdot\operatorname{tg}(3\alpha)=0$.

1268. Wykaż, że jeżeli dla liczb rzeczywistych a, x, y, z prawdziwa jest równość $\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=a$, to $\cos(y+z)+\cos(x+z)+\cos(x+y)=a$.

1269. Wykaż, że jeżeli x, $y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ i $\operatorname{tg} x = \frac{1}{4}$, i $\sin y = \frac{1}{\sqrt{10}}$, to $x + 2y = \frac{\pi}{4}$.

1270. Wykaż, że jeżeli $x \neq k\frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in C$, to $\frac{\sin(3x)}{\sin x} - \frac{\cos(3x)}{\cos x} = 2$.

1271. Wykaż, że jeżeli $90° < \alpha < 180°$, to $\frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

1272. Wykaż, że jeżeli $\operatorname{ctg}\alpha = 3$ i $\operatorname{ctg}\beta = 7$, to $\sin(4\alpha) = \cos(2\beta)$.

1273. Wykaż, że jeżeli $\sin^{-2}\alpha + \cos^{-2}\alpha + \operatorname{tg}^{-2}\alpha + \operatorname{ctg}^{-2}\alpha = 7$,
to $\sin^2(2\alpha) = \frac{8}{9}$.

1274. Wykaż, że jeżeli $3\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$ i $\cos\alpha \neq 0$ i $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$, to $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{tg}\alpha$.

1275. Wykaż, że jeżeli $x \in \boldsymbol{R}$ i $n \in \boldsymbol{N}$ i $\sin\frac{x}{2^n} \neq 0$, to

$$\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin\frac{x}{2^n}}.$$

1276. Wykaż, że jeżeli $x \in \boldsymbol{R}$ i $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, to dla dowolnego n naturalnego prawdziwa jest równość

$$\sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx) = \frac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

1277. Wykaż, że jeżeli $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1$, to $\sin(2\alpha) = \sin(2\beta)$.

1278. Wykaż, że jeżeli $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, to $18\sin\frac{3\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{3} = 7$.

1279. Wykaż, że jeżeli $\sin\alpha - \cos\alpha = a$, to

$$\frac{\sin(10\alpha) + \sin(4\alpha) - \sin(6\alpha)}{1 + \cos(2\alpha) - 2\sin^2(4\alpha)} = 2 - 2a^2.$$

1280. Wykaż, że jeżeli $\operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} y$, to $\sin(x+y) = 3\sin(x-y)$.

1281. Wykaż, że jeżeli $\sin\alpha + \sin\beta = a$ i $\cos\alpha + \cos\beta = b$ i $a^2 + b^2 > 0$, to $\sin(\alpha+\beta) = \frac{ab}{a^2+b^2}$.

1282. Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, to
$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$.

1283. Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ i $\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \neq 0$, to

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

1284. Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, to
$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$.

1285. Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, to
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$.

1286. Wykaż, że jeżeli $x \in \boldsymbol{R}$ i $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, to dla dowolnego naturalnego n prawdziwa jest równość

$$\sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

1287. Wykaż, że jeżeli $x \in \boldsymbol{R}$ i $\sin x \neq 0$, to dla dowolnego naturalnego n prawdziwa jest równość

$$\cos x + \cos(3x) + \ldots + \cos[(2n-1)x] = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x}.$$

1288. Oblicz $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, wiedząc, że $\sin\alpha = -0{,}6$ i $180° < \alpha < 270°$.

1289. Oblicz $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ wiedząc, że $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ i $90° < \alpha < 180°$.

1290. Oblicz $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ wiedząc, że
$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ i $270° < \alpha < 360°$.

1291. Oblicz $\frac{3\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = -7$.

1292. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$ wiedząc, że $3\sin\alpha = 2(1-\cos\alpha)$.

1293. Oblicz $\operatorname{tg}^8\alpha + \operatorname{ctg}^8\alpha$ wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{5}$.

1294. Oblicz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

1295. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$ wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

1296. Oblicz $\sin\alpha - \cos\alpha$ wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

1297. Oblicz $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

1298. Oblicz $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

1299. Oblicz $\sin(\alpha + 30^\circ)$ wiedząc, że $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

1300. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$ wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 3$ i $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -3$.

1301. Oblicz $\sin(x-y)$ wiedząc, że $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin y = \frac{1}{2}$ i $x, y \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

1302. Oblicz $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$ wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{5}$ i $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{8}$.

1303. Oblicz $\alpha + \beta$ wiedząc, że $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta) = 2$.

1304. Suma trzech liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z jest równa $\frac{\pi}{2}$. Oblicz $\operatorname{ctg}x \cdot \operatorname{ctg}z$ wiedząc, że ciąg $(\operatorname{ctg}x, \operatorname{ctg}y, \operatorname{ctg}z)$ jest ciągiem arytmetycznym.

1305. Znajdź liczbę rzeczywistą x wiedząc, że $3^x = \operatorname{tg}\alpha$ i $3^{-x} = \operatorname{tg}\beta$, i $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$.

1306. Oblicz $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$ wiedząc, że $\cos\alpha = -0{,}8$ i $\alpha = \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

1307. Oblicz $\cos(2\alpha)$ wiedząc, że $\frac{6\sin\alpha + 5\cos\alpha}{4\sin\alpha + \cos\alpha} = 2$.

1308. Oblicz $\frac{2\sin(2\alpha) - 3\cos(2\alpha)}{4\sin(2\alpha) + 5\cos(2\alpha)}$ wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

1309. Oblicz $\sin\alpha$ wiedząc, że $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right) = \frac{1}{3}$.

1310. Oblicz $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}2$.

1311. Porównaj liczby: $\operatorname{tg} 27^\circ$ i $\cos 27^\circ$.

1312. Wykaż, że nierówność $4 + 4\sin x \geqslant \cos^2 x$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

1313. Wykaż, że dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ prawdziwa jest nierówność $|\sin^3 x + \cos^3 x| \leqslant \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

1314. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^{-1} \leqslant 1$.

1315. Wykaż, że $\bigwedge\limits_{x,y \in \boldsymbol{R}} x^2 - 4x\cos(xy) + 4 \geqslant 0$.

1316. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $\sin^2 x + \sin^2 y \geqslant \sin x \cdot \sin y + \sin x + \sin y - 1$.

1317. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$.

1318. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x \leqslant \frac{1}{4}$.

1319. Wykaż, że nierówność $-\frac{3}{2} < \sin x + \cos x < \frac{3}{2}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

1320. Wykaż, że jeżeli $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, to $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha < 1$.

1321. Wykaż, że jeżeli $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, to $\operatorname{tg}\alpha > \sin\alpha$.

1322. Wykaż, że jeżeli $x \neq k\frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in \boldsymbol{C}$, to $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \geqslant 2$.

1323. Wykaż, że jeżeli $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\neq 0$ i $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, to $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma\geqslant 1$.

1324. Wykaż, że jeżeli $0<x<\frac{\pi}{2}$, to $\mathrm{ctg}\frac{x}{2}>1+\mathrm{ctg}\,x$.

1325. Wykaż, że jeżeli $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, to $\mathrm{tg}(2\alpha)>2\,\mathrm{tg}\alpha$.

1326. Wykaż, że jeżeli $x\in \boldsymbol{R}$ i $\sin x\neq 0$ i $\cos\neq 0$, to $\sin^{-4}x+\cos^{-4}x\geqslant 8$.

1327. Wykaż, że jeżeli $x\in\boldsymbol{R}$ i $x\neq k\frac{\pi}{2}$, gdzie $k\in\boldsymbol{C}$, to $|\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x|>|\sin x+\cos x|$.

1328. Wykaż, że jeżeli $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, to $\sin(\alpha+\beta+\gamma)<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$.

W zadaniach 1329—1352 naszkicuj wykres funkcji f w przedziale $\langle-2\pi;2\pi\rangle$.

1329. f: $y=-\sin x$.

1330. f: $y=\sin x+3$.

1331. f: $y=\sin x-3$.

1332. f: $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

1333. f: $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

1334. f: $y=2\sin x$.

1335. f: $y=\frac{1}{2}\sin x$.

1336. f: $y=\sin(2x)$.

1337. f: $y=\sin\frac{x}{2}$.

1338. f: $y=|\sin x|$.

1339. f: $y=\sin|x|$.

1340. f: $y=|\sin x|-2$.

1341. f: $y=\sin x+|\sin x|$.

1342. f: $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}$.

1343. f: $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}x$.

1344. f: $y=\frac{x}{|x|}+\cos\frac{x-|x|}{2}$.

1345. f: $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$.

1346. f: $y=\sin x\cdot\cos x$.

1347. f: $y=\sin^2x-\cos^2x$.

1348. f: $y=|\sin^4x-\cos^4x|$.

1349. f: $y=\cos^2x+\sin x\cdot|\sin x|$.

1350. f: $y=|\mathrm{tg}x|\cdot\cos^2x$.

1351. f: $y=2-3\sin^2x$.

1352. f: $y=\sin x-\cos x$.

1353. Naszkicuj wykres funkcji f: $y=\cos x\cdot\left(1+\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)$.

W zadaniach 1354—1361 podaj zbiór wartości funkcji f.

1354. f: $y=3+\sin(x-2)$.

1355. f: $y=4-\cos(x+5)$.

1356. f: $y=1+2\sin(3x)$.

1357. f: $y=2-3\cos\frac{x}{2}$.

1358. f: $y=5-2\sin^2x$.

1359. f: $y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2(2x)$.

1360. f: $y=4+|\sin(3x)|$.

1361. f: $y=|1-3\sin|x||$.

W zadaniach 1362—1365 wyznacz największą wartość funkcji f.

1362. f: $y=\sin x\cdot\cos^3x-\sin^3x\cdot\cos x$.

1363. f: $y=\dfrac{1+\cos(2x)}{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$.

1364. f: $y=2(\sin^6x+\cos^6x)^{-1}$.

1365. f: $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\ni x\to y=a\sin x+b\cos x$, $a>b$, $b>0$.

1366. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f: $y=\left[\dfrac{\mathrm{ctg}x-\mathrm{tg}x}{1+\cos(4x)}\right]^2$.

W zadaniach 1367—1369 wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f.

1367. f: $y=\sqrt{3}\cos(3x)-\sin(3x)$.

1368. f: $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)$.

1369. f: $y=|3\sin x+3\cos x|$.

1370. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f: $y=\sin^{-2}x+\cos^{-2}x$. Ile jest równa wartość najmniejsza tej funkcji i dla jakich x funkcja ją osiąga?

W zadaniach 1371—1376 wyznacz okres zasadniczy T_o funkcji f.

1371. $f\colon y=\cos(3x-5)$.

1372. $f\colon y=\sin(2\pi x)$.

1373. $f\colon y=\sin x+\cos x$.

1374. $f\colon y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$.

1375. $f\colon y=\sin^2 x$.

1376. $f\colon y=3\sin x+\sin(2x)$.

1377. Wykaż, że jeśli a jest liczbą niewymierną, to funkcja $f\colon y=\cos(ax)+\cos x$ nie jest okresowa.

1378. Wykaż, że funkcja $f\colon y=\sin\sqrt{x}$ nie jest okresowa.

1379. Wykaż, że jeśli $\operatorname{tg}^2 x$ jest liczbą niewymierną, to $\cos^2 x$ jest także liczbą niewymierną.

1380. Określ dziedzinę funkcji $f\colon y=\arcsin\frac{2x}{x-1}$.

W zadaniach 1381—1386 oblicz.

1381. $\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}+2\arccos\frac{1}{2}\right)$.

1382. $\cos\left(7\arcsin\frac{1}{2}+2\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

1383. $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$.

1384. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

1385. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)$.

1386. $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

W zadaniach 1387—1389 wykaż, że jeśli $x\in\langle -1;\, 1\rangle$, to:

1387. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

1388. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

1389. $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

W zadaniach 1390 i 1391 wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest równość.

1390. $\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,ctg}x=\frac{\pi}{2}$.

1391. $\operatorname{arc\,ctg}(-x)=\pi-\operatorname{arc\,ctg}x$.

W zadaniach 1392—1395 wykaż równość.

1392. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

1393. $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}+\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{13}=\frac{\pi}{4}$.

1394. $\arcsin\frac{5}{13}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}$.

1395. $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{32}{43}$.

W zadaniach 1396 i 1397 wykaż, że równość jest prawdziwa dla każdego $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

1396. $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg}x)=\frac{1}{x}$.

1397. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg}x)=\frac{1}{x}$.

W zadaniach 1398 i 1399 wykaż, że równość jest prawdziwa dla każdego $x\in\langle -1;\, 1\rangle$.

1398. $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.

1399. $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

W zadaniach 1400—1403 wykaż, że równość jest prawdziwa dla każdego $x\in\boldsymbol{R}$.

1400. $\sin(\operatorname{arc\,tg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1401. $\cos(\operatorname{arc\,ctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1402. $\sin(\operatorname{arc\,ctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1403. $\cos(\operatorname{ar\,ctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

W zadaniach 1404 i 1405 wykaż, że równość jest prawdziwa dla każdego $x\in(-1;\, 1)$.

1404. $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1405. $\operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

W zadaniach 1406 i 1407 wykaż, że równość jest prawdziwa dla każdego dla $x\in\langle -1;\, 0)\cup(0;\, 1\rangle$.

1406. $\operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1407. $\operatorname{ctg}(\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1408. Wykaż, że dla każdego $x\in\boldsymbol{R}$ prawdziwa jest równość:

$$\sin(2\operatorname{arc\,tg}x)=\frac{2x}{1+x^2}.$$

W zadaniach 1409—1468 rozwiąż równanie z niewiadomą x.

1409. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1410. $\sin x=\frac{2}{3}$.

1411. $\cos(3x)=\frac{1}{2}$.

1412. $\operatorname{tg}(2x)=-1$.

1413. $\cos x=-\frac{1}{2}$.

1414. $\sin x=1$.

1415. $\sin x=0$.

1416. $\sin x=-1$.

1417. $\cos x=1$.

1418. $\cos x=0$.

1419. $\cos x=-1$.

1420. $\cos x+\cos(2x)=2$.

1421. $2\sin x=3\operatorname{ctg}x$.

1422. $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

1423. $3^{\sin^2 x}=2+3^{\cos^2 x}$.

1424. $2^{\cos(2x)}=2^{\cos^2 x}-\frac{1}{2}$.

1425. $2\sin x=3\operatorname{tg}^2 x$.

1426. $\sin^2 x-(\sqrt{3}+1)\sin x\cdot\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$.

1427. $4\sin^2 x-3\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x=2$.

1428. $4\sin^2 x+\sin^2(2x)=3$.

1429. $4(\log_2\cos x)^2+\log_2[1+\cos(2x)]=3$.

1430. $\sin(3x)+\sin x=\cos x$.

1431. $\sin(3x)+\sin x=\cos(3x)+\cos x$.

1432. $\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)=0$.

1433. $\sin x+\sin(3x)+\sin(5x)=0$.

1434. $\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)=\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)$.

1435. $\sin x+\sin(2x)+2\sin(3x)+\sin(4x)+\sin(5x)=0$.

1436. $\sin^2 x+\sin^2(2x)=\sin^2(3x)$.

1437. $\sin^2 x+\sin^2(2x)=\sin^2(3x)+\sin^2(4x)$.

1438. $\cos^2 x+\cos^2(2x)+\cos^2(3x)+\cos^2(4x)=2$.

1439. $\sin\frac{x}{2}+\cos x=1$.

1440. $\frac{1-\sin x}{2\sin x}=\operatorname{ctg}x-\cos x$.

1441. $\frac{\cos x}{1+\sin x}=2-\operatorname{tg}x$.

1442. $\sin x-\cos x=1$.

1443. $|\sin x+\cos x|=\sqrt{2}$.

1444. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$.

1445. $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=4\sin(2x)$.

1446. $\sin^4(2x)-\cos^4(2x)=\sin(4x)$.

1447. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$.

1448. $\sin x+\cos x+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2[\sin(2x)]^{-1}$.

1449. $\sin x+\cos x+\operatorname{tg}x=(\cos x)^{-1}$.

1450. $\sin x+\cos x=\frac{\cos(2x)}{1-\sin(2x)}$.

1451. $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=2-\sqrt{3}$.

1452. $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}(3x)=1$.

1453. $\sin x+\cos x+\sin(2x)=1$.

1454. $2\sin x\cdot\sin(3x)=1$.

1455. $\cos(2x)\cdot\cos x=\cos(5x)\cdot\cos(4x)$.

1456. $\sin x\cdot\sin(2x)\cdot\sin(3x)=\frac{1}{4}\sin(4x)$.

1457. $\sin^3 x+\cos^3 x=1$.

1458. $\sin^8 x+\cos^5 x=1$.

1459. $\sin^8 x+\cos^6 x=1$.

1460. $\sqrt{13-18\operatorname{tg}x}=6\operatorname{tg}x-3$.

1461. $\sqrt{\cos^2 x-\cos(2x)}=1+\sin x$.

1462. $\sin x+\cos x=\sqrt{1+\operatorname{tg}x}$.

1463. $\sin x+\cos x=\sqrt{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}$.

1464. $\sin\left|\frac{\pi x}{2}\right|=1$.

1465. $|\sin(2\pi x^2)|=1$.

1466. $\log_{\cos x}\sin x=1$.

1467. $\sin x+\log(1+2^{\sin x})=\sin x\cdot\log 5+\log 6$.

1468. $\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\sin x=2$.

1469. Oblicz sumę wszystkich rozwiązań rzeczywistych równania $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$ z przedziału $\langle 0;\ 315\rangle$.

W zadaniach 1470 i 1471 rozwiąż równanie z niewiadomą x.

1470. $\cos\left[\sin\left(x\sqrt{2}\right)\right]=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1471. $\sin(\pi \log x)+\cos(\pi \log x)=1$.

1472. Wyznacz największe ujemne rozwiązanie równania $\sin x+\cos x=1$.

W zadaniach 1473—1478 zbadaj, dla jakich rzeczywistych wartości parametru a, równanie ma rozwiązania rzeczywiste.

1473. $\sin(2x)=\frac{2a-3}{4-a}$.

1474. $\cos x+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=a^2-1$.

1475. $\sin(5x)+\cos(5x)=a$.

1476. $\sin^4 x+\cos^4 x=a$.

1477. $\cos(2x)+3\cos x=a$.

1478. $3\sin(2x)-4\cos(2x)=a$.

1479. Dla jakich rzeczywistych i ujemnych wartości parametru a równanie $\sin^2 x+a\sin x=2a^2$ ma rozwiązania rzeczywiste?

W zadaniach 1480 i 1481 wykaż, że podane równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych.

1480. $\sin x=2\sin 48^\circ\cdot\cos 42^\circ$.

1481. $2\sin(3x)=5x^2-2x+3$.

1482. Czy istnieje takie rzeczywiste x i takie rzeczywiste a, że $\cos x=\log a+\frac{1}{\log a}$?

1483. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a nierówność $4^{|\cos x|}+2(2a+1)\cdot 2^{|\cos x|}+4a^2-5<0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej?

1484. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste równania $1+\operatorname{tg}^3 x=a(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x)$ należy do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$?

1485. Rozwiąż równanie $\sin\frac{\pi}{x}=1$ i zbadaj, ile rozwiązań tego równania należy do przedziału $\left(\frac{1}{1000};\frac{1}{500}\right)$.

1486. Wykaż, że równanie $\sin x\cdot\sin(2x)\cdot\sin(3x)=1$ jest sprzeczne.

1487. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y, dla których prawdziwe jest równanie $\cos^2(xy)+2x[1+\cos(xy)]+2x^2=-1$.

1488. Dla jakich $\alpha\in \boldsymbol{R}$ punkt o współrzędnych x, y, które są rozwiązaniem układu równań $x\sin\alpha-y\cos\alpha=1$ i $x\cos\alpha+y\sin\alpha=0$ należy do paraboli o równaniu $y=1-x^2$.

W zadaniach 1489—1495 rozwiąż układ równań z niewiadomymi x, y.

1489. $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=2$ i $\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y=2$.

1490. $x+y=\frac{\pi}{6}$ i $\sin x\cdot\cos y=\frac{3}{4}$.

1491. $x+y=\frac{\pi}{2}$ i $\sin x+\sin y=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

1492. $x-y=\frac{\pi}{6}$ i $\sin x+\cos y=\sqrt{3}$.

1493. $x+y=\frac{\pi}{4}$ i $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=1$.

1494. $\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}$ i $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2$.

1495. $\sin x\cdot\sin y=\frac{3}{4}$ i $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=3$.

1496. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a układ równań $\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{4}$ i $\cos x\cdot\cos y=a$ ma rozwiązania rzeczywiste?

W zadaniach 1497—1503 rozwiąż nierówność z niewiadomą x.

1497. $\sin x<\frac{1}{2}$.

1498. $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1499. $\cos(5x)>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1500. $1\leqslant\operatorname{tg}x\leqslant\sqrt{3}$.

1501. $|\sin x|>|\cos x|$.

1502. $\sin^2 x\leqslant\frac{1}{2}$.

1503. $\operatorname{ctg}^2 x>3$.

W zadaniach 1504—1508 podaj wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności zawarte w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$.

1504. $\log_4 \cos x < -\frac{1}{2}$.

1505. $\log_2 \sin x > \frac{1}{2}$.

1506. $\log_3 \operatorname{tg} x \leqslant \frac{1}{2}$.

1507. $\log_3 \operatorname{ctg} x \leqslant -\frac{1}{2}$.

1508. $2^{\sin x - 1} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1509. Rozwiąż nierówność $\log_2 \cos^2 x \geqslant -2$.

W zadaniach 1510 i 1511 wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x z przedziału $(0; \pi)$ będące rozwiązaniem nierówności.

1510. $\frac{\cos(2x)}{\cos x} \leqslant 1$.

1511. $\frac{\cos(2x) + \cos x - 1}{\cos(2x)} > 2$.

1512. Wyznacz wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności $\frac{\sin x + 2\cos(2x) + \cos x}{\cos(2x)} \geqslant 2$ należące do przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$.

W zadaniach 1513—1523 rozwiąż nierówność z niewiadomą x.

1513. $8^{1+\cos x} > 2^{1-\cos x}$.

1514. $3\sin x \geqslant 2 - \cos(2x)$.

1515. $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 1$.

1516. $\cos x + 2\operatorname{tg} x \leqslant 2 + \sin x$.

1517. $\sin x \leqslant \operatorname{tg} x$.

1518. $\cos(4x) + 2\cos^2 x \geqslant 1$.

1519. $\cos(4x) + 2\cos 2x \geqslant 0$.

1520. $2\sin^2(3x) + \sin^2(6x) < 2$.

1521. $\operatorname{ctg} x < 2 - \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

1522. $2\cos(2x) + \sin(2x) > \operatorname{tg} x$.

1523. $\operatorname{tg} x + \sin(2x) \geqslant 2$.

1524. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$, które są rozwiązaniami nierówności $2^{\sin^2 x} < \sqrt{2^{\frac{3}{4} + \sin^2 x}}$.

W zadaniach 1525—1533 rozwiąż nierówność z niewiadomą x.

1525. $\log_{\frac{1}{2}}[1 + 2\sin x + \cos(2x)] < 1$.

1526. $4(\log_2 \cos x)^2 + \log_2 \cos^2 x < 2$.

1527. $(\log_{\sin x} 2)^2 < \log_{\sin x}(4\sin^3 x)$.

1528. $\log_{\sin x}(13x - x^2 - 42) > \log_{\sin x}(75 - x^2)$.

1529. $5 + 2\cos(2x) \leqslant 3|2\sin x - 1|$.

1530. $|3^{\operatorname{tg}(\pi x)} - 3^{1 - \operatorname{tg}(\pi x)}| \geqslant 2$.

1531. $\cos(\sin x) < 0$.

1532. $\sin(\cos x) < 0$.

1533. $\arcsin(\log x) > 0$.

W zadaniach 1534 i 1535 rozwiąż nierówność z niewiadomą x wiedząc, że f: $y = 2^x$ i g: $y = \sin x$.

1534. $f[g(x)] \geqslant 2$.

1535. $g[f(x)] \geqslant 1$.

W zadaniach 1536—1539 ustal dziedzinę funkcji f.

1536. f: $y = \sqrt{16 - x^2} - 2\log_3 \sin x$.

1537. f: $y = \frac{\log(2\sin x - 1)}{\sqrt{1 - 2\cos^2 \frac{x}{2}}}$.

1538. f: $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(1 - 2\sin x) - \log_{\frac{1}{2}}(1 - 2\cos x)}$.

1539. f: $y = \log\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \log_3 \sin x - \log_3 \cos x}\right)$.

1540. Wykaż, że wykres funkcji f: $y = \log_5 \{[\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}(2x)] \cdot \sin(2x)\}$ zawiera się w osi x.

1541. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru $\alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ funkcja f: $y = x^2 - 2x + \cos(2\alpha) + \sin\alpha + 3$ przyjmuje wartość najmniejszą równą 3?

1542. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ prosta o równaniu $y = -3x$ jest styczna do wykresu funkcji f: $y = x^2 - x - \cos(2\alpha) - \sin\alpha + 2$?

1543. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru $\alpha \in \langle 0; \pi\rangle$ równanie $(2\cos\alpha - 1)x^2 - 2x + \cos\alpha = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste?

1544. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru m równanie $\cos(2x) + \cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) = \log_{\frac{1}{3}}(3m + 5) - \log_{\frac{1}{3}}(10 - m)$ ma rozwiązania rzeczywiste?

1545. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru $\alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ równanie $x^2 \sin\alpha + x + \cos\alpha = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste?

1546. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru α równanie $(2\sin\alpha - 1)4^x - 2^{x+1} + \sin\alpha = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste?

1547. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru $\alpha \in \langle 0; \pi\rangle$ równanie $(1+\cos\alpha)x^2 - (2\sqrt{2}\cos\alpha)x + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste jednakowych znaków?

1548. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru $\alpha \in \langle 0; \pi\rangle$ równanie $4x^2 + 4(\sin\alpha + \cos\alpha)x + 3\sin(2\alpha) = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste różnych znaków?

1549. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru $\alpha \in \langle 0; \pi\rangle$ suma kwadratów rozwiązań rzeczywistych równania
$x^2 - 2x\cos\alpha = \sin^2\alpha$ jest równa 3?

1550. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru $\alpha \in \langle 0; \pi\rangle$ suma odwrotności rozwiązań rzeczywistych równania

$(2\cos\alpha - 1)x^2 - 2x + \cos\alpha = 0$ jest równa $\frac{8}{3}\cos\alpha$?

1551. Znajdź wszystkie rozwiązania rzeczywiste równania

$2 - \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) = 4\cos^2(3x)$ takie, że $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

1552. Naszkicuj zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne x, y spełniają równanie $\sin x + \sin y = \sin(x+y)$.

1553. $A = \{x \in \mathbf{R}\colon \bigvee_{y \in \mathbf{R}} 2 + \cos y > |x|\}$,

$B = \{x \in \mathbf{R}\colon \bigwedge_{y \in \mathbf{R}} 2x - xy + y = 2\}$.

Podaj ilustrację graficzną iloczynów kartezjańskich $A \times B$ i $B \times A$.

1554. $A = \{x \in \mathbf{R}\colon \sqrt{(x-1)^2} \leqslant 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}\colon 2\cos^2 x > \cos x$ i $x \in \langle 0; \pi\rangle\}$. Wyznacz $A \setminus B$.

1555. $A = \{(x, y)\colon x \in \langle 0; 2\pi\rangle$ i $y \in \mathbf{R}$ i $\operatorname{tg}^2 x < 3\}$, $B = \{(x, y)\colon x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$, i $x^2 + y^2 \leqslant 16\}$. W prostokątnym układzie współrzędnych Oxy naszkicuj zbiór $A \cap B$.

Szkice rozwiązań i odpowiedzi

§ 1. Zbiór liczb rzeczywistych

1. $46 - 24\sqrt{15}$.

2. $19 + 18\sqrt{7}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$, $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} + \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} =$

$= \sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{2} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$.

4. $\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{(7+2\sqrt{6})(7-2\sqrt{6})} + 7 - 2\sqrt{6} =$

$= 14 - 2\sqrt{49-24} = 4$.

5. $\frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}} = \frac{7-4\sqrt{3}}{49-48} + \frac{7+4\sqrt{3}}{49-48} = 14$.

6. $\left(\frac{11}{5-\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2 = \left[\frac{11(5+\sqrt{3})}{25-3}\right]^2 - \left[\frac{(5-2\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{4-5}\right]^2 =$

$= \left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 5 = \frac{28+10\sqrt{3}}{4} - 5 = \sqrt{\left(\frac{4+5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+40\sqrt{3}+75}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{91}{4} + 10\sqrt{3}}$.

7. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{2+2\sqrt{6}+3} = \sqrt{5+2\sqrt{6}}$.

8. Wskazówka: Udowodnić równość kwadratów liczb po obu stronach równości.

9. Wskazówka: Udowodnić równość kwadratów liczb po obu stronach równości.

10. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{6\sqrt{3}-10}{6\sqrt{3}+10}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-5}{3\sqrt{3}+5}} = \sqrt[3]{\frac{(3\sqrt{3}-5)\sqrt{3}}{(3\sqrt{3}+5)\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}$.

11. Wskazówka: Udowodnić równość sześcianów liczb po obu stronach równości.

12. $\left(\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}\right)^3=38+17\sqrt{5}$; $\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^3=(9+4\sqrt{5})\sqrt{9+4\sqrt{5}}=$

$=(9+4\sqrt{5})\sqrt{5+4\sqrt{5}+4}=(9+4\sqrt{5})\sqrt{(\sqrt{5}+2)^2}=(9+4\sqrt{5})(\sqrt{5}+2)=$

$38+17\sqrt{5}$.

13. $\frac{2^{350}}{3^{174}}=\frac{2^{174}\cdot 2^{176}}{3^{174}}=2^{176}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{174}>2^{176}\left(\frac{1}{2}\right)^{174}=\frac{2^{176}}{2^{174}}=4>1$. Stąd $2^{350}>3^{174}$.

14. Oznaczmy przez x cyfrę pierwszą i czwartą, przez y cyfrę drugą i piątą oraz przez z cyfrę trzecią i szóstą. Wtedy rozważana liczba jest równa:
$10^5x+10^4y+10^3z+10^2x+10y+z=100\,100x+10\,010y+1001z=$
$=1001(100x+10y+z)=7\cdot 11\cdot 13(100x+10y+z)$.
Stąd rozważana liczba jest podzielna przez 7, 11 i 13.

15. $B=(yzx)=100y+10z+x=10(100x+10y+z)-999x=10A-999x$.
Ponieważ $37|A$ i $37|999$, więc $37|B$. Podobnie pokazujemy, że $37|C$.

16. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną.
Wtedy $3^n+3^{n+1}+3^{n+2}=3^n(1+3+3^2)=13\cdot 3^n$.
Stąd $13|3^n+3^{n+1}+3^{n+2}$.

17. Każdą liczbę naturalną n można przedstawić w postaci:
$n=3k$ lub $n=3k+1$, lub $n=3k+2$, gdzie $k\in N\cup\{0\}$.
Gdy $n=3k$, to $2n^3+n=3(18k^3+k)$, a więc $3|2n^3+n$.
Gdy $n=3k+1$, to $2n^3+n=3(18k^3+18k^2+7k+1)$, a więc $3|2n^3+n$.
Gdy $n=3k+2$, to $2n^3+n=3(18k^3+36k^2+13k+6)$, a więc $3|2n^3+n$.

18. Dla dowolnej liczby naturalnej n, $2|n(n+1)(2n^2+1)$. Wystarczy więc pokazać, że $3|n(2n^2+1)$, czyli $3|2n^3+n$. Z rozwiązania zadania 17 tak jest rzeczywiście.

19. Wskazówka: Pokazać, że dla $n\in N$ liczba $n(n^2+5)$ jest podzielna przez 6.
Ale: $n=6k$ lub $n=6k+1$, lub $n=6k+2$, lub $n=6k+3$, lub $n=6k+4$, lub $n=6k+5$, gdzie $k\in N\cup\{0\}$.

20. Niech $n=2k$, $k\in N\cup\{0\}$.
Wtedy $n(n+2)(2n-1)=2k(2k+2)(4k-1)=4k(k+1)(4k-1)$. Liczba $4k(k+1)$ jest podzielna przez 8. Wystarczy więc pokazać, że $3|k(k+1)(4k-1)$. Dla dowolnego $k\in N\cup\{0\}$: $k=3p$ lub $k=3p+1$, lub $k=3p+2$, gdzie $p\in N\cup\{0\}$. W każdym przypadku łatwo pokazać, że $3|k(k+1)(4k-1)$.

21. $n^3+3n^2+5n+3=n^3+3(n^2+2n+1)-n=n(n^2-1)+3(n+1)^2=$
$=(n-1)n(n+1)+3(n+1)^2$. Stąd oraz z faktu, że $3|(n-1)n(n+1)$ i $3|3(n+1)^2$ wynika, że $3|n^3+3n^2+5n+3$.

22. $n^5-n=n(n^4-1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Ponieważ liczba $n(n-1)(n+1)$ jako iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 6, wystarczy więc pokazać, że $5|n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Dla dowolnej liczby całkowitej n mogą zajść następujące przypadki: $n=5k$ lub $n=5k+1$, lub $n=5k+2$, lub $n=5k+3$, lub $n=5k+4$, gdzie $k\in C$. Nietrudno sprawdzić, że w każdym z tych przypadków, $5|n(n-1)(n+1)(n^2+1)$.

23. $n^3+3n^2-n-3=n^2(n+3)-(n+3)=(n+3)(n^2-1)=(n+3)(n-1)(n+1)$.
Gdy $n=2k+1$, gdzie $k\in C$, to: $(n+3)(n-1)(n+1)=(2k+4)\,2k(2k+2)=$
$=8k(k+1)(k+2)$.
Stąd i z faktu, że $6|(k+1)(k+2)$ wynika, że rozważana liczba jest podzielna przez 48.

24. Wskazówka: Niech p i q będą dowolnymi liczbami całkowitymi nie dzielącymi się przez 3. Wtedy: $p=3n+1$ lub $p=3n+2$ oraz $q=3m+1$ lub $q=3m+2$, gdzie $n, m\in C$.

25. Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą. Mamy wykazać, że $16|(n+2)^4-n^4$.
Zauważmy, że:
$(n+2)^4-n^4=[(n+2)^2-n^2][(n+2)^2+n^2]=(n+2-n)(n+2+n)(2n^2+4n+4)=$
$=8(n+1)(n^2+2n+2)$.
Ponieważ rozważana liczba jest podzielna przez 8, więc wystarczy pokazać, że $2|(n+1)(n^2+2n+2)$. Gdy $n\in C$, to $n=2k$ lub $n=2k+1$, gdzie $k\in C$. W każdym przypadku łatwo wykazać, że $2|(n+1)(n^2+2n+2)$.

26. Wykażmy, że liczba $x^3+y^3+z^3-(x+y+z)$ jest podzielna przez 6, co wystarczy do udowodnienia podanego twierdzenia.
$x^3+y^3+z^3-(x+y+z)=(x^3-x)+(y^3-y)+(z^3-z)=$
$=x(x-1)(x+1)+y(y-1)(y+1)+z(z-1)(z+1)$.
Ponieważ każdy ze składników powyższej sumy jest podzielny przez 6, więc ich suma jest podzielna przez 6.

27. Wykażmy najpierw, że jeżeli liczba całkowita c nie jest podzielna przez 3, to c^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Jeżeli c nie jest podzielne przez 3, to $c=3k+1$ lub $c=3k+2$, gdzie $k\in C$. Wtedy (jak łatwo sprawdzić):
$c^2=3(3k^2+2k)+1$ lub $c^2=3(3k^2+4k+1)+1$.
Przypuśćmy teraz, że $3|m^2+n^2$ i ($3\nmid m$ lub $3\nmid n$). Jeżeli obie liczby m i n nie dzielą się przez 3, to m^2+n^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, co jest sprzeczne z założeniem. Jeżeli dokładnie jedna z liczb m, n nie dzieli się przez 3, to m^2+n^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, co jest sprzeczne z założeniem.

28. Ponieważ $n^2-1=(n-1)(n+1)$, więc wystarczy pokazać, że $24|(n-1)(n+1)$. Z założenia n jest liczbą nieparzystą. Wobec tego $(n-1)(n+1)$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb parzystych, a więc $(n-1)(n+1)$ jest podzielne przez 8. Wystarczy więc pokazać, że $3|(n-1)(n+1)$. Ponieważ n jest nie mniejszą od 5 liczbą pierwszą, to $3\nmid n$. Stąd i z faktu, że $3|(n-1)\,n(n+1)$ wynika, że $3|(n-1)(n+1)$.

29. Wskazówka: Wykazać, że $12|(3n-5)(n^3-3n^2+2n)$.

30. Wskazówka: $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$. Udowodnić, że $6|n^3+3n^2+2n$.

31. $\frac{n^3-n^2+2}{n-1}=n^2+\frac{2}{n-1}$. Rozważana liczba będzie całkowita dla $n\in C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n-1=1$ lub $n-1=-1$, lub $n-1=2$, lub $n-1=-2$, czyli gdy: $n=2$ lub $n=0$, lub $n=3$, lub $n=-1$.

32. Wskazówka: Rozważyć przypadki: $n=3k$ lub $n=3k+1$, lub $n=3k+2$, gdzie $k\in C$.

33. Niech $n \in C$. Wykażmy, że liczby $2n-1$ i $2n+1$ są pierwsze względem siebie. Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb $2n-1$ i $2n+1$. Oczywiście d jest nieparzystą liczbą całkowitą. Ponieważ $d|2n+1$ i $d|2n-1$, to $d|(2n+1)-(2n-1)$, czyli $d|2$. Stąd $d=1$.

34. Niech $n \in N$. Wykażmy, że liczby $n+(n+1)$ i $n^2+(n+1)^2$ są pierwsze względem siebie. Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb $n+(n+1)$ i $n^2+(n+1)^2$. Ponieważ $n+(n+1)=2n+1$ i $n^2+(n+1)^2=2n^2+2n+1$, więc $d|2n+1$ i $d|2n^2+2n+1$. Stąd $d|(2n+1)^2$ i $d|4n^2+4n+2$, a więc $d|(4n^2+4n+2)-(2n+1)^2$, czyli $d|1$. Wobec tego $d=1$.

35. Wskazówka: Wykazać, że dla $n \in N$ liczby $14n+3$ i $21n+4$ są pierwsze względem siebie.

36. Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb n^3+2n i n^4+3n^2+1, gdzie $n \in N$. Ponieważ $d|n^3+2n$, więc $d|n^4+2n^2$. Ale $d|n^4+3n^2+1$. Stąd $d|(n^4+3n^2+1)-(n^4+2n^2)$, czyli $d|n^2+1$. Zatem $d|n^3+n$. Wobec tego $d|(n^3+2n)-(n^3+n)$, czyli $d|n$, a więc także $d|n^2$. Ponieważ $d|n^2$ i $d|n^4+2n^2$, więc $d|(n^4+2n^2)+n^2$, czyli $d|n^4+3n^2$. Ale $d|n^4+3n^2+1$. Stąd $d|(n^4+3n^2+1)-(n^4+3n^2)$, czyli $d|1$, a więc $d=1$.

37. Z założenia największy wspólny dzielnik d liczb n i k jest większy od 1. Stąd $n=m_1 d$ i $k=m_2 d$, gdzie $m_1, m_2 \in N$. Wtedy $n-k=(m_1-m_2)d$ i $n+k=(m_1+m_2)d$, co oznacza, że ułamek $\dfrac{n-k}{n+k}$ jest skracalny.

38. Łatwo sprawdzamy, że najmniejszą liczbą naturalną spełniającą warunki zadania jest liczba 5. Każdą liczbę naturalną n większą od 5 można przedstawić w jednej z postaci: $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$, gdzie $k \in N$. W każdym z tych przypadków jedna z liczb: n, $n+2$, $n+6$, $n+8$, $n+12$, $n+14$ jest podzielna przez 5, a więc nie jest liczbą pierwszą. Wobec tego jedyną liczbą naturalną spełniającą warunki zadania jest liczba 5.

39. $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$. Stąd n^4+4 jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy $n^2-2n+2=1$ lub $n^2+2n+2=1$, gdzie $n \in N$. Powyższa alternatywa jest prawdziwa tylko dla $n=1$.

40. Gdy $k=1$, twierdzenie jest oczywiste. Niech $k \geqslant 2$. Przypuśćmy, że $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\ldots+\dfrac{1}{p_k}=n$ jest liczbą całkowitą. Mnożąc obustronnie powyższą równość przez $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ otrzymujemy: $p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + p_1 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k + \ldots + p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1} = n \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Liczba po prawej stronie równości jest podzielna przez p_1, a po lewej stronie równości nie jest podzielna przez p_1, więc sprzeczność.

41. Przypuśćmy, że istnieje taka liczba pierwsza p i taka liczba naturalna n, że $p+1=n^5$. Wtedy $p=n^5-1=(n-1)(n^4+n^3+n^2+n+1)$. Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc $n-1=1$. Stąd $n=2$. Wtedy $p=31$, a jest to liczba pierwsza. Wobec tego jedyną liczbą pierwszą spełniającą warunki zadania jest liczba 31.

42. Załóżmy, że istnieją dwie liczby pierwsze takie, że ich suma jest liczbą Fermata $2^{2^n}+1$, $n>1$. Ponieważ liczba Fermata $2^{2^n}+1$ jest nieparzysta, więc jedna z istniejących liczb pierwszych musi być parzysta, a druga nieparzysta. Ale jedyną liczbą pierwszą parzystą jest liczba 2. Stąd drugą liczbą musi być liczba $2^{2^n}-1$. Wykażmy, że $2^{2^n}-1$ nie jest liczbą pierwszą, co zakończy dowód.
Gdy $n \in N$ i $n>1$, to:
$2^{2^n}-1=\left(2^{\overbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}^{n-1}}\right)^2-1=\left(2^{2^{n-1}}-1\right)\cdot\left(2^{2^{n-1}}+1\right)$. Ponieważ każdy czynnik po prawej stronie równości jest większy od 1, więc $2^{2^n}-1$ nie jest liczbą pierwszą.

43. Wykażmy, że jeżeli p, q są liczbami pierwszymi i $p>q$ i $p-q=2$, to $pq+1$ jest kwadratem liczby naturalnej. Jeżeli $p-q=2$, to $p=q+2$. Stąd $pq+1=$ $=(q+2)q+1=q^2+2q+1=(q+1)^2$.
Wykażmy teraz, że jeżeli p, q są liczbami pierwszymi i $p>q$ oraz $pq+1$ jest kwadratem liczby naturalnej, to $p-q=2$. Niech $pq+1=n^2$, gdzie $n \in N$ i $n>1$. Zatem $pq=(n+1)(n-1)$. Stąd i z faktu, że p, q są liczbami pierwszymi i $p>q$ wynika, że $p=n+1$ i $q=n-1$. Wobec tego $p-q=(n+1)-(n-1)=2$.

44. Zauważmy, że suma cyfr liczby $x=\underbrace{11\ldots1}_{300}\underbrace{00\ldots0}_{m}$ jest równa 300, a więc liczba x jest podzielna przez 3. Przypuśćmy, że istnieje liczba naturalna n taka, że $x=n^2$. Wtedy n^2 jest podzielne przez 3, a więc także n jest podzielne przez 3. Niech $n=3k$, $k \in N$. Stąd $x=9k^2$. Ostatnia równość jest fałszywa, gdyż $9k^2$ jest podzielne przez 9, a x nie jest podzielne przez 9.

45. Wskazówka: Niech $x=n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2$, gdzie $n \in N$, czyli $x=5(n^2+4n+6)$. Wykazać, że $5 \nmid n^2+4n+6$ dla każdego $n \in N$.

46. $100^{n+1}+4\cdot 10^{n+1}+4=(10^{n+1}+2)^2$. Wystarczy wykazać, że $3|10^{n+1}+2$ dla $n \in N$. Zauważmy, że dla $n \in N$, $10^{n+1}+2=1\underbrace{00\ldots0}_{n}2$.
Ponieważ suma cyfr liczby $10^{n+1}+2$ jest równa 3, więc $3|10^{n+1}+2$.

47. Przypuśćmy, że istnieją liczby całkowite n i k takie, że $101\,010=n^2-k^2$. Wtedy $101\,010=(n-k)(n+k)$. Jeżeli obydwie liczby n, k są parzyste lub obydwie są nieparzyste, to liczby $n-k$ oraz $n+k$ są parzyste, a więc liczba $(n-k)(n+k)$ jest podzielna przez 4, a liczba 101 010 nie jest podzielna przez 4.
W przypadku gdy jedna z liczb n, k jest parzysta, a druga nieparzysta, to iloczyn $(n-k)(n+k)$ jest liczbą nieparzystą, a liczba 101 010 jest parzysta. Stąd równość $101\,010=(n-k)(n+k)$ jest niemożliwa dla n, k całkowitych.

48. Niech $n+1=x^2$ i $n-110=y^2$, gdzie $x, y \in N$. Stąd $x^2-1=y^2+110$, czyli $x^2-y^2=111$. Rozwiązując równanie w liczbach naturalnych otrzymamy: $x=56$ i $y=53$ lub $x=20$ i $y=17$. Zatem $n=3135$ lub $n=399$. Szukaną liczbą jest 399.

49. Sformułowany w zadaniu problem jest równoważny rozwiązaniu w liczbach całkowitych równania: $k^2+1=n(k+1)$. Czyli równania: $(k+1)(k-1-n)=-2$. Ostatnia równość dla k, $n \in C$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy: ($k+1=1$ i $k-1-n=-2$) lub ($k+1=-1$ i $k-1-n=2$), lub ($k+1=2$ i $k-1-n=-1$), lub

$(k+1=-2$ i $k-1-n=1)$. Stąd: $(k=0$ i $n=-1)$ lub $(k=-2$ i $n=-5)$, lub $(k=1$ i $n=1)$, lub $(k=-3$ i $n=-5)$. Zatem liczba k^2+1 jest podzielna przez $k+1$, gdy: $k=0$ lub $k=-2$, lub $k=1$, lub $k=-3$.

50. Przy założeniu, że $m, n \in N$ podane równanie należy przekształcić do postaci: $m=7+\frac{49}{n-7}$. Stąd wynika, że $n-7=1$ lub $n-7=7$, lub $n-7=49$. Zatem rozwiązaniami równania są pary liczb: (56, 8), (14, 14), (8, 56). W każdym z tych przypadków suma $m+n$ jest podzielna przez 4.

51. $(x=1$ i $y=5)$ lub $(x=-1$ i $y=-5)$, lub $(x=11$ i $y=-5)$, lub $(x=-11$ i $y=5)$. Wskazówka: Równanie doprowadzić do postaci $x(x+2y)=11$.

52. Równanie $xy=x+y$ należy przekształcić do postaci: $(x-1)(y-1)=1$. Stąd dla $x, y \in C$ mamy: $(x-1=1$ i $y-1=1)$ lub $(x-1=-1$ i $y-1=-1)$, czyli $(x=2$ i $y=2)$ lub $(x=0$ i $y=0)$.

53. Niech $x, y \in C$. Podane równanie rozwiązujemy następująco:
$x^2y^2-2xy+1-x^2-2x-1-(y+1)^2=0$
$x^2y^2-2xy-x^2-2x-(y+1)^2=0$
$x^2(y^2-1)-2x(y+1)-(y+1)^2=0$
$x^2(y-1)(y+1)-2x(y+1)-(y+1)^2=0$
$(y+1)[x^2(y-1)-2x-(y+1)]=0$
Ostatnia równość jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy:
$(x \in C$ i $y=-1)$ lub $x^2(y-1)-2x-(y+1)=0$.
Równość $x^2(y-1)-2x-(y+1)=0$ przekształcamy następująco:
$x^2y-x^2-2x-y-1=0$
$y(x^2-1)-(x+1)^2=0$
$y(x-1)(x+1)-(x+1)^2=0$
$(x+1)[y(x-1)-(x+1)]=0$
Ostatnia równość jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy:
$(x=-1$ i $y \in C)$ lub $y(x-1)-(x+1)=0$.
Równość $y(x-1)-(x+1)=0$ przekształcamy następująco:
$y(x-1)-x-1=0$
$y(x-1)-x+1=2$
$(x-1)(y-1)=2$
Ostatnia równość jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy:
$(x-1=2$ i $y-1=1)$ lub $(x-1=1$ i $y-1=2)$, lub $(x-1=-1$ i $y-1=-2)$, lub $(x-1=-2$ i $y-1=-1)$, czyli gdy: $(x=3$ i $y=2)$ lub $(x=2$ i $y=3)$, lub $(x=0$ i $y=-1)$, lub $(x=-1$ i $y=0)$.
Ostatecznie podane równanie jest prawdziwe dla par liczb całkowitych (3, 2), (2, 3), $(m, -1)$, $(-1, n)$, gdzie $m, n \in C$.

54. Jeżeli $x \in \{-1, -2, -3, ...\}$, to równanie jest sprzeczne w zbiorze par liczb całkowitych, bo lewa strona nie jest liczbą całkowitą, a prawa jest liczbą całkowitą. Jeżeli $x=0$, to równanie przyjmuje postać $4=5^y$ i jest sprzeczne w zbiorze liczb całkowitych. Jeżeli $x=1$, to równanie przyjmuje postać $5=5^y$, skąd $y=1$.

Jeżeli $x \in \{2, 3, 4, ...\}$ to równanie jest sprzeczne, bo lewa strona jest liczbą naturalną postaci 2^x+3, prawa zaś nie. Jedynym rozwiązaniem podanego równania w liczbach całkowitych jest para (1, 1).

55. $(x=1$ i $y=5)$ lub $(x=-1$ i $y=-9)$, lub $(x=7$ i $y=-97)$, lub $(x=-7$ i $y=-99)$. Wskazówka: Równanie doprowadzić do postaci $x(2x^2+y)=7$.

56. Łatwo sprawdzić, że dla $y=-3$ równanie jest sprzeczne w zbiorze par liczb całkowitych. Przy założeniu $x, y \in C$ i $y \neq -3$ równanie można przekształcić do postaci: $x=4+\frac{33}{y+3}$. Równanie jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy: $y+3=1$ lub $y+3=-1$, lub $y+3=3$, lub $y+3=-3$, lub $y+3=11$, lub $y+3=-11$, lub $y+3=33$, lub $y+3=-33$, czyli, gdy: $y=-2$ lub $y=-4$, lub $y=0$, lub $y=-6$, lub $y=8$, lub $y=-14$, lub $y=30$, lub $y=-36$. Ostatecznie podane równanie jest prawdziwe dla par liczb całkowitych: $(37, -2)$, $(-29, -4)$, $(15, 0)$, $(-7, -6)$, $(7, 8)$, $(1, -14)$, $(5, 30)$, $(3, -36)$.

57. Po łatwych rachunkach równanie przyjmuje postać: $x(x+1)=(y+1)^2$. Liczba $x(x+1)$ jest parzysta i podzielna przez pewną liczbę nieparzystą. Własności tej nie ma liczba $(y+1)^2$.

58. Równanie należy doprowadzić do postaci: $(y-x)(y+x)=1990$. Jeżeli liczby x i y są obydwie parzyste lub obydwie nieparzyste, to lewa strona równości jest podzielna przez 4, prawa zaś nie. Jeżeli jedna z liczb x, y jest parzysta, a druga nieparzysta, to liczba $(y-x)(y+x)$ jest nieparzysta, natomiast liczba 1990 jest parzysta.

59. Zauważmy, że liczby: $x=1$, $y=4$, $z=8$, $t=9$ są rozwiązaniami podanego równania, stąd liczby: $x=k$, $y=4k$, $z=8k$, $t=9k$, gdzie $k \in N$, również.

60. Podane równanie można przekształcić do postaci: $(x-1)(x+1)=2y \cdot 2z$. Jeżeli $x, y, z \in N$ i $x-1=2y$ i $x+1=2z$, to powyższa równość będzie prawdziwa. Stąd $x=2y+1$ i $z=y+1$. Wobec tego trójki liczb: $x=2k+1$, $y=k$, $z=k+1$, gdzie $k \in N$ są rozwiązaniami powyższego równania.

61. Oznaczmy: $x-[x]=m$. Stąd $x=[x]+m$ i $0 \leqslant m \leqslant 1$. Podane równanie przekształcamy następująco: $[x]=2x-3$, $[x]=2([x]+m)-3$, $[x]=3-2m$. Ostatnie równanie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $m=0$ lub $m=\frac{1}{2}$. Wtedy odpowiednio: $[x]=3$ lub $[x]=2$. Rozwiązaniami podanego równania są więc liczby: $x=3$ lub $x=2\frac{1}{2}$.

62. $x=2{,}75$.

63. Oznaczmy szukane liczby przez x i y. Wiadomo, że $x=8k_1$ i $y=8k_2$, gdzie k_1 i k_2 są liczbami względnie pierwszymi. Ponieważ $xy=3200$, więc $8k_1 \cdot 8k_2=3200$, czyli $k_1 \cdot k_2=50$. Stąd i z faktu, że k_1 i k_2 są pierwsze względem siebie, otrzymujemy: $(k_1=1$ i $k_2=50)$ lub $(k_1=50$ i $k_2=1)$, lub $(k_1=2$ i $k_2=25)$, lub $(k_1=25$ i $k_2=2)$. Wobec tego szukanymi liczbami są: 8 i 400 lub 16 i 200.

64. Przypuśćmy, że suma cyfr liczby całkowitej n jest równa 5 i istnieje liczba całkowita k taka, że $n=k^2$. Stąd $n+1=k^2+1$ i suma cyfr liczby $n+1$ jest równa 6. Zatem liczba $n+1$, a więc także liczba k^2+1 jest podzielna przez 3, co sprzeczne (patrz zadanie 32). Uwaga: Analogicznie dowodzimy, że suma cyfr liczby będącej kwadratem liczby całkowitej nie może być równa 2 i nie może być równa 8.

65. Ponieważ liczba a przy dzieleniu przez 5 i przez 7 daje resztę 1, to liczba $a-1$ jest podzielna przez 5 i przez 7, a więc jest podzielna przez 35. Stąd liczba a przy dzieleniu przez 35 daje resztę 1.

66. Niech x, y oznaczają dowolne nieparzyste liczby całkowite. Wtedy $x=2k+1$ i $y=2n+1$, gdzie $k, n \in C$. Stąd $x-y=2(k-n)$. Ponieważ $x-y$ jest podzielne przez 5, więc $x-y$ jest podzielne przez 10, co oznacza, iż różnica ta ma cyfrę jedności równą 0. Nietrudno sprawdzić, że $x^3-y^3=(2k+1)^3-(2n+1)^3=$ $=2(k-n)[4(k^2+kn+n^2)+6(k+n)+3]=(x-y)[4(k^2+kn+n^2)=6(k+n)+3]$. Ponieważ $x-y$ jest podzielne przez 10, więc x^3-y^3 jest podzielne przez 10, więc cyfrą jedności liczby x^3-y^3 jest 0.

67. Niech a oznacza szukaną podstawę systemu pozycyjnego. Oczywiście $a>4$. Równość $4\cdot 13=100$ przekształćmy: $4(1\cdot a+3)=1\cdot a^2+0\cdot a+0$, $a^2-4a-12=0$. Stąd $a=6$.

68. Szukaną podstawą systemu pozycyjnego jest 8.

69. $a=(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 7\cdot 8\cdot 9)(10\cdot 11\cdot 12\cdot\ldots\cdot 97\cdot 98\cdot 99)\cdot(100\cdot 101\cdot 102\cdot\ldots\cdot 997\cdot 998\cdot 999)\cdot$
$\cdot(1000\cdot 1001\cdot 1002\cdot\ldots\cdot 1988\cdot 1989\cdot 1990)>10^{90}\cdot 100^{900}\cdot 1000^{991}=$
$=10^{90}\cdot 10^{1800}\cdot 10^{2973}=10^{4863}>10^{4000}=(10^4)^{1000}=10\,000^{1000}=b.$

70.
$$\frac{1}{1\,000\,000}+\left(\frac{1}{1\,000\,001}+\frac{1}{1\,000\,002}+\ldots+\frac{1}{2\,000\,000}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2\,000\,001}+\frac{1}{2\,000\,002}+\ldots+\frac{1}{4\,000\,000}\right)>\frac{1}{1\,000\,000}+1\,000\,000\frac{1}{2\,000\,000}+$$
$$+2\,000\,000\frac{1}{4\,000\,000}=\frac{1}{1\,000\,000}+1.$$

71.
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n-2)^2}+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 4}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(n-2)(n-2)}+\frac{1}{(n-1)(n-1)}+\frac{1}{nn}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-3)(n-2)}+$$
$$+\frac{1}{(n-2)(n-1)}+\frac{1}{(n-1)n}=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2.$$
Zatem dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność:
$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$

72. Niech x oznacza liczbę dziesiątek, a y liczbę dwunastek dających się ułożyć z interesującej nas porcji ogórków. Ogrodnik miał więc $10x+8=12y+8$ ogórków. Z treści zadania: $10x+8=12y+8$ i $x, y \in N$ i $300<10x+8<400$. Stąd $y=\frac{5}{6}x$ i $x, y \in N$ i $29{,}2<x<39{,}2$. Nietrudno sprawdzić, że powyższy układ warunków spełniony jest tylko wtedy, gdy $x=30$ lub $x=36$. Zatem ogrodnik miał 308 lub 368 ogórków.

73. Niech x oznacza długość kroku Bolka, a y liczbę kroków postawionych przez Lolka. Bolek przebył drogę równą yx. Lolek stawiał kroki długości $x-\frac{1}{5}x=\frac{4}{5}x$ oraz postawił ich w drodze z domu do szkoły $y+\frac{1}{5}y=\frac{6}{5}y$. Zatem Lolek przebył drogę równą $\frac{6}{5}y\cdot\frac{4}{5}x=\frac{24}{25}xy$. Ponieważ $\frac{24}{25}xy<xy$, więc pierwszy dotarł do szkoły Bolek.

74. Ponumerujmy skrzynie liczbami od 1 do 10. Weźmy 1 monetę ze skrzyni pierwszej, 2 monety ze skrzyni drugiej itd., 10 monet ze skrzyni dziesiątej. Razem będziemy mieć $1+2+\ldots+10=55$ monet, kładziemy je na wadze. Gdyby wszystkie monety były prawdziwe, to ich masa byłaby równa $55\cdot 20=1100$ g. Ale wśród wybranych monet są fałszywe, zatem masa ich jest mniejsza niż 1100 g. Niech masa monet będzie równa x gramów ($x<1100$). Liczba monet fałszywych wśród wybranych 55 monet jest równa $\frac{1100-x}{2}$. Ponieważ liczba monet fałszywych jest równa numerowi skrzyni z monetami fałszywymi, więc monety fałszywe znajdują się w skrzyni oznaczonej liczbą $\frac{1100-x}{2}$.

75. Oznaczmy przez x liczbę słoików mieszczących $1\frac{1}{2}$ kg, a przez y liczbę słoików mieszczących $2\frac{1}{2}$ kg miodu. Oczywiście $x, y \in N$. Z treści zadania otrzymujemy równanie: $1\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}y=13$, czyli $x=\frac{26-5y}{3}$. Rozwiązując to równanie w liczbach naturalnych otrzymujemy: ($x=7$ i $y=1$) lub ($x=2$ i $y=4$).

76. Załóżmy, że do zabicia smoka należy wykonać x cięć po 33 głowy, y cięć po 21 głów, z cięć po 17 głów oraz t cięć po 1 głowie. Smok będzie zabity, gdy dla pewnych $x, y, z, t \in N\cup\{0\}$: $2000-[(33-48)x+(21-0)y+(17-14)z+(1-349)t]=0$.
Po wykonaniu działań otrzymujemy równanie: $3(-5x+7y+z-116t)=2000$, które jest sprzeczne, gdyż lewa strona jest podzielna przez 3, a prawa nie. Zatem rycerz nie może zabić smoka.

77. Oznacz przez x liczbę mężczyzn, przez y liczbę kobiet, a przez z liczbę dzieci ($x, y, z \in N$). Z treści zadania otrzymujemy układ równań:
$x+y+z=12$ i $2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z=12$, czyli układ: $x+y+z=12$ i $x=\frac{36-y}{7}$.
Rozwiązując powyższy układ w liczbach naturalnych otrzymujemy: $x=5$ i $y=1$ i $z=6$.

78. Skłamał Jacek, a pierwszy przekroczył linię mety Jurek.

79. Równanie $3n=4 \pmod 7$ oznacza, że $7|3n-4$. Wobec tego $3n-4=7k$, gdzie $k\in C$. Równanie $3n-4=7k$ można zapisać w postaci $3n=3k+4(k+1)$. Aby równanie było prawdziwe musi zachować równość: $k+1=3z$, gdzie $z\in C$. Stąd $k=3z-1$. Zatem równanie przyjmuje postać $3n=3(3z-1)+12z$, czyli $n=7z-1$.

80. Równanie $n^2=1 \pmod 5$ oznacza, że $n^2-1=5k$, gdzie $k\in C$. Ponieważ $n^2-1=(n-1)n+1)$, więc rozwiązując równanie $n^2-1=5k$ otrzymamy: $n-1=5t$ lub $n+1=5r$, gdzie $t, r\in C$. Stąd $n=5t+1$ lub $n=5r-1$.

81. Równanie $n^2=3 \pmod 5$ oznacza, że $n^2=5k+3$, $k\in C$. Ponieważ kwadrat żadnej liczby całkowitej nie daje przy dzieleniu przez 5 reszty 3 (udowodnij to), więc rozważanie równanie jest sprzeczne.

82. $\dfrac{2b}{3a+b}=\dfrac{4}{5}$.

83. $x^2-2\sqrt{2}\cdot x+y-2\sqrt{y}+3=0$,
$(x^2-2\sqrt{2}\cdot x+2)+(y-2\sqrt{y}+1)=0$,
$(x-\sqrt{2})^2+(\sqrt{y}-1)^2=0$,
$x=\sqrt{2}$ i $y=1$.

84. $x=2$ i $y=-1$.

85. $x=\frac{1}{2}$ i $y=\frac{1}{3}$ i $z=\frac{1}{4}$.

86. Równanie przekształcamy do postaci: $2x-y+1=\sqrt{3}(-y-1)$. Jeżeli $y\neq -1$, to $\sqrt{3}=\dfrac{2x-y+1}{-y-1}$, co jest sprzeczne gdy $x, y\in W$. Wobec tego równanie będzie spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $2x-y+1=0$ i $-y-1=0$, i $x, y\in W$, czyli gdy $x=-1$ i $y=-1$.

87-90. Wykonując działania po obu stronach równości otrzymujemy te same wyrażenia.

91. Przy podanych założeniach równość $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{x+y}{x-y}$ przekształcamy:

$(a+b)(x-y)=(a-b)(x+y)$,
$ax-ay+bx-by=ax+ay-bx-by$,
$bx-ay=ay-bx$,
$2bx=2ay$,
$bx=ay$,
$\dfrac{a}{b}=\dfrac{x}{y}$.

92. Przy założeniu $ab\neq 0$ równość $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=a-b$ przekształcamy:

$b-a=ab(a-b)$,
$ab(a-b)+(a-b)=0$,
$(a-b)(ab+1)=0$. Stąd $a=b$ lub $ab=-1$.

93. Z założenia $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ mamy $b^2=ac$. Stąd $b^4=a^2c^2$. Dodając do obu stron a^2b^2 otrzymujemy $a^2b^2+b^4=a^2b^2+a^2c^2$, czyli $b^2(a^2+b^2)=a^2(b^2+c^2)$.
Zatem $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$.

94. Przy podanych założeniach:
$a^2+b^2+c^2=a^2+(a+1)^2+a^2b^2=2a^2+2a+1+a^2b^2=a^2b^2+2a(a+1)+1=$
$=a^2b^2+2ab+1=(ab+1)^2=d^2$.

95. Z założenia $a+c=2b$, czyli $(a+c)d=2bd$ (bo $d\neq 0$). Stąd i z założenia $2bd=c(b+d)$ wynika, że $(a+c)d=c(b+d)$, czyli $ad=bc$. Zatem $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.

96. Przy podanych założeniach:
$AB(A^2+B^2)=2[(a+b)^4-(c+d)^4]$ i $CD(C^2+D^2)=2[(a-b)^4-(c-d)^4]$. Wystarczy więc pokazać, że $(a+b)^4-(c+d)^4=(a-b)^4-(c-d)^4$. Ostatnią równość można przekształcić do postaci $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$, a ta jest prawdziwa z założenia.

97. Z założenia $c=-a-b$. Wobec tego: $a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=$
$=-3a^2b-3ab^2=3ab(-a-b)=3abc$.

98. Ponieważ $x+y+z=1$, więc $(x+y+z)^2=1$. Zatem $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=1$.
Stąd i z założenia $x^2+y^2+z^2=1$ otrzymamy $xy+xz+yz=0$. (1)
Nietrudno sprawdzić, że:
$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2z+3xy^2+3xz^2+3yz^2+6xyz$.
Ponieważ $(x+y+z)^3=1$ i $x^3+y^3+z^3=1$,
więc $x^2y+x^2z+y^2z+xy^2+xz^2+yz^2+2xyz=0$,
czyli $x(xy+xz+yz)+y(yz+xy+xz)+yz^2+xz^2=0$. (2)
Z (1) i (2) otrzymamy $yz^2+xz=0$, czyli $x+y=0$ lub $z=0$. Wobec tego $xyz=0$.

99. Założenia twierdzenia zapiszemy w postaci $bcx+acy+abz=abc$ i $ayz+bxz+cxy=0$, a tezę w postaci: $b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2$.
Wtedy z pierwszego założenia:
$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2+2abc^2xy+2ab^2cxz+2a^2bcyz=a^2b^2c^2$,
czyli: $b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2+2abc(cxy+bxz+ayz)=a^2b^2c^2$.
Stąd i z założenia drugiego:
$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2$.

100. Wskazówka: Podstawić w miejsce s, $a+b+c$ i wykonać działania po obu stronach dowodzonej równości, a wniosek będzie oczywisty.

101. Z oczywistej nierówności $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\geqslant 0$ wynika, że:
$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\geqslant 0$, skąd $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.

102. Oczywiście: $a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2$. Ponieważ $a\neq 0$ i $b\neq 0$, więc $\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2>0$, czyli $a^2+ab+b^2>0$. Można więc pomnożyć obustronnie podaną nierówność przez $3(a^2+ab+b^2)$. Otrzymamy nierówność $3a^2-3ab+3b^2 \geqslant a^2+ab+b^2$, czyli nierówność $a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$, która jest prawdziwa, gdyż $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

103. Wskazówka: Przy założeniu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}_+$ podaną nierówność doprowadzić do postaci: $b_2^2a_1^2+b_1^2a_2^2 \geqslant 2a_1a_2b_1b_2$.

104. Wskazówka: Wykorzystać nierówność z zadania 103.

105. Podaną nierówność przekształcamy do postaci:
$a^2-2a+1+b^2-2b+1 \geqslant 0$ która jest prawdziwa, gdyż
$a^2-2a+1=(a-1)^2$ i $b^2-2b+1=(b-1)^2$ oraz $(a-1)^2+(b-1)^2 \geqslant 0$.

106. $(x+y)(1+xy)=x^2y+x+y+xy^2=y(x^2+1)+x(y^2+1)$. Ponieważ $1+x^2>0$ i $1+y^2>0$, więc podaną nierówność można przekształcić do postaci $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2} \leqslant 1$. Łatwo pokazać, że $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$ i $\frac{y}{1+y^2} \leqslant \frac{1}{2}$. Dodając stronami powyższe nierówności otrzymamy: $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2} \leqslant 1$, co wystarczyło pokazać.

107. Przy założeniu $a, b \in \mathbf{R}_+$, z oczywistej nierówności $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$ otrzymamy $a-2\sqrt{ab}+b \geqslant 0$, skąd $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

108. Przy założeniu $a, b \in \mathbf{R}_+$ podaną nierówność można przekształcać następująco: $\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}$; $2ab \leqslant \sqrt{ab}(a+b)$; $2\sqrt{ab} \leqslant a+b$; $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Ostatnia nierówność jest oczywista.

109. Korzystając z zadania 107, dla dowolnych liczb $a, b, c, d \in \mathbf{R}_+$ otrzymamy: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ i $\frac{c+d}{2} \geqslant \sqrt{cd}$.

Stąd $\frac{a+b+c+d}{2} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, czyli $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$ (1)

Wykorzystując ponownie zadanie 107 otrzymamy:

$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{abcd}}$, czyli $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$. (2)

Z (1) i (2): $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

110. Korzystając z zadania 109 otrzymamy:

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geqslant \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}.$$

Stąd $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}$, czyli $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geqslant abc\frac{a+b+c}{3}$.

Dzieląc obydwie strony ostatniej nierówności przez $\frac{a+b+c}{3}$ otrzymamy $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant abc$, czyli $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.

111. Korzystając z zadania 110 otrzymamy:

$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}}$, czyli $\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{3} \geqslant 1$. Stąd $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqslant 3$.

112. $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)$.

Korzystając z zadania 107 łatwo wykazać, że:

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant 2$ i $\frac{x}{z}+\frac{z}{x} \geqslant 2$, $\frac{y}{z}+\frac{z}{y} \geqslant 2$.

Stąd $3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) \geqslant 9$. czyli $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9$.

113. Wskazówka: Wykorzystać zadanie 110.

114. Korzystając z zadania 110 otrzymamy:

$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ i $\frac{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{bc}\cdot\frac{1}{ac}}$.

Stąd, po pomnożeniu nierówności stronami:

$\frac{(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)}{9} \geqslant \sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}}$, czyli $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right) \geqslant 9$.

115. Wskazówka: Wykorzystać zadanie 109.

116. Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbf{R}$: $(a-bc)^2+(b-ac)^2+(c-ab)^2 \geqslant 0$.
Stąd $a^2+a^2b^2+b^2+b^2c^2+c^2+c^2a^2 \geqslant 6abc$,
czyli $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geqslant 6abc$.

117. Przy założeniu $ab>0$: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0$.

Ostatnia nierówność jest oczywista.

118. Wskazówka: $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$.

119. Korzystając z zadania 107 otrzymamy:

$\frac{1+a_1}{2} \geqslant \sqrt{a_1}$ i $\frac{1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_2}$, i ..., i $\frac{1+a_n}{2} \geqslant \sqrt{a_n}$.

Stąd $1+a_1 \geqslant 2\sqrt{a_1}$ i $1+a_2 \geqslant 2\sqrt{a_2}$, i ..., i $1+a_n \geqslant 2\sqrt{a_n}$.
Mnożymy nierówności stronami:
$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geqslant 2^n\sqrt{a_1a_2\dots a_n}$. Stąd i z założenia $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$ uzyskamy nierówność: $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geqslant 2^n$.

120. Łatwo wykazać, że jeśli $a \geq 0$ i $b \geq 0$, to $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Ponieważ $a, b, c \in \langle 0; 1\rangle$, więc $a \geq 0$ i $b \geq 0$, i $c \geq 0$, i $1-a \geq 0$, i $1-b \geq 0$, i $1-c \geq 0$.
Wobec tego:
$\frac{(1-a)+a}{2} \geq \sqrt{(1-a)a}$ i $\frac{(1-b)+b}{2} \geq \sqrt{(1-b)b}$, i $\frac{(1-c)+c}{2} \geq \sqrt{(1-c)c}$, czyli
$\frac{1}{2} \geq \sqrt{(1-a)a}$ i $\frac{1}{2} \geq \sqrt{(1-b)b}$, i $\frac{1}{2} \geq \sqrt{(1-c)c}$. Mnożąc ostatnie nierówności stronami: $\frac{1}{8} \geq \sqrt{abc(1-a)(1-b)(1-c)}$, stąd $\frac{1}{64} \geq abc(1-a)(1-b)(1-c)$.

121. Przy założeniu $a, b, c \in \boldsymbol{R}_+$ podaną nierówność przekształcamy do postaci $\frac{c(b-a)}{b(b+c)} > 0$, która prawdziwa jest wtedy i tylko wtedy, gdy $b > a$.

122. Korzystając z zadania 121 i z założenia:
$$\frac{k+2a_1+2^2a_2+...+2^na_n}{k+2b_1+2^2b_2+...+2^nb_n} < \frac{2k+2a_1+2^2a_2+...+2^na_n}{2k+2b_1+2^2b_2+...+2^nb_n} = \frac{k+a_1+2a_2+...2^{n-1}a_n}{k+b_1+2b_2+...+2^{n-1}b_n}.$$

123. Niech $x+y \geq 0$. Widać, że $|x| \geq x$ i $|y| \geq y$. Stąd $|x|+|y| \geq x+y$, ponieważ $x+y=|x+y|$, więc $|x|+|y| \geq |x+y|$. Niech teraz $x+y<0$. Widać, że $|x| \geq -x$ i $|y| \geq -y$. Stąd $|x|+|y| \geq -x-y$, ponieważ $-x-y=|x+y|$, więc $|x|+|y| \geq |x+y|$.

124. Wykażmy najpierw, że $|x-y| \leq |x|+|y|$.
Widać, że: $|x-y|=|x+(-1)y| \leq |x|+|(-1)y|=|x|+|y|$.
Wykażmy teraz, że $|x|-|y| \leq |x-y|$.
Zauważmy, że $x=(x-y)+y$. Stąd $|x|=|(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|$. Wobec tego $|x|-|y| \leq |x-y|$.

§ 2. Wstępne wiadomości o funkcjach

125. Funkcja nie ma miejsc zerowych.

126. Miejscami zerowymi są wszystkie liczby niedodatnie.

127. Parzysta,

128. Nieparzysta,

129. Nie jest parzysta i nie jest nieparzysta,

130. Nieparzysta,

131. Nieparzysta,

132. Parzysta,

133. Nieparzysta,

134. Nieparzysta,

135. Parzysta,

136. Nieparzysta,

137. Nieparzysta,

138. Parzysta.

139. Niech $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}_-$ i $x_1<x_2$. Wtedy: $f(x_2)-f(x_1)=\frac{\sqrt{2}}{x_2}-\frac{\sqrt{2}}{x_1}=\frac{\sqrt{2}(x_1-x_2)}{x_1x_2}$. Ponieważ $x_1-x_2<0$ i $x_1x_2>0$, więc $f(x_2)-f(x_1)<0$ co oznacza, że funkcja f jest malejąca w zbiorze $\boldsymbol{R}_-$.

140. Rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}_+$.

141. Niech $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ i $x_1<x_2$. Wtedy: $f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)=$ $=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]$.
Ponieważ $x_2-x_1>0$ i $\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2>0$, więc $f(x_2)-f(x_1)>0$ co oznacza, że funkcja f jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

142. Niech $x_1, x_2 \in \langle 1; \infty)$ i $x_1<x_2$. Wtedy:
$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-2x_2-x_1^2+2x_1=(x_2^2-x_1^2)-2(x_2-x_1)=$
$=(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$.
Z założenia $x_2-x_1>0$. (1)
Ponieważ $x_1, x_2 \in \langle 1; \infty)$ i $x_1<x_2$, więc $x_1 \geq 1$ i $x_2>1$.
Stąd $x_1+x_2>2$, czyli $x_1+x_2-2>0$. (2)
Z (1) i (2) otrzymujemy $(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)>0$, czyli $f(x_2)-f(x_1)>0$ co oznacza, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 1; \infty)$.

143. Malejąca w przedziale $(-\infty; \frac{5}{2}\rangle$.

144. Rosnąca w przedziale $(-\infty; 2\rangle$.

145. Załóżmy, że $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$.
$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{x_2^2+1}-\frac{x_1}{x_1^2+1}=\frac{x_2x_1^2+x_2-x_1x_2^2-x_1}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}=\frac{(x_2-x_1)-x_1x_2(x_2-x_1)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}=$$
$$=\frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}.$$
Aby określić znak powyższej różnicy, wystarczy zbadać znak wyrażenia $1-x_1x_2$. Z założeń: $1+x_1 \geq 0$ i $1-x_2 \geq 0$. Stąd $(1+x_1)(1-x_2) \geq 0$, czyli $1-x_1x_2 \geq x_2-x_1$. Ponieważ $x_2-x_1>0$, więc $1-x_1x_2>0$. Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -1; 1\rangle$.

146. Niech $x_1<x_2<0$. Łatwo sprawdzić, że $f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\left(x_1x_2-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)$.
Ponieważ $x_1<x_2<0$, więc $x_2-x_1>0$ i $x_1x_2>0$ i $-\frac{1}{x_1}>0$ i $-\frac{1}{x_2}>0$. Zatem powyższa różnica jest dodatnia, więc rozważana funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

147. Wykażmy najpierw różnowartościowość funkcji f.
Jeśli $x_1, x_2 \in \boldsymbol{W}$ i $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$, gdyż $f(x_1)=x_1$ i $f(x_2)=x_2$.

Jeśli $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{W}$ i $x_1 \neq x_2$, to $-x_1 \neq -x_2$, więc $f(x_1) \neq f(x_2)$ gdyż $f(x_1) = -x_1$ i $f(x_2) = -x_2$.
Jeśli $x_1 \in \boldsymbol{W}$ i $x_2 \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{W}$, to $x_1 \neq x_2$. Wtedy także $x_1 \neq -x_2$, więc $f(x_1) \neq f(x_2)$, gdyż $f(x_1) = x_1$ i $f(x_2) = -x_2$. Rozważana funkcja nie jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$ (np. $x_1 = 2$ i $x_2 = \sqrt{7}$) oraz nie jest malejąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$ (np. $x_1 = \sqrt{2}$ i $x_2 = 5$).

148. Wykażmy, że dla dowolnego $s \in \boldsymbol{W}$ prawdziwe jest stwierdzenie: $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} f(x+s) = f(x)$, co zakończy dowód. Ustalmy dowolnie $s \in \boldsymbol{W}$. Niech x będzie dowolną liczbą wymierną. Wtedy $x+s$ jest także liczbą wymierną. Stąd $f(x) = 1$ i $f(x+s) = 1$, a więc $f(x+s) = f(x)$. Niech teraz x będzie dowolną liczbą niewymierną. Wtedy $x+s$ jest także liczbą niewymierną. Stąd $f(x) = 0$ i $f(x+s) = 0$, a więc $f(x+s) = f(x)$.

149. W zadaniu 148 wykazaliśmy, że każda liczba wymierna różna od zera jest okresem funkcji Dirichleta. Wystarczy więc wykazać, że żadna liczba niewymierna nie jest okresem rozważanej funkcji. Przypuśćmy, że istnieje liczba niewymierna s taka, że $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} f(x+s) = f(x)$. Wtedy $f(0+s) = f(0)$, czyli $f(s) = f(0)$ co jest sprzeczne, gdyż $f(s) = 0$ i $f(0) = 1$.

150. Jeżeli $a = 0$, to funkcja g jest stała, a więc jest okresowa. Niech $a \neq 0$ i niech $s \neq 0$ będzie okresem funkcji f. Wtedy dla dowolnego $x \in \boldsymbol{R}$:
$g(x) = f(ax+b) = f(ax+b+s) = f\left(a\left(x + \frac{s}{a}\right) + b\right) = g\left(x + \frac{s}{a}\right)$, co oznacza, że funkcja g jest okresowa o okresie $\frac{s}{a}$.

151. Podstawiając do równości $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ w miejsce x liczbę $x+a$ otrzymamy:

$$f(x+2a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} \text{ czyli } f(x+2a) = \frac{1 + \frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1 - \frac{1+f(x)}{1-f(x)}}, \text{ skąd } f(x+2a) = -\frac{1}{f(x)}$$

Podstawiając do ostatniej równości w miejsce x liczbę $x+2a$ otrzymujemy $f(x+4a) = -\frac{1}{f(x+2a)}$, czyli $f(x+4a) = -\frac{1}{\frac{-1}{f(x)}}$, skąd $f(x+4a) = f(x)$. Ostatnia równość oznacza, że funkcja f jest okresowa o okresie $4a$.

152. Liczba 0 jest miejscem zerowym funkcji f, gdyż: $f(-0) = -f(0)$, czyli $f(0) = -f(0)$. Stąd $2f(0) = 0$, a więc $f(0) = 0$. Ponieważ funkcja f jest nieparzysta, więc wystarczy wykazać, że liczby ms, gdzie $m \in \boldsymbol{N}$ są jej miejscami zerowymi.
Wiadomo, że jeżeli s jest okresem funkcji f, to także liczby ms, $m \in \boldsymbol{N}$ są okresami funkcji f. Stąd $f(ms) = f(0+ms) = f(0) = 0$, co oznacza, że liczby ms, $m \in \boldsymbol{N}$ są miejscami zerowymi funkcji f.

153. a) Przyjmując w tożsamości $f(x+y) = f(x) + f(y)$ wartości $x = y = 0$ otrzymujemy $f(0) = 2f(0)$. Stąd $f(0) = 0$.
b) Dla $n = 0$ oraz $n = 1$ równość jest prawdziwa. Gdy $n > 1$, to:
$f(nx) = f(\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n}) = \underbrace{f(x)+f(x)+\ldots+f(x)}_{n} = nf(x)$.
c) Niech $n, m \in \boldsymbol{N}$. Wtedy: $nf(x) = f(nx) = f\left(m \cdot \frac{n}{m} \cdot x\right) = mf\left(\frac{n}{m} \cdot x\right)$.
Stąd $f\left(\frac{n}{m} \cdot x\right) = \frac{n}{m} f(x)$.

154. Przyjmując w równaniu $x = 1$ i $y = 0$ otrzymamy $f(1+0) = f(1)f(0)$, czyli $f(1) = f(1)f(0)$. Ponieważ $f(1) > 0$, więc $f(0) = 1$.

155. Przyjmując $x = y = 1$ otrzymamy $f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$. Stąd $f(1) = 2f(1)$, a więc $f(1) = 0$.

156. Załóżmy, że istnieje funkcja f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ spełniająca rozważane równanie. Podstawiając w miejsce x wyrażenie $1-x$ otrzymujemy $2f(1-x) + f(x) = 1-x$, skąd $f(1-x) = \frac{1}{2}[1-x-f(x)]$. Wobec tego równanie przyjmuje postać $2f(x) + \frac{1}{2}[1-x-f(x)] = x$ skąd po obliczeniu $f(x)$ otrzymamy: $f(x) = x - \frac{1}{3}$.
Łatwo sprawdzić, że funkcja $f(x) = x - \frac{1}{3}$ spełnia równanie $2f(x) + f(1-x) = x$.

157. $f(x) = \frac{x}{4x-4}$.

158. $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

159. Załóżmy, że istnieje funkcja f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ spełniająca podane równanie. Podstawiając do równania w miejsce x liczbę $-x$ otrzymamy:

$$\alpha f(-x) + \beta f(x) = (\alpha+\beta)(-x+1). \tag{1}$$

Jeżeli $\alpha = 0$, to $\beta \neq 0$. Wtedy $\beta f(x) = \beta(-x+1)$, skąd $f(x) = -x+1$.
Niech $\alpha \neq 0$. Wtedy z (1):

$$f(-x) = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)(-x+1) - \frac{\beta}{\alpha} f(x). \tag{2}$$

Podstawiając do równania funkcyjnego w miejsce $f(-x)$ prawą stronę równości (2) otrzymamy:
$\alpha f(x) + \left(\beta + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)(-x+1) - \frac{\beta^2}{\alpha} f(x) = (\alpha+\beta)(x+1)$. Stąd
$(\alpha-\beta)f(x) = (\alpha+\beta)x + (\alpha-\beta)$.
Jeżeli $\alpha = \beta$, powyższa równość jest sprzeczna dla $x \in \boldsymbol{R}$.
Jeżeli $\alpha \neq \beta$, to: $f(x) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} x + 1$.
Łatwo sprawdzić, że powyższa funkcja spełnia podane równanie funkcyjne.

160. Korzystając z nierówności pomiędzy średnią harmoniczną i geometryczną dla liczb x i $\frac{1}{x}$, przy dowolnie ustalonym $x \in \mathbf{R}_+$ otrzymamy nierówność:

$$\frac{2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}} \leqslant \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}},$$ czyli $\frac{2x}{x^2+1} \leqslant 1$, przy czym równość jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $x=\frac{1}{x}$, czyli gdy $x=1$. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że największa wartość funkcji f jest równa 1.

161. Ponieważ dla $x>0$ mamy $f(x)>0$, dla $x<0$ mamy $f(x)<0$, a dla $x=0$, $f(x)=0$, więc funkcja f osiągnie wartość największą w punkcie należącym do zbioru $\mathbf{R}_+$. Ustalając dowolnie a, b, $x \in \mathbf{R}_+$, wykorzystamy nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb ax^2 i b. Wtedy: $\frac{ax^2+b}{2} \geqslant \sqrt{abx^2}$, czyli $ax^2+b \geqslant 2x\sqrt{ab}$.

Stąd $\frac{x}{ax^2+b} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{ab}}$, przy czym równość jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $ax^2=b$, czyli gdy $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$. Największa wartość funkcji f jest równa $\frac{1}{2\sqrt{ab}}$. Ponieważ funkcja f jest nieparzysta, więc najmniejsza wartość funkcji jest równa $\frac{-1}{2\sqrt{ab}}$ dla $x=-\sqrt{\frac{b}{a}}$.

162. Korzystając z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb x^3, $\frac{16}{x}$, $\frac{16}{x}$, $\frac{16}{x}$ otrzymamy: $\frac{x^3+\frac{16}{x}+\frac{16}{x}+\frac{16}{x}}{4} \geqslant \sqrt[4]{x^3 \cdot \frac{16}{x} \cdot \frac{16}{x} \cdot \frac{16}{x}}$, czyli $x^3+\frac{48}{x} \geqslant 32$, przy czym równość jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $x^3=\frac{16}{x}$, czyli gdy $x=2$. Najmniejszą wartością funkcji jest 32.

163. $f(x)=x^4-x^6=x^4(1-x^2)=2^2\left(\frac{x^2}{2}\right)^2(1-x^2)=2^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot(1-x^2)$.

Korzystając z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^2}{2}$, $1-x^2$ otrzymamy $\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+1-x^2}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot(1-x^2)}$, skąd $\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot(1-x^2) \leqslant \frac{1}{27}$. Wobec tego $f(x)=2^2\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}(1-x^2) \leqslant 2^2\cdot\frac{1}{27}=\frac{4}{27}$.

Funkcja f największą wartość równą $\frac{4}{27}$ przyjmuje gdy $\frac{x^2}{2}=1-x^2$, czyli dla $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

164. Dziedziną podanej funkcji jest przedział $\langle 0;\ 2\rangle$. Zauważmy, że $f(x)=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}=\sqrt{x}+2\sqrt{2}\sqrt{2-x}$.

Ustalmy dowolnie $x \in \langle 0; 2\rangle$. Wykorzystując nierówność Schwarza dla liczb $a_1=1$, $a_2=2\sqrt{2}$, $b_1=\sqrt{x}$, $b_2=\sqrt{2-x}$ otrzymamy: $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x}=$ $=|1\cdot\sqrt{x}+2\sqrt{2}\sqrt{2-x}| \leqslant \sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{2-x})^2}=3\sqrt{2}$.

Zbadamy, czy istnieje takie $x \in \langle 0; 2\rangle$, że $f(x)=3\sqrt{2}$. Gdy $x \in \langle 0; 2\rangle$, to:

$\sqrt{x}+2\sqrt{2}\sqrt{2-x}=3\sqrt{2}$,

$(\sqrt{x}+2\sqrt{2}\sqrt{2-x})^2=18$,

$x+4\sqrt{2}\sqrt{x(2-x)}+8(2-x)=18$,

$4\sqrt{2}\sqrt{x(2-x)}=2+7x$,

$\left(4\sqrt{2}\sqrt{x(2-x)}\right)^2=(2+7x)^2$,

$32x(2-x)=4+28x+49x^2$,

$64x-32x^2=4+28x+49x^2$,

$81x^2-36x+4=0$,

$(9x-2)^2=0$,

$x=\frac{2}{9}$.

Wobec tego funkcja f przyjmuje wartość największą równą $3\sqrt{2}$ dla $x=\frac{2}{9}$.

165. Oznaczmy przez x jeden ze składników. Wtedy drugi składnik jest równy $a-x$. Oznaczmy przez y iloczyn rozważnych składników. Wtedy $y=x(a-x)$. Oczywiście $x \in (0;\ a)$. Szukamy więc największej wartości funkcji $(0;\ a) \ni x \to x(a-x)$.

Porównując średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb x i $a-x$ otrzymamy: $\frac{x+(a-x)}{2} \geqslant \sqrt{x(a-x)}$, czyli $\frac{a}{2} \geqslant \sqrt{x(a-x)}$. Stąd $\frac{a^2}{4} \geqslant x(a-x)$, przy czym równość jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $x=a-x$, czyli gdy $x=\frac{a}{2}$. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że funkcja określona wzorem $y=x(a-x)$ osiąga wartość największą równą $\frac{a^2}{4}$ dla $x=\frac{a}{2}$. Szukanymi składnikami są zatem liczby: $\frac{a}{2}$ i $\frac{a}{2}$.

166. Oznaczmy przez x długość jednego boku prostokąta. Wtedy drugi bok jest równy $p-x$. Oznaczmy przez S pole prostokąta. Stąd $S=x(p-x)$, gdzie $x \in (0;\ p)$. Postępując podobnie jak w zadaniu 165 otrzymamy $x=\frac{p}{2}$. Zatem ze wszystkich prostokątów o stałym obwodzie $2p$, największe pole ma kwadrat.

167. Oznaczmy przez x długość jednego boku prostokąta. Wtedy drugi bok ma długość $\frac{S}{x}$. Oznaczmy przez l obwód prostokąta. Stąd $l=2x+\frac{2S}{x}$, gdzie $x \in (0; \infty)$. Wykorzystując nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb $4x$ i $\frac{4S}{x}$

otrzymamy: $\dfrac{4x+\frac{4S}{x}}{2}\geqslant\sqrt{4x\frac{4S}{x}}$, czyli $2x+\frac{2S}{x}\geqslant 4\sqrt{S}$, przy czym równość jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $4x=\frac{4S}{x}$, czyli gdy $x=\sqrt{S}$. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że spośród wszystkich prostokątów o stałym polu S najmniejszy obwód ma prostokąt o bokach $\sqrt{S}$ i $\frac{S}{\sqrt{S}}$, czyli kwadrat.

168. Oznaczmy przez x długość krawędzi podstawy, przez y długość krawędzi bocznej rozważanego prostopadłościanu. Pole S powierzchni całkowitej jest wtedy równe: $S=2x^2+4xy$. Wiadomo, że $x^2y=V$. Stąd $y=\frac{V}{x^2}$. Wobec tego $S=2x^2+\frac{4V}{x}$.
Oczywiście $x>0$. Szukamy więc takiego x, by funkcja $(0;\infty)\ni x\to S=2x^2+\frac{4V}{x}$ osiągała wartość najmniejszą. Zagadnienie powyższe jest równoważne znalezieniu takiego x, by funkcja $(0;\infty)\ni x\to f(x)=x^2+\frac{2V}{x}$ osiągała wartość najmniejszą.
Ustalamy dowolnie $x\in \boldsymbol{R}_+$. Wykorzystując nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb $x^2, \frac{V}{x}, \frac{V}{x}$ otrzymamy:
$\dfrac{x^2+\frac{V}{x}+\frac{V}{x}}{3}\geqslant\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{V}{x}\cdot\frac{V}{x}}$, czyli $x^2+\frac{2V}{x}\geqslant 3\sqrt[3]{V^2}$, przy czym równość jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2=\frac{V}{x}$, a więc gdy $x=\sqrt[3]{V}$. Jeśli $x=\sqrt[3]{V}$, to $y=\frac{V}{(\sqrt[3]{V})^2}=\sqrt[3]{V}$.
Z przeprowadzonych rozważań wynika, że najmniejsze pole powierzchni całkowitej ma sześcian o krawędzi długości $\sqrt[3]{V}$.

169. Oznaczmy przez x, y, z długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka, przez V objętość prostopadłościanu. Wtedy $V=xyz$, gdzie $x, y, z\in \mathrm{R}_+$. Korzystając z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb x, y, z otrzymamy $\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}$. Stąd i z faktu, że $x+y+z=c$: $\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{c}{3}$, czyli $xyz\leqslant\frac{c^3}{27}$, przy czym równość jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y=z=\frac{c}{3}$. Zatem wśród rozważanych prostopadłościanów największą objętość ma sześcian.

170. Z określenia funkcji d wynika, że $d\colon \boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}_+\cup\{0\}$. Dla dowolnych $x, y, x\in\boldsymbol{R}$ mamy:
$d(x, y)=0\Leftrightarrow|x-y|=0\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$,
$d(x, y)=|x-y|=|y-x|=d(y,x)$,
$d(x, z)=|x-z|=|(x-y)+(y-z)|\leqslant|x-y|+|y-z|=d(x,y)+d(y,z)$.

171. Własności: $d\colon Z^2\to\boldsymbol{R}_+\cup\{0\}$, $d(x, y)=0\Leftrightarrow x=y$, $d(x, y)=d(y, x)$ wynikają wprost z określenia funkcji d.
Dla udowodnienia własności $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$ rozważamy przypadki:

1) $x\neq y\neq z\neq x$,	4) $x=y=z$,
2) $x=y\neq z$,	5) $x=z\neq y$,
3) $x\neq y=z$,	

które wyczerpują wszystkie możliwości. W każdym z wymienionych przypadków łatwo dowodzimy żądaną nierówność.

172. Własności: $d\colon \pi^2\to\boldsymbol{R}_+\cup\{0\}$, $d(A, B)=0\Leftrightarrow A=B$, $d(A, B)=d(B, A)$, wynikają natychmiast z określenia funkcji d. Dla udowodnienia własności $d(A, C)\leqslant d(A, B)+d(B, C)$ wykorzystamy nierówność Schwarza:
$|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$.
Niech $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2, y_2)$, $C=(x_3, y_3)$. Trzeba wykazać, że:
$\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}\leqslant\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$.
Przekształcając nierówność otrzymujemy do udowodnienia:
$-x_1x_3-y_1y_3+x_1x_2+y_1y_2+x_2x_3+y_2y_3-x_2{}^2-y_2{}^2\leqslant$
$\leqslant\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$.
Wykorzystując nierówność Schwarza wystarczy pokazać, że:
$-x_1x_3-y_1y_3+x_1x_2+y_1y_2+x_2x_3+y_2y_3-x_2^2-y_2^2\leqslant$
$\leqslant|(x_2-x_1)(x_3-x_2)+(y_2-y_1)(y_3-y_2)|$, czyli, że:
$-x_1x_3-y_1y_3+x_1x_2+y_1y_2+x_2x_3+y_2y_3-x_2^2-y_2^2\leqslant$
$\leqslant|-x_1x_3-y_1y_3+x_1x_2+y_1y_2+x_2x_3+y_2y_3-x_2^2-y_2^2|$, a ta nierówność jest prawdziwa.

173. Własności: $d\colon \pi^2\to\boldsymbol{R}_+\cup\{0\}$, $d(A, B)=0\Leftrightarrow A=B$, $d(A, B)=d(B, A)$ wynikają wprost z określenia funkcji d.
Niech $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$, $C=(x_3, y_3)$. Wtedy:
$d(A, B)+d(B, C)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|+|x_3-x_2|+|y_3-y_2|=(|x_2-x_1|+|x_3-x_2|)+$
$+(|y_2-y_1|+|y_3-y_2|)\geqslant|x_2-x_1+x_3-x_2|+|y_2-y_1+y_3-y_2|)=$
$=|x_3-x_1|+|y_3-y_1|=d(A, C)$.

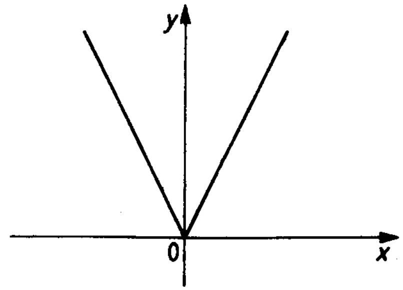
§ 3. Funkcja liniowa. Równania i nierówności stopnia pierwszego

174. Oznaczmy szukaną funkcję przez f. Ponieważ jest to funkcja liniowa, więc $f\colon y=ax+b$. Punkt $A=(-2, 3)$ należy do wykresu funkcji f,
więc $3=-2a+b$. (1)
Z treści zadania wynika, że dla argumentu $x=2$ funkcja f przyjmuje wartość $y=0$.
Stąd $0=2a+b$ (2)
Z (1) i (2) otrzymamy: $a=-\frac{3}{4}$ i $b=\frac{3}{2}$. Wobec tego szukaną funkcją jest funkcja $f\colon y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$.

175. $y=-x-3$. **176.** $y=2x-5$.

177. Funkcja f jest określona następująco:

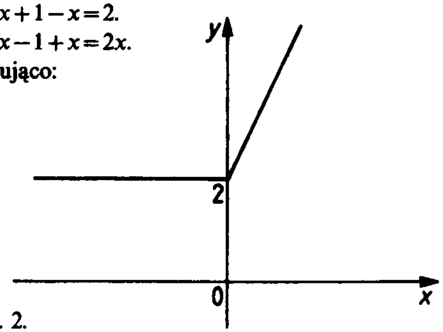
$$y=\begin{cases} 2x & \text{dla } x\geqslant 0 \\ -2x & \text{dla } x<0 \text{ (rys. 1).}\end{cases}$$



Rys. 1.

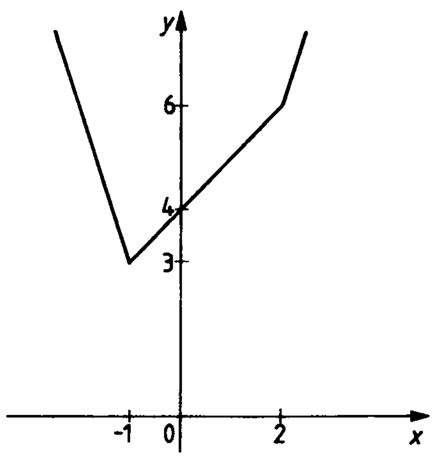
178. Jeżeli $1-x\geqslant 0$, czyli $x\leqslant 1$, to $y=1+x+1-x=2$.
Jeżeli $1-x<0$, czyli $x>1$, to $y=1+x-1+x=2x$.
Funkcja f określona więc jest następująco:

$$y=\begin{cases} 2 & \text{dla } x\leqslant 1 \\ 2x & \text{dla } x>1 \text{ (rys. 2).}\end{cases}$$



Rys. 2.

179. Jeżeli $x\in(-\infty;\,-1)$, to $y=2(-x-1)+(-x+2)=-3x$.
Jeżeli $x\in\langle -1;\,2)$, to $y=2(x+1)+(-x+2)=x+4$.
Jeżeli $x\in\langle 2;\,\infty)$, to $y=2(x+1)+(x-2)=3x$ (rys. 3).

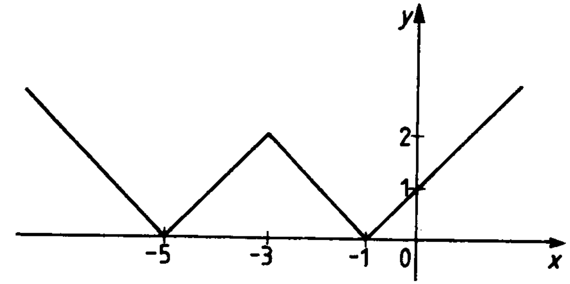


Rys. 3.

180. Wskazówka: $\sqrt{a^2}=|a|$.

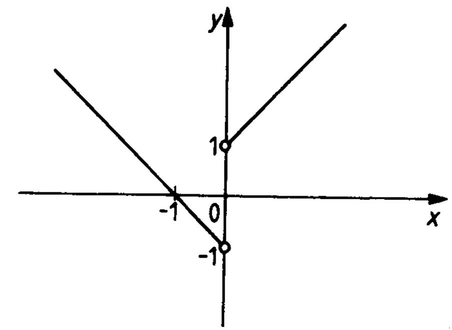
181. Wskazówka: $\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$ i $\sqrt{x^2-6x+9}=|x-3|$.

182. Rys. 4.



Rys. 4.

183. Jeżeli $x>0$, to $y=x+1$. Jeżeli $x<0$, to $y=-x-1$ (rys. 5).

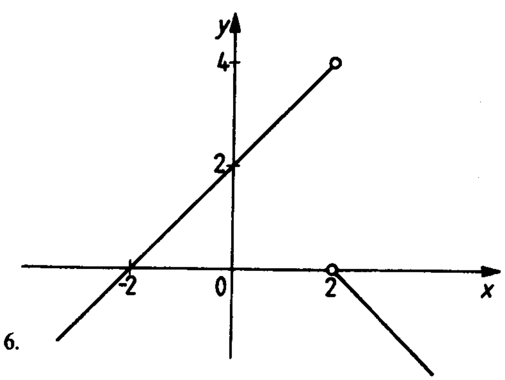


Rys. 5.

184. Jeżeli $x-2>0$, czyli $x>2$, to $y=-x+2$.
Jeżeli $x-2<0$, czyli $x<2$, to $y=x+2$ (rys. 6).

185. $x=\frac{1}{7}$.

186. $x=\frac{5(3\sqrt{2}+\sqrt{2})}{7}$.



Rys. 6.

187. $x=\frac{-15}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}-2}$.

188. Równanie sprzeczne.

189. Równanie tożsamościowe.

190. Podanemu równaniu równoważna jest alternatywa: $3x+\frac{1}{2}=4$ lub $3x+\frac{1}{2}=-4$. Stąd $x=\frac{7}{6}$ lub $x=-\frac{3}{2}$.

191. Jeżeli $7x-1\geqslant 0$, to równanie przyjmuje postać $7x-1=2x+3$. Jeżeli $7x-1<0$, to równanie przyjmuje postać $-7x+1=2x+3$. Stąd $x=\frac{4}{5}$ lub $x=-\frac{2}{9}$.

192. W przedziale $(-\infty;-2)$ podane równanie przyjmuje postać
$-x-2-x+2=4$.
W przedziale $\langle -2;2)$ podane równanie przyjmuje postać
$x+2-x+2=4$.
W przedziale $\langle 2;\infty)$ podane równanie przyjmuje postać $x+2+x-2=4$.
Stąd $x\in\langle -2;2\rangle$.

193. $x=1$ lub $x=\frac{11}{2}$.

194. $x\in(2;\infty)$.

195. $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.

196. $x\in\left\langle -\frac{5}{11};\infty\right)$.

197. $x\in\left\langle \frac{27}{23};\infty\right)$.

198. $x\in \boldsymbol{R}$.

199. Nierówność sprzeczna.

200. Podana nierówność jest równoważna układowi nierówności: $3x-2<1$ i $3x-2>-1$. Stąd $x\in\left(\frac{1}{3};1\right)$.

201. Podana nierówność jest równoważna alternatywie nierówności: $5+\frac{x+1}{2}>3$ lub $5+\frac{x+1}{2}<-3$, Stąd $x\in(-\infty;-17)\cup(-5;\infty)$.

202. $x\in\langle 20;36\rangle$.

203. $x\in(-\infty;-3\rangle\cup\langle 5;\infty)$.

204. $x\in(-\infty;-1)$.

205. W przedziale $(-\infty;-3)$ podana nierówność przyjmuje postać $-x-3-(-x)>1$. W przedziale $\langle -3;0)$ podana nierówność przyjmuje postać $x+3-(-x)>1$. W przedziale $\langle 0;\infty)$ podana nierówność przyjmuje postać $x+3-x>1$. Stąd $x\in(-1;\infty)$.

206. $x\in\left(-\frac{7}{8};\frac{1}{5}\right)$.

207. $x\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)$.

208. Dziedziną D_f funkcji f będzie zbiór rozwiązań układu nierówności: $1-4x\geqslant 0$ i $3+x\neq 0$, i $3-x\neq 0$. Stąd $D_f=(-\infty;-3)\cup\left(-3,\frac{1}{4}\right\rangle$.

209. $D_f=\left\langle\frac{1}{3};\frac{7}{2}\right)$.

210. $D_f=(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$.

211. $D_f=\left\{\frac{7}{5}\right\}$.

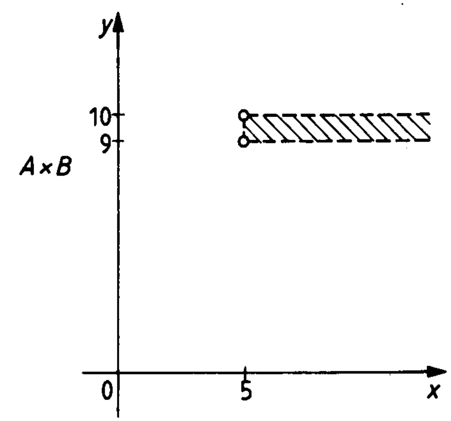
212. $D_f=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

213. Zbiorem rozwiązań podanego układu nierówności jest przedział $\langle -1;\infty)$. Stąd szukaną liczbą n naturalną jest 1.

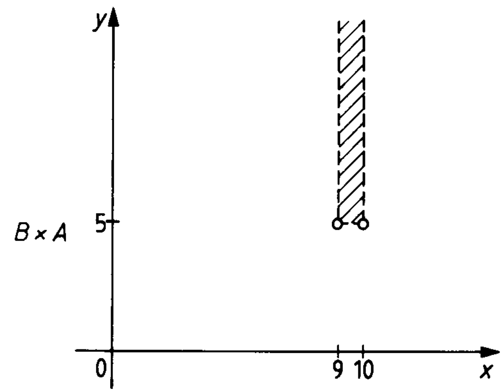
214. Szukanymi liczbami naturalnymi są liczby 2 i 3.

215. Szukanymi liczbami całkowitymi są liczby: -2, -1, 0, 1, 3.

216. $A=\langle 5;\infty)$, $B=(9;10)$.
a) $A\cup B=\langle 5;\infty)$, $A\cap B=(9;10)$, $A-B=\langle 5;9\rangle\cup\langle 10;\infty)$, $B-A=\emptyset$.
b) Rys. 7 i rys. 8.



Rys. 7.



Rys. 8.

217. Rozwiązując podane równanie otrzymujemy $x=\frac{3k-4}{5}$. Liczba $\frac{3k-4}{5}$ będzie należeć do przedziału $\langle -1;2\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy k będzie spełniać układ nierówności: $\frac{3k-4}{5}>-1$ i $\frac{3k-4}{5}\leqslant 2$. Stąd $k\in\left(-\frac{1}{3};\frac{14}{3}\right\rangle$.

218. Podane równanie przekształcamy do postaci $x(3a+2)=8a+15$. Równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $3a+2\neq 0$, czyli gdy $a\neq -\frac{2}{3}$; jest sprzeczne, gdy $3a+2=0$ i $8a+15\neq 0$, czyli gdy $a=-\frac{2}{3}$; dla żadnej wartości parametru a równanie nie jest tożsamościowe.

219. Równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $a\neq -\frac{1}{2}$; jest sprzeczne, gdy $a=-\frac{1}{2}$ i $b\neq -\frac{5}{6}$; jest tożsamościowe, gdy $a=-\frac{1}{2}$ i $b=-\frac{5}{6}$.

220. Podanemu równaniu równoważna jest alternatywa równań: $ax=-b+1$ lub $ax=-b-1$. Równanie ma dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $a\neq 0$; jest tożsamościowe, gdy $a=0$ i ($b=1$ lub $b=-1$); jest sprzeczne, gdy $a=0$ i $b\neq 1$ i $b\neq -1$.

221. Jeżeli $b<0$, to równanie jest sprzeczne. Jeżeli $b=0$, to podane równanie przyjmuje postać $ax=1$. Gdy $a\neq 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie, gdy $a=0$, to równanie jest sprzeczne. Jeżeli $b>0$, to podane równanie jest równoważne alternatywie równań: $ax=b+1$ lub $ax=-b+1$. Gdy $a\neq 0$, to równanie ma dwa rozwiązania, gdy $a=0$ i $b\neq 1$, to równanie jest sprzeczne, a gdy $a=0$ i $b=1$ to równanie jest tożsamościowe. Równanie ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $a\neq 0$ i $b=0$; ma dwa rozwiązania, gdy $a\neq 0$ i $b>0$; jest tożsamościowe, gdy $a=0$ i $b=1$; jest sprzeczne, gdy $b<0$ lub $a=0$ i $b\geqslant 0$ i $b\neq 1$.

222. $x=-\frac{9}{5}$ i $y=\frac{11}{5}$.

223. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (układ równań zależnych). Rozwiązaniami układu są wszystkie pary $\left(x, \frac{x-1}{2}\right)$, gdzie $x\in \mathbf{R}$.

224. Układ sprzeczny.

225. $x=-2$ i $y=-\frac{1}{2}$ i $z=\frac{7}{2}$.

226. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Rozwiązaniami układu są wszystkie trójki $(-3z, z, z)$, gdzie $z\in \mathbf{R}$.

227. Układ sprzeczny.

228. Rozwiązując podany układ otrzymamy: $x=\frac{3p+4}{3}$ i $y=\frac{6p-7}{3}$. Liczby $\frac{3p+4}{3}$ i $\frac{6p-7}{3}$ będą nieujemne wtedy i tylko wtedy, gdy: $\frac{3p+4}{3}\geqslant 0$ i $\frac{6p-7}{3}\geqslant 0$. Stąd rozwiązanie: $p\in\left\langle\frac{7}{6}; \infty\right)$.

229. $p\in\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3}; \infty\right)$.

230. Rozwiązując podany układ równań otrzymamy: $x=\frac{4m-1}{5}$ i $y=\frac{m+1}{5}$. Należy znaleźć wszystkie wartości m, dla których: $\left|\frac{4m-1}{5}\right|+\left|\frac{m+1}{5}\right|\leqslant 1$. Rozwiązując powyższą nierówność otrzymujemy: $m\in\langle -1; 1\rangle$.

231. Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $m\neq -3$ i $m\neq 3$; ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $m=-3$; jest sprzeczny, gdy $m=3$.

232. Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $a\neq -2$ i $a\neq 2$; ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $a=2$; jest sprzeczny, gdy $a=-2$.

233. Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $a\neq 2$; ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $a=2$ i $b=\frac{1}{2}$; jest sprzeczny, gdy $a=2$ i $b\neq\frac{1}{2}$.

234. Prosta przechodząca przez punkty $(0, -1)$ i $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

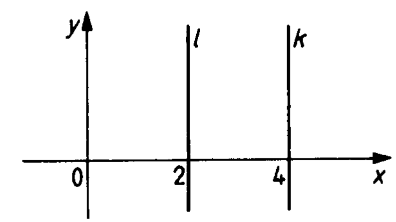
235. Prosta przechodząca przez punkt $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ i prostopadła do osi x.

236. Prosta przechodząca przez punkt $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ i prostopadła do osi y.

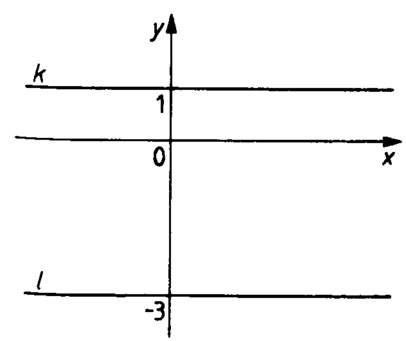
237. Szukanym zbiorem punktów jest figura $l\cup k$ (rys. 9).

238. Szukanym zbiorem punktów jest figura $l\cup k$ (rys. 10).

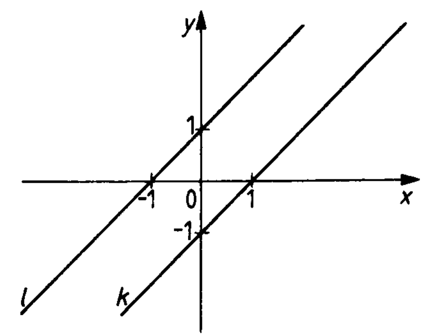
239. Szukanym zbiorem punktów jest figura $l\cup k$ (rys. 11).



Rys. 9.

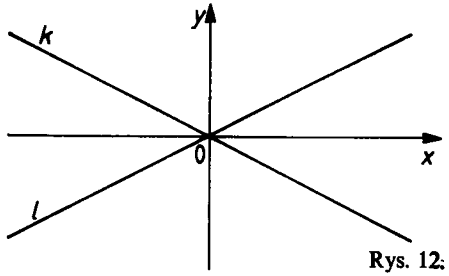


Rys. 10.



Rys. 11.

240. $x^2-4y^2=0$,
$(x-2y)(x+2y)=0$,
$x-2y=0$ lub $x+2y=0$.
Szukanym zbiorem punktów jest figura $l \cup k$ (rys. 12).



Rys. 12.

241. $y^2+6x=x^2+9$,
$y^2=x^2-6x+9$,
$y^2=(x-3)^2$,
$y^2-(x-3)^2=0$,
$(y-x+3)(y+x-3)=0$.
$y-x+3=0$ lub $y+x-3=0$.
Szukanym zbiorem punktów jest suma prostych o równaniach: $y-x+3=0$, $y+x-3=0$.

242. Strona prostej o równaniu $3x-y+1=0$ do której nie należy punkt $(0, 0)$.

243. Półpłaszczyzna, której krawędzią jest prosta o równaniu $2x+y+3=0$ i do której należy punkt $(0, 0)$.

244. Strona prostej o równaniu $2x+3=0$ do której należy punkt $(0, 0)$.

245. Półpłaszczyzna, której krawędzią jest prosta o równaniu $3y-5=0$ i do której należy punkt $(0, 0)$.

246. Wskazówka: Podanej nierówności równoważna jest alternatywa: $x \geqslant 2$ lub $x \leqslant -4$.

247. Wskazówka: Podanej nierówności równoważna jest koniunkcja: $y>\frac{1}{2}$ i $y<\frac{5}{2}$.

248. Wskazówka: Podanej nierówności równoważna jest alternatywa: $x+y>1$ lub $x+y<-1$.

249. Wskazówka: Podanej nierówności równoważna jest koniunkcja: $x-3y \leqslant 0$ i $3x+y \geqslant 0$.

250. Wskazówka: Rozważ przypadki: 1) $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$, 2) $x \geqslant 0$ i $y<0$, 3) $x<0$ i $y \geqslant 0$, 4) $x<0$ i $y<0$.

251. Wskazówka: Następujące warunki są równoważne:
$x^2>y^2$,
$x^2-y^2>0$,
$(x-y)(x+y)>0$,
$x-y<0$ i $x+y<0$ lub $x-y>0$ i $x+y>0$.

252. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 251.

253. Następujące warunki są równoważne:
$x^2+y^2 \leqslant 2x+4y-5$,
$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4) \leqslant 0$,
$(x-1)^2+(y-2)^2 \leqslant 0$,
$x-1=0$ i $y-2=0$,
$x=1$ i $y=2$.
Szukanym zbiorem punktów jest zbiór złożony z punktu $(1, 2)$.

254. Wskazówka: Następujące warunki są równoważne:
$3x^2+8y^2+14xy>0$,
$4x^2+9y^2+14xy>x^2+y^2$,
$4x^2+12xy+9y^2>x^2-2xy+y^2$,
$(2x+3y)^2>(x-y)^2$,
$(2x+3y)^2-(x-y)^2>0$,
$(2x+3y-x+y)(2x+3y+x-y)>0$,
$(x+4y)(3x+2y)>0$,
$x+4y>0$ i $3x+2y>0$ lub $x+4y<0$ i $3x+2y<0$.

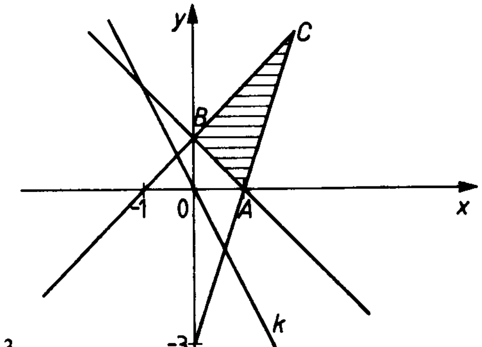
255. Wskazówka: Podanemu równaniu równoważna jest alternatywa: $x+y \geqslant 0$ i $x-y \geqslant 0$, i $x=1$ lub $x+y \geqslant 0$ i $x-y<0$, i $y=1$, lub $x+y<0$ i $x-y \geqslant 0$, i $y=-1$, lub $x+y<0$ i $x-y<0$, i $x=-1$.

256. Wskazówka: Równanie $d(O, P)=2$ jest równoważne równaniu $|x|+|y|=2$.

257. Wskazówka: Nierówność $d(A, P) \leqslant 1$ jest równoważna nierówności $|x-1|+|y-1| \leqslant 1$.

258. Wskazówka: Równanie $d(A, P)=d(B, P)$ jest równoważne równaniu $|x|+|y|= =|x-1|+|y-1|$.

259. Zbiorem rozwiązań układu nierówności $x-y+1 \geqslant 0$ i $x+y-1 \geqslant 0$, i $-3x+y+3 \geqslant 0$ jest trójkąt ABC, gdzie $A=(1, 0)$, $B=(0, 1)$, $C=(2, 3)$ (rys. 13).



Rys. 13.

Równanie $z=2x+y$ z niewiadomymi x, y gdzie $z \in \boldsymbol{R}$ przedstawia rodzinę wszystkich prostych równoległych do prostej k: $2x+y=0$. Warunki zadania będą spełnione dla prostej z tej rodziny, która przechodzi przez punkt C. Stąd $z=7$.

260. $z=31$.

261. $z_{\max}=8$, $z_{\min}=\frac{11}{5}$.

262. Oznaczmy przez x liczbę uczniów w szkole Pitagorasa. Z treści zadania wynika, że x musi być liczbą naturalną podzielną przez 4 i przez 7. Otrzymamy równanie:
$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x$. Stąd $x=28$.

263. 25 uczniów.

264. Oznaczmy przez x liczbę odpowiedzi dobrych, a przez y liczbę odpowiedzi złych uczestnika. Oczywiście $x, y \in N$ i $x > y$. Z treści zadania otrzymamy układ równań: $x+y=30$ i $7x-12y=77$. Stąd $x=23$ i $y=7$.

265. Oznaczmy przez x cyfrę jedności, przez y cyfrę dziesiątek szukanej liczby. Oczywiście $x, y \in \{1, 2, ..., 9\}$. Ma ona postać $10y+x$, a liczba o przestawionych cyfrach postać: $10x+y$. Z treści zadania otrzymamy układ równań:

$x+y=8$ i $10y+x=(10x+y)+36$. Stąd $x=2$ i $y=6$. Szukaną liczbą jest 62.

266. Szukaną liczbą jest 324.

267. Oznaczmy przez x pierwotną cenę książki. Zakładamy, że $x > 5358$. Z treści zadania otrzymamy równanie:

$\left(x-\frac{25}{100}x\right)-\frac{5}{100}\left(x-\frac{25}{100}x\right)=5358$. Stąd $x=7520$.

268. Oznaczmy przez x prędkość statku względem wody, a przez y prędkość prądu rzeki i załóżmy, że $x > y > 0$. Z treści zadania otrzymamy układ równań: $2(x+y)=40$ i $\frac{5}{2}(x-y)=35$. Stąd $x=17$ i $y=3$ (mierzone w km/h).

269. Oznaczmy przez s odległość z Wrocławia do Szczecina, którą przebędzie statek płynący Odrą, przez t czas przepływu wody Odry z Wrocławia do Szczecina (mierzony w dobach) oraz przez x prędkość statku względem wody Odry. Zakładamy, że $t > 0$ i $x > \frac{s}{t}$ (oczywiście $s > 0$). Z treści zadania otrzymamy układ równań:

$3\left(x+\frac{s}{t}\right)=s$ i $6\left(x-\frac{s}{t}\right)=s$, skąd $t=12$.

270. Oznaczmy przez x ciężar miedzi i przez y ciężar cynku w rozważanym stopie ($x,y \in (0;\ 24)$). Z treści zadania otrzymamy układ równań:

$x+y=24$ i $\frac{100}{9}\cdot\frac{1}{100}x+\frac{100}{7}\cdot\frac{1}{100}y=\frac{26}{9}$. Stąd $x=17\mathrm{N}$ i $y=7\mathrm{N}$.

271. Oznaczmy przez x ciężar ołowiu w stopie. Wtedy ciężar cynku w tym stopie jest równy $292-x$. Oczywiście $x \in (0;\ 292)$. Z treści zadania wynika, że ciężar cynku w wodzie jest równy $\frac{31}{36}$, a ciężar ołowiu w wodzie jest równy $\frac{21}{23}$ ciężaru tych metali w powietrzu. Otrzymamy zatem, równanie: $\frac{31}{36}(292-x)+\frac{21}{23}x=261$. Cierpliwie przeliczając otrzymamy $x=184$.

272. Oznaczmy przez x wiek dziadka, a przez y wiek babki. Założyć należy, że $x > y > 0$ i $x < 140$. Wtedy $x-y$ oznacza liczbę lat, o którą dziadek był starszy od babki, a $y-(x-y)$ oznacza wiek babki, gdy dziadek miał y lat. Z treści zadania wynika układ równań: $x+y=140$ i $x=2[y-(x-y)]$. Stąd $x=80$ i $y=60$.

§ 4. Funkcja kwadratowa. Równania i nierówności stopnia drugiego

273. a) $b=-2$ i $c=-3$,
b) $x \in (-1;\ 3)$,
c) $y_{min}=-4$ dla $x=1$,
d) $(-\infty;\ 1)$,
e) $\langle -4;\ \infty)$,
f) Postać kanoniczna: $y=(x-1)^2-4$,
postać iloczynowa: $y=(x+1)(x-3)$,
g) $x=1$.

274. Z treści zadania wynika układ równań: $-\frac{b}{2}=2$ i $5=2^2+2b+c$.
Stąd $b=-4$ i $c=9$.

275. Z treści zadania wynika układ: $a<0$ i $-1=a+b+c$, i $-\frac{b}{2a}=2$, i $4a+2b+c=1$.
Stąd $a=-2$ i $b=8$, i $c=-7$.

276. $f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+5-ax^2-bx-5=2ax+b$.
Zatem $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} f(x+1)-f(x)=8x+3$, czyli $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} 2ax+b=8x+3$.
Stąd $a=4$ i $b=3$.

277. Niech $f(x)=ax^2+bx+c$. Z treści zadania wynika, że
$\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} a(x+1)^2+b(x-1)+c=2x^2-3x+1$ czyli, że
$\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} ax^2+(b-2a)x+a-b+c=2x^2-3x+1$.
Stąd $a=2$ i $b-2a=-3$ i $a-b+c=1$.
Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy: $a=2$ i $b=1$, i $c=0$.
Zatem $f(x)=2x^2+x$, skąd $f(x+1)=2x^2+5x+3$.

278. Niech x_1, x_2 będą miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y=ax^2+bx+c$, a x_W odciętą wierzchołka paraboli będącej jej wykresem. Wiadomo, że $x_W=\frac{-b}{2a}$ i $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$. Zatem $x_W=\frac{x_1+x_2}{2}$. Stąd i z faktu, że $x_1=1$, a $x_W=2$ wynika, że $\frac{1+x_2}{2}=2$. Wobec tego $x_2=3$.

279. $x=-5$ lub $x=1$.

280. $x=0$ lub $x=1$, lub $x=-3$, lub $x=-2$.

281. $x=2$ lub $x=-2$, lub $x=3$, lub $x=-3$. Wskazówka: Przyjmij, że $x^2=t$.

282. $x=-1$ lub $x=1$, lub $x=2$, lub $x=4$. Wskazówka: Przyjmij, że $x^2-3x=t$.

283. $x=-1$ lub $x=1$, lub $x=4$, lub $x=6$. Wskazówka: Przyjmij, że $x^2-5x=t$, otrzymasz równanie $t(t-2)=24$.

284. $x=0$ lub $x=-4$. Wskazówka: Przyjmij, że $x^2-4x+2=t$, otrzymasz równanie $t+6=t(t+2)$.

285. Podane równanie przekształcamy do postaci $(x^2-3x)(x^2-3x+2)=120$. Podstawiając $x^2-3x=t$ otrzymujemy równanie $t(t+2)=120$, którego rozwiązaniami są liczby $t_1=-12$ i $t_2=10$. Wobec tego równanie wyjściowe będzie spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2-3x=-12$ lub $x^2-3x=10$. Stąd $x=-2$ lub $x=5$.

286. Przenosząc x na prawą stronę i podnosząc obie strony równania do kwadratu mamy $x^2-6x+5=0$. Stąd $x=1$ lub $x=5$. Wstawiając uzyskane liczby do równania wyjściowego stwierdzamy, że spełnia je jedynie liczba 1.
Uwaga: Ten sposób rozwiązywania równań nazywa się metodą analizy starożytnych.

287. $x=7$. Wskazówka: Zastosuj metodę analizy starożytnych lub ustal dziedzinę równania, zapisz równanie w postaci $\sqrt{x-3}+x-3=6$ i przyjmij, że $\sqrt{x-3}=t$.

288. I sposób (metoda analizy starożytnych)

Podnosząc obie strony danego równania do kwadratu otrzymujemy równanie $4x+2+2+2\sqrt{4x+2}\cdot\sqrt{4x-2}+4x-2=16$, czyli równanie $\sqrt{4x^2-1}=4-2x$. Podnosząc obie strony ostatniego równania do kwadratu mamy dalej $4x^2-1=(4-2x)^2$. Stąd $x=\frac{17}{16}$. Przez podstawienie tego wyniku do równania wyjściowego stwierdzamy, że spełnia on to równanie. Wobec tego jedynym rozwiązaniem danego równania jest liczba $\frac{17}{16}$.

II sposób

Przyjmując, że $\sqrt{4x+2}-\sqrt{4x-2}=z$ tworzymy układ równań: $\sqrt{4x+2}-\sqrt{4x-2}=z$ i $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$. Mnożąc, a także dodając te równania stronami otrzymamy układ: $4x+2-(4x-2)=4z$ i $2\sqrt{4x+2}=z+4$. Z równania pierwszego $z=1$. Wobec tego $2\sqrt{4x+2}=5$. Stąd $x=\frac{17}{16}$. Przez podstawienie sprawdzamy, że $x=\frac{17}{16}$ spełnia równanie wyjściowe.

289. Po podniesieniu obu stron równania do kwadratu otrzymujemy $5x+7-2\sqrt{15x^2+26x+7}+3x+1=x+3$, czyli $2\sqrt{15x^2+26x+7}=7x+5$. Podnosząc ponownie obie strony ostatniego równania do kwadratu mamy dalej $11x^2+34x+3=0$. Stąd $x=-3$ lub $x=-\frac{1}{11}$. Przez wstawienie do równania wyjściowego uzyskanych liczb stwierdzamy, że spełnia je jedynie liczba $-\frac{1}{11}$.

290. $x\in(-\infty; 2\rangle\cup\langle 6; \infty)$. Wskazówka: Podanemu równaniu równoważna jest nierówność $x^2-8x+12\geqslant 0$.

291. $x\in(-\infty; 0\rangle\cup\langle 3; \infty)$. Wskazówka: Podanemu równaniu równoważna jest nierówność $3x-x^2\leqslant 0$.

292. $n=11$. Wskazówka: Z treści zadania wynika równanie $10n+7=n^2-4$.

293. Wyróżnik trójmianu kwadratowego stanowiącego lewą stronę równania jest równy $(a-b)^2+4c^2$ i jak łatwo zauważyć jest nieujemny dla wszystkich rzeczywistych wartości a, b, c.

294. Jeżeli równanie kwadratowe ma rozwiązania α i β, to równanie można zapisać w postaci $(x-\alpha)(x-\beta)=0$. Stąd, po prostych przekształceniach otrzymujemy $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$.

295. Niech x_1, x_2 oznaczają rozwiązania równania $ax^2+bx+c=0$ w którym $ac\neq 0$. Szukamy równania o rozwiązaniach $\frac{1}{x_1}$ i $\frac{1}{x_2}$. Z zadania 294 wynika, że równanie to można zapisać w postaci $x^2-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)x+\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=0$. Ponieważ liczby x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania $ax^2+bx+c=0$, więc zgodnie ze wzorami Viete'a jest: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{c}$ oraz $\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{a}{c}$. Oznacza to, że szukanym równaniem jest równanie $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$, czyli równanie $cx^2+bx+a=0$.

296. a) $acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$,
b) $a^2x^2-(b^2-2ac)x+ac=0$,
c) $a^3x^2+(b^3-3abc)x+c^3=0$.
Wskazówka: $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$.

297. $x^2-12x+3=0$.

298. $(x=-4$ i $y=-11)$ lub $(x=2$ i $y=1)$.

299. $\left(x=-1 \text{ i } y=-3\right)$ lub $\left(x=\frac{3}{2} \text{ i } y=2\right)$.

300. $(x=3$ i $y=0)$ lub $(x=0$ i $y=-3)$.

301. $(x=-3$ i $y=4)$ lub $(x=1$ i $y=0)$.

302. $(x=1$ i $y=\sqrt{3})$ lub $(x=-1$ i $y=-\sqrt{3})$, lub $(x=\sqrt{3}$ i $y=1)$, lub $(x=-\sqrt{3}$ i $y=-1)$.

303. $(x=1$ i $y=5)$ lub $(x=5$ i $y=1)$.
Wskazówka: Przekształć równania do postaci $(x+y)+xy=11$ i $xy(x+y)=30$ oraz wprowadź niewiadome pomocnicze: $u=x+y$ i $v=xy$.

304. $(x=2$ i $y=3)$ lub $(x=3$ i $y=2)$.
Wskazówka: Doprowadź układ do postaci $(x+y)^2-2xy=13$ i $x+y+xy=11$ oraz wprowadź niewiadome pomocnicze: $u=x+y$ i $v=xy$.

305. Po dodaniu i odjęciu stronami danych równań otrzymujemy układ: $(x+y)^2=49$ i $x^2-y^2=7$, czyli układ równań: $(x+y=7$ lub $x+y=-7)$ i $x^2-y^2=7$.
Stąd $(x=4$ i $y=3)$ lub $(x=-4$ i $y=-3)$.

306. Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony będzie układ równań: $p^2+(1-p)p-q-3=0$ i $q^2+(1-p)q-q-3=0$. Stąd $p=2$ i $q=-1$.

307. $x\in(-4;\ 5)$,

308. $x\in(-\infty;\ -2)\cup(2;\ \infty)$,

309. $x\in\left(-\infty;\ -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{5}{2}};\ \infty\right)$,

310. $x\in\boldsymbol{R}$,

311. Nierówność sprzeczna.

312. $x\in\left\langle 0;\ \frac{3}{2}\right\rangle$,

313. $x\in\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right)\cup(2;\ \infty)$,

314. $x\in\boldsymbol{R}$,

315. $x=3$.

316. $x\in\langle -3;\ 6\rangle$.

317. Następujące warunki są równoważne:
$|x^2-|x||<6$,
$-6<x^2-|x|<6$,
$(x\geqslant 0$ i $x^2-x+6>0$, i $x^2-x-6<0)$ lub $(x<0$ i $x^2+x+6>0$, i $x^2+x-6<0)$,
$(x\geqslant 0$ i $x^2-x-6<0)$ lub $(x<0$ i $x^2+x-6<0)$.
Stąd $x\in(-3;\ 3)$.

318. Danej nierówności równoważna jest alternatywa:
$\begin{cases}x<-1\\ -x-1-x+1\geqslant x^2\end{cases}$ lub $\begin{cases}-1\leqslant x<1\\ x+1-x+1\geqslant x^2\end{cases}$ lub $\begin{cases}x\geqslant 1\\ x+1+x-1\geqslant x^2.\end{cases}$
Stąd $x\in\langle -2;\ 2\rangle$.

319. $x\in(-\infty;\ -2\rangle\cup\langle 2;\ \infty)$. Wskazówka: Przyjmij, że $x^2=t$.

320. $x\in(-\infty;\ -1)\cup(1,\ 4)\cup(6;\ \infty)$. Wskazówka: Przyjmij, że $x^2-5x=t$.

321. $x\in\left(-\frac{3}{2};\ -1\right)\cup\left(\frac{5}{2};\ 3\right)$. Wskazówka: Przyjmij, że $2x^2-3x-6=t$, otrzymasz nierówność $(t-2)t<3$.

322. Podanej nierówności równoważna jest nierówność $(x^2+3x)(x^2+3x+2)\leqslant 24$. Przyjmując, że $x^2+3x=t$ otrzymujemy nierówność $t(t+2)\leqslant 24$, której zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -6;\ 4\rangle$. Wobec tego nierówność wyjściowa będzie spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $-6\leqslant x^2+3x\leqslant 4$. Stąd $x\in\langle -4;\ 1\rangle$.

323. $x\in\langle 0;\ 9\rangle$. Wskazówka: Ustal dziedzinę nierówności i przyjmij, że $\sqrt{x}=t$.

324. Nierówność $\sqrt{3x-2}<x-2$ równoważna jest koniunkcji $3x-2\geqslant 0$ i $x-2\geqslant 0$, i $3x-2<(x-2)^2$. Stąd $x\in(6;\ \infty)$.

325. Nierówność $\sqrt{2x-3}>x-9$ równoważna jest alternatywie $(2x-3\geqslant 0$ i $x-9<0)$ lub $(2x-3\geqslant 0$ i $x-9\geqslant 0$, i $2x-3>(x-9)^2)$. Stąd $x\in\left\langle\frac{3}{2};\ 14\right)$.

326. Nierówność $\sqrt{3-|x|}\leqslant x-1$ równoważna jest koniunkcji $3-|x|\geqslant 0$ i $x-1\geqslant 0$, i $3-|x|\leqslant(x-1)^2$. Stąd $x\in\langle 2;\ 3\rangle$.

327. Nierówność $\sqrt{4-x^2}\geqslant x$ równoważna jest alternatywie $(4-x^2\geqslant 0$ i $x\leqslant 0)$ lub $(4-x^2\geqslant 0$, i $x\geqslant 0$, i $4-x^2\geqslant x^2)$. Stąd $x\in\langle -2;\ \sqrt{2}\rangle$.

328. $x\in\langle 3;\ 12)$. Wskazówka: Ustal dziedzinę nierówności, zapisz nierówność w postaci $x-3-\sqrt{x-3}<6$ i przyjmij, że $x-3=t$.

329. a) $x\in\langle 4;\ 11\rangle$. b) $x\in(-\infty;\ -4\rangle\cup\langle 5;\ \infty)$.

330. Podanej nierówności równoważna jest koniunkcja $x^2-2x+3=t$ i $t(t+1)\geqslant t+4$, czyli koniunkcja $x^2-2x+3=t$ i $t^2-4\geqslant 0$. Zbiorem rozwiązań nierówności $t^2-4\geqslant 0$ jest suma przedziałów $(-\infty;\ -2\rangle\cup\langle 2;\ \infty)$. Zatem nierówność wyjściowa będzie spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona będzie alternatywa $x^2-2x+3\leqslant -2$ lub $x^2-2x+3\geqslant 2$, czyli $x^2-2x+5\leqslant 0$ lub $(x-1)^2\geqslant 0$. Ponieważ druga nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą, więc podana nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

331. $a\in(-5;\ 1)$.

332. $x\in(-\sqrt{5};\ 0)$.

333. $x=2$ lub $x=3$, lub $x=4$.

334. $D_f=(-1;\ 0\rangle$.

335. $D_f=(0;\ 1)\cup(1;\ \sqrt{3}\rangle$.

336. $D_f=\langle -2;\ -1\rangle\cup\langle 1;\ 2\rangle$.

337. Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności: $x>0$ i $2x^2-x>x^2+2$. Stąd $x\in(2;\ \infty)$.

338. $A\cup B=(-3;\ 5\rangle$, $A\cap B=\langle 0;\ 3)$, $A\backslash B=\langle 3;\ 5\rangle$, $B\backslash A=(-3;\ 0)$.

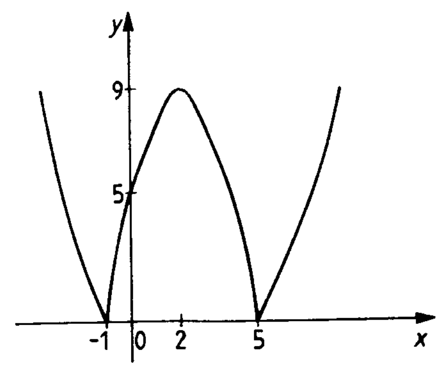
399. $A\cup B=(-\infty;\ \infty)$, $A\cap B=\langle -4;\ -1)\cup(1;\ 4\rangle$, $A\backslash B=\langle -1;\ 1\rangle$, $B\backslash A=(-\infty;\ -4)\cup(4;\ \infty)$.

340. $A\cup B=(-\infty;\ \infty)$, $A\cap B=\langle -2;\ -1)\cup(1;\ 2\rangle$, $A\backslash B=(-\infty;\ -2)\cup(2;\ \infty)$, $B\backslash A=\langle -1;\ 1\rangle$.

341. $A\cap B=(-4;\ -\sqrt{2}\rangle\cup\langle\sqrt{2};\ 2)$.

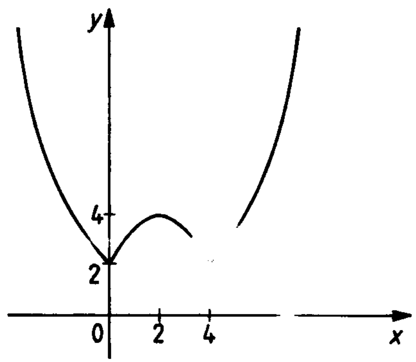
342. $B\backslash A=\langle -1;\ 2\rangle$.

343. Rys. 14.



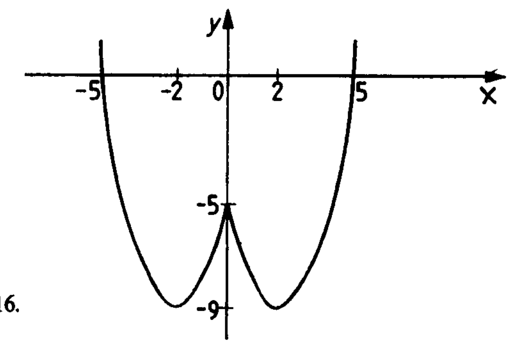
Rys. 14.

344. Rys. 15.



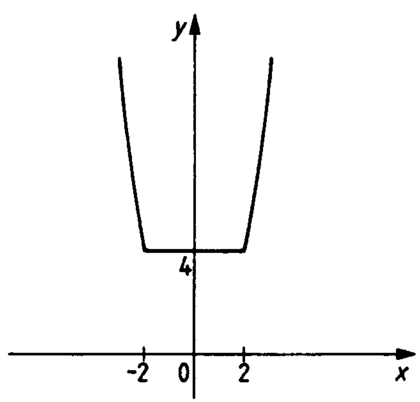
Rys. 15.

345. Jeżeli $x \geqslant 0$, to $y=x^2-4x-5$, jeśli $x<0$, to $y=x^2+4x-5$ (rys. 16).



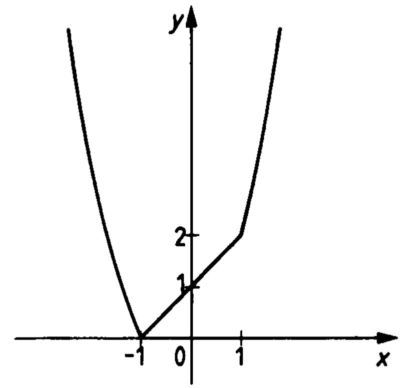
Rys. 16.

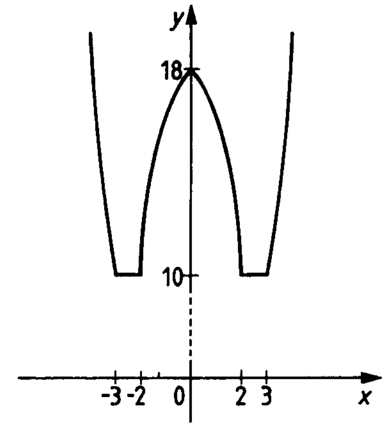
346. Jeśli $x^2-4 \geqslant 0$, czyli jeśli $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; \infty)$, to $y=2x^2-4$, jeśli $x^2-4<0$, czyli jeśli $x \in (-2; 2)$, to $y=4$ (rys. 17).



Rys. 17.

347. Ponieważ $x^2+x+\sqrt{(x^2+1)^2-4x^2}=x^2+x+\sqrt{(x^2-1)^2}=x^2+x+|x^2-1|$, więc $y=x^2+x+|x^2-1|$ (rys. 18).





Rys. 18. Rys. 19.

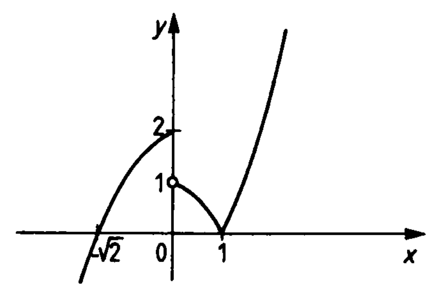
348. Rozpatrując przypadki:
1. $x^2-9 \geqslant 0$ i $x^2-4 \geqslant 0$,
2. $x^2-9 \geqslant 0$ i $x^2-4<0$,
3. $x^2-9<0$ i $x^2-4 \geqslant 0$,
4. $x^2-9<0$ i $x^2-4<0$,

stwierdzamy, że podanej w zadaniu funkcji równa jest funkcja:

$$y=\begin{cases} 2x^2-8 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \cup \langle 3; \infty) \\ 10 & \text{dla } x \in \langle -3; -2) \cup \langle 2; 3) \\ -2x^2+18 & \text{dla } x \in \langle -2; 2) \end{cases}$$ (rys. 19).

349. $D_f=\{-2; 2\}$. Wykresem funkcji jest zbiór złożony z punktów: $A=(-2, 4)$ i $B=(2, 4)$.

350. Równanie $f(x)=m$ będzie mieć trzy różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (0; 1)$ (rys. 20).

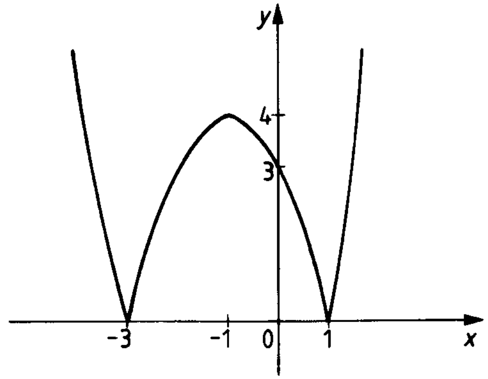


Rys. 20

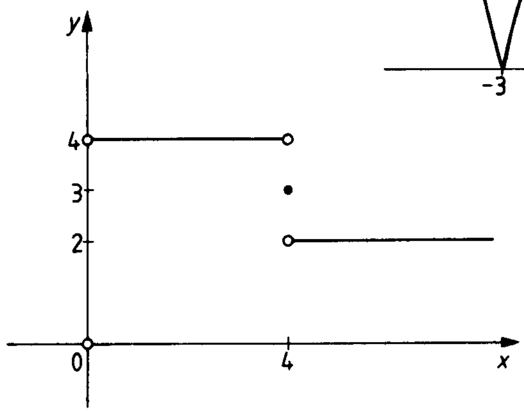
351. Łatwo zauważyć, że jeśli $a<0$, to wykres funkcji $y=|x^2+2x-3|$ (rys. 21) nie ma punktów wspólnych z wykresem funkcji $y=a$. Oznacza to, że w tym przypadku $k=0$. Rozumując analogicznie stwierdzamy, że : jeśli $a=0$ lub $a>4$, to $k=2$; jeśli $a=4$, to $k=3$; jeśli $0<a<4$, to $k=4$.

Wobec tego szukana funkcja $k=f(a)$ jest określona następująco:

$$k=\begin{cases} 0 & \text{dla } a<0 \\ 2 & \text{dla } a=0 \text{ lub } a>4 \\ 3 & \text{dla } a=4 \\ 4 & \text{dla } 0<a<4 \text{ (rys. 22).} \end{cases}$$

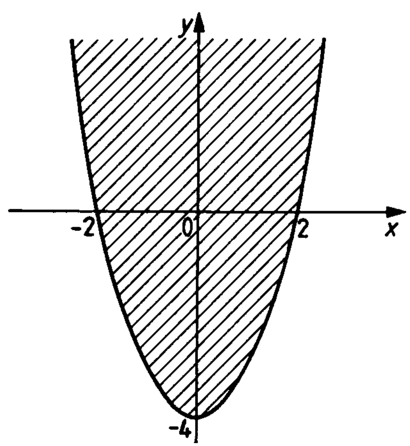


Rys. 21.



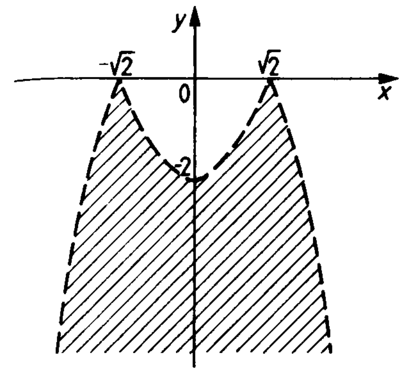
Rys. 22.

352. Rys. 23.



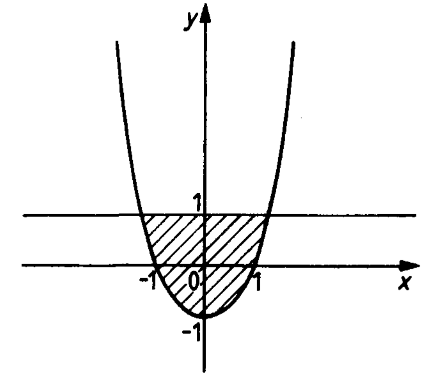
Rys. 23.

353. Rys. 24.



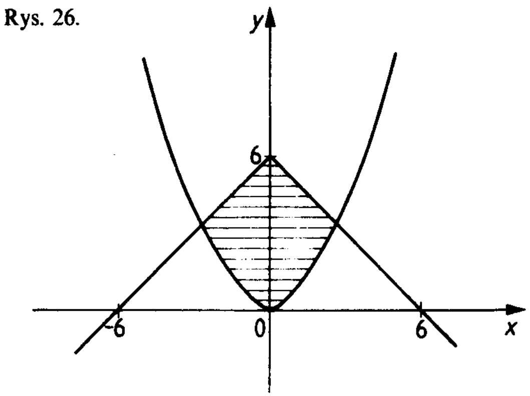
Rys. 24.

354. Rys. 25.



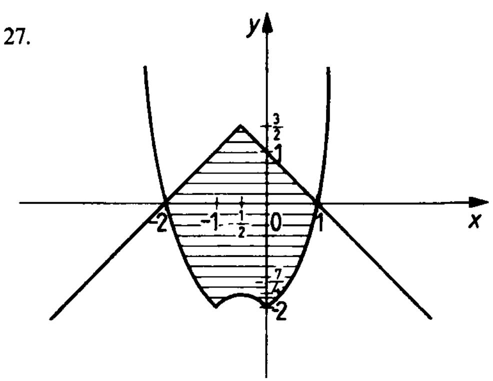
Rys. 25.

355. Rys. 26.



Rys. 26.

356. Rys. 27.



Rys. 27.

357. $m=3$ lub $m=-1$.

358. $m=5$ lub $m=1$, lub $m=-\frac{10}{3}$.

359. $k\in(-\infty;\ -6)\cup(2;\ \infty)$.

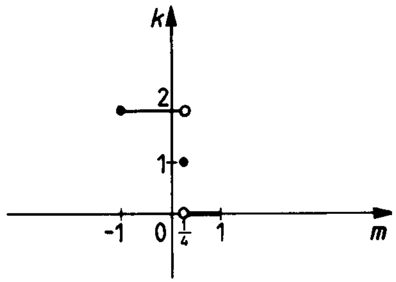
360. $k\in(-\infty;\ -1)\cup\left(-1;\ -\frac{1}{2}\right)\cup(3;\ \infty)$.

361. Równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych gdy $k\in(-2;\ 6)$, ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $k=-2$ lub $k=6$, oraz ma dwa różne rozwiązania, gdy $k\in(-\infty;\ -2)\cup(6;\ \infty)$.

362. Równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych, gdy $k\in\left(\frac{2}{7};\ \infty\right)$, ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $k=\frac{2}{7}$ lub $k=-2$, oraz ma dwa różne rozwiązania, gdy $k\in(-\infty;\ -2)\cup\left(-2;\ \frac{2}{7}\right)$.

363. Rys. 28.

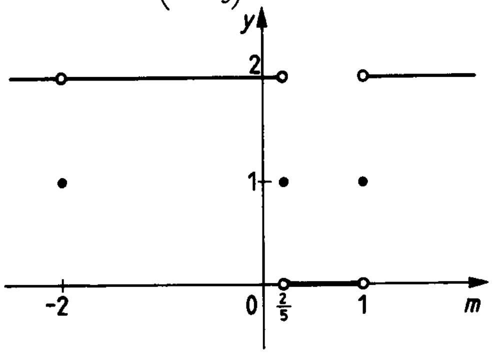
$$k=\begin{cases}0 \text{ dla } m\in\left(\frac{1}{4};\ 1\right\rangle\\ 1 \text{ dla } m=\frac{1}{4}\\ 2 \text{ dla } m\in\left\langle -1;\ \frac{1}{4}\right).\end{cases}$$



Rys. 28.

364. Rys. 29.

$$y=\begin{cases}0 \text{ dla } m\in\left(\frac{2}{5};\ 1\right)\\ 1 \text{ dla } m=-2 \text{ lub } m=\frac{2}{5}, \text{ lub } m=1\\ 2 \text{ dla } m\in(-\infty;\ -2)\cup\left(-2;\ \frac{2}{5}\right)\cup(1;\ \infty).\end{cases}$$



Rys. 29.

365. $p\in(-\infty;\ -3)\cup(1;\ \infty)$. Wskazówka: Podany układ będzie sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy sprzeczne będzie równanie $x^2+(x+p)^2-2x-1=0$, czyli równanie $2x^2+2(p-1)x+p^2-1=0$.

366. Podany układ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $m\in(-\infty;\ -5)\cup(5;\ \infty)$; ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $m=-5$ lub $m=5$; ma dokładnie dwa rozwiązania, gdy $m\in(-5;\ 5)$.
Wskazówka: Liczba rozwiązań podanego układu jest równa liczbie rozwiązań równania $x^2=(2x+m)^2=5$.

367. Układ jest sprzeczny, gdy $m\in(0;\ 8)$; ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $m=0$ lub $m=8$; ma dwa rozwiązania, gdy $m\in(-\infty;\ 0)\cup(8;\ \infty)$.

368. $p\in\left\langle -1;\ \frac{3}{5}\right\rangle$. Wskazówka: Podane zbiory będą rozłączne wtedy i tylko wtedy, gdy układ równań $y=x^2+px-p^2$ i $x+y=-1$ z parametrem p będzie miał co najwyżej jedno rozwiązanie.

369. $m\in(0;\ 3)$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta>0$ i $x_1x_2<0$.

370. $k\in(-\infty;\ -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};\ 2\rangle$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta\geqslant 0$ i $x_1x_2>0$.

371. $k\in\left(\frac{9}{2};\ \infty\right)$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta>0$ i $x_1x_2>0$ i $x_1+x_2<0$.

372. $m\in(9;\ \infty)$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta>0$ i $x_1x_2>0$ i $x_1+x_2>0$.

373. $m=\frac{7}{2}$ lub $m=4$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta\geqslant 0$ i $x_1x_2=\frac{x_1+x_2}{2}$.

374. $m\in\left(\frac{5}{3};\ 3\right)$. Wskazówka: Niech x_2 oznacza rozwiązanie dodatnie, x_1 rozwiązanie ujemne, a Δ wyróżnik danego równania. Należy zbadać, kiedy $\Delta>0$ i $x_1x_2<0$ i $x_2>|x_1|$, czyli kiedy $\Delta>0$ i $x_1x_2<0$ i $x_1+x_2>0$.

375. Podane równanie ma rozwiązania, gdyż jego wyróżnik jest dodatni. Zauważmy, że:

$$\frac{x_1^2x_2+x_1x_2^2}{2x_1^2-3x_1x_2+2x_2^2}=\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{2(x_1^2+x_2^2)-3x_1x_2}=\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{2[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-3x_1x_2}=$$

$$=\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{2(x_1+x_2)^2-7x_1x_2}.$$

Ale ze wzorów Viete'a wynika, że $x_1+x_2=-3$ i $x_1x_2=-2$

Wobec tego $\frac{x_1^2x_2+x_1x_2^2}{2x_1^2-3x_1x_2+2x_2^2}=\frac{3}{16}$.

376. $m\in\left(-\infty;\ -\frac{4}{9}\right)\cup(2;\ \infty)$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta\geqslant 0$ i $x_1^2+x_2^2>8$, czyli gdy $\Delta\geqslant 0$ i $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2>8$.

377. $a=-4$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \geqslant 0$ i $x_1^2+x_2^2=2(x_1+x_2)$, czyli gdy $\Delta \geqslant 0$ i $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2(x_1+x_2)$.

378. $m-1$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \geqslant 0$ i $x_1^2+x_2^2=1$ czyli, gdy $\Delta \geqslant 0$ i $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1$.

379. $k=-3$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta>0$ i $(x_1-x_2)^2=16$ czyli, gdy $\Delta>0$ i $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16$.

380. Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązaniami równania $x^2+4x+k=0$ będą liczby x_1 i $3x_1$. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy $16-4k \geqslant 0$ i $x_1+3x_1=-4$ i $x_1(3x_1)=k$. Stąd $k=3$.

381. $m=-2$ lub $m=2$.

382. Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązaniami równania $2x^2+mx+30=0$ będą liczby x_1 i $\frac{5}{3}x_1$. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2-240>0$ i $x_1+\frac{5}{3}x_1=-\frac{m}{2}$ i $x_1\left(\frac{5}{3}x_1\right)=15$. Stąd $m=-16$ lub $m=16$.

383. $m=-2$ lub $m=\frac{33}{8}$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązaniami podanego równania będą liczby x_1 i $\frac{3x_1-11}{4}$.

384. Niech Δ oznacza wyróżnik funkcji kwadratowej $f(x)=x^2+(m-3)x-2m+6$, a x_W odciętą wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji. Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta>0$ i $f(1)>0$ i $x_W>1$, czyli gdy $(m-3)^2-4(-2m+6)>0$ i $1+m-3-2m+6>0$, i $\frac{-m+3}{2}>1$. Stąd $m\in(-5;\ 1)$.

385. $m\in\left(-\infty;\ \frac{9}{4}\right)$.

386. $m\in\left(4;\ \frac{11}{2}\right)$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $[m-4>0$ i $\Delta>0$ i $f(1)<0]$ lub $[m-4<0$ i $\Delta>0$ i $f(1)>0]$, gdzie Δ jest wyróżnikiem funkcji kwadratowej $f(x)=(m-4)x^2-4x+m-3$.

387. Niech Δ oznacza wyróżnik funkcji kwadratowej $f(x)=x^2-mx+2m-3$, a x_W odciętą wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji. Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta>0$ i $f(-1)>0$, i $f(5)>0$, i $-1<x_W<5$, czyli gdy $m^2-8m+12>0$ i $3m-2>0$, i $-3m+22>0$, i $-1<\frac{m}{2}<5$. Stąd $m\in\left(\frac{2}{3};2\right)\cup\left(6;\frac{22}{3}\right)$.

388. $m\in\left(-\infty;\ \frac{5}{3}\right)$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta>0$ i $f(0)<0$ i $f(-1)<0$, gdzie $f(x)=x^2-(m-1)x+2+2m-5$, a Δ jest wyróżnikiem funkcji $f(x)$.

389. $a\in\left(\frac{5}{4};\ \infty\right)$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $a-1>0$ i $\Delta<0$.

390. $a\in(-\infty;\ 1)$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $a-2<0$ i $\Delta<0$.

391. $a\in(0;\ 2\rangle$. Wskazówka: Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $a=2$ lub $(4-a^2>0$ i $\Delta<0)$.

392. $m\in\langle 3;\ \infty)$.

393. $(3+px)-p(1+x^2)\Leftrightarrow px^2+px+p+3>0$. Oznaczmy przez Δ wyróżnik trójmianu $px^2+px+p+3$. Nierówność $px^2+px+p+3>0$ będzie spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x wtedy i tylko wtedy, gdy $p=0$ lub $(p>0$ i $\Delta<0)$. Stąd $p\in\langle 0;\ \infty)$.

394. Dziedziną funkcji $y=\sqrt{x^2-kx+k}$ będzie zbiór $\boldsymbol{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge_{x\in\boldsymbol{R}} x^2-kx+k\geqslant 0$, czyli gdy $k^2-4k\leqslant 0$. Stąd $k\in\langle 0;\ 4\rangle$.

395. Dziedziną podanej funkcji będzie zbiór $\boldsymbol{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge_{x\in\boldsymbol{R}} x^2-kx+1>0$, czyli gdy $k^2-4<0$. Stąd $k\in(-2;\ 2)$.

396. Łatwo sprawdzamy, że nierówność jest prawdziwa, gdy $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$. Załóżmy, że $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2>0$ i rozważmy funkcję $f(x)=(a_1x-b_1)^2+$ $+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2$.

Widać, że $\bigwedge_{x\in\boldsymbol{R}} f(x)\geqslant 0$. (1)

Przekształcając funkcję f otrzymujemy:

$f(x)=(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$.

Funkcja f jest funkcją kwadratową, gdyż $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2>0$. Oznaczmy jej wyróżnik przez Δ. Ze względu na (1) otrzymujemy $\Delta\leqslant 0$. (2)

Ale $\Delta=4(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$.

Stąd i z (2):

$4(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\leqslant 0$, skąd po łatwych rachunkach otrzymujemy nierówność Schwarza.

397. Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge_{x\in\boldsymbol{R}} ax^2-(2a-1)x+2a-1>0$. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy $a>0$ i $(2a-1)^2-4a(2a-1)\leqslant 0$. Stąd $a\in\left\langle\frac{1}{2};\ \infty\right)$.

398. $\bigvee_{a\in\boldsymbol{R}}\ \bigwedge_{x\in\boldsymbol{R}} ax^2+2x+4>0 \Leftrightarrow \bigvee_{a\in\boldsymbol{R}} (a>0 \text{ i } 4-16a<0) \Leftrightarrow \bigvee_{a\in\boldsymbol{R}} a>\frac{1}{4}$.

Z równoważności oraz prawdziwości ostatniego zdania wynika prawdziwość zdania pierwszego.

399. $\bigwedge\limits_{p\in \boldsymbol{R}}\ \bigvee\limits_{x\in \boldsymbol{R}}\ x^2-p^2=px \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{p\in \boldsymbol{R}}\ \bigvee\limits_{x\in \boldsymbol{R}}\ x^2-px-p^2=0 \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{p\in \boldsymbol{R}}\ p^2+4p^2\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{p\in \boldsymbol{R}}\ p^2\geqslant 0.$

Z równoważności i prawdziwości ostatniego zdania wynika prawdziwość zdania pierwszego.

400. Ponieważ prawdziwe są równoważności:
$\bigwedge\limits_{t\in \boldsymbol{R}}\ t^2+tx+1>0 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow x\in(-2;\,2)$, więc $A=(-2;\,2)$. Podobnie rozumując stwierdzamy, że $B=\left\langle\frac{1}{4};\,\infty\right)$. Zatem $A\setminus B=\left(-2;\,\frac{1}{4}\right)$.

401. $|x^2-x|-2<0 \Leftrightarrow |x^2-x|<2 \Leftrightarrow -2<x^2-x<2 \Leftrightarrow x\in(-1;\,2)$, oraz $\bigvee\limits_{p\in \boldsymbol{R}}\ p^2+(x+1)p+1\leqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)^2-4\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;\,-3\rangle\cup\langle 1;\,\infty)$. Oznacza to, że $A=(-1;\,2)$, $B=(-\infty;\,-3\rangle\cup\langle 1;\,\infty)$. Zatem $A\cap B=\langle 1;\,2)$.

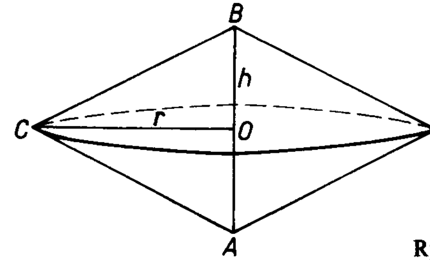
402. Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy
$\bigwedge\limits_{m\in \boldsymbol{R}}\ 4m^2-4(2m-k^2)>0$, czyli gdy $\bigwedge\limits_{m\in \boldsymbol{R}}\ m^2-2m+k^2>0$.
Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy $4-4k^2<0$. Stąd $k\in(-\infty;\,-1)\cup(1;\,\infty)$.

403. $k\in\left(\frac{1}{3};\,\infty\right)$.

404. Oznaczmy przez x długość jednego boku prostokąta. Wtedy bok do niego prostopadły ma długość $\frac{d-2x}{2}$. Oznaczmy dalej przez P pole prostokąta. Wtedy $P(x)=x\cdot\frac{d-2x}{2}=-x^2+\frac{d}{2}x$. Zakładamy, że $x\in\left(0;\,\frac{d}{2}\right)$. Szukamy więc takiego x, aby funkcja $\left(0;\,\frac{d}{2}\right)\ni x\to P(x)=-x^2+\frac{d}{2}x$ osiągała wartość największą. Ponieważ ważana funkcja jest funkcją kwadratową, więc z jej własności wynika, że P przyjmuje wartość największą dla $x=\frac{-\frac{d}{2}}{-2}=\frac{d}{4}\left(\frac{d}{4}\in\left(0;\,\frac{d}{2}\right)\right)$. Jeżeli $x=\frac{d}{4}$, to $\frac{d-2x}{2}=\frac{d}{4}$. Szukanym prostokątem jest zatem kwadrat o boku długości $\frac{d}{4}$.

405. Ze wzorów Viete'a: $x_1+x_2=-a$ i $x_1x_2=a-2$, gdzie x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania $x^2+ax+a-2=0$. Oznaczmy przez y sumę kwadratów rozwiązań podanego równania.
Wtedy: $y=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x^2-2a+4$.
Szukamy więc takiego a, aby funkcja $\boldsymbol{R}\ni a\to y=a^2-2a+4$ osiągała wartość najmniejszą. Z własności funkcji kwadratowej tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy $a=1$.

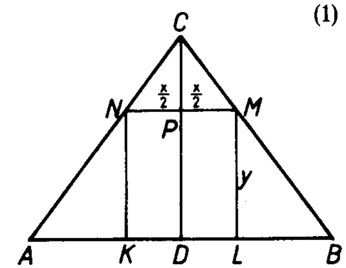
406. Przy oznaczeniach z rys. 30 objętość powstałej bryły wyraża się wzorem
$V=\frac{2}{3}\pi r^2 h.$ (1)



Rys. 30.

Po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa do trójkąta BOC stwierdzamy, że $BC=\sqrt{r^2+h^2}$. Ponieważ obwód obracanego trójkąta jest równy 18, więc $2BC+AB=18$, czyli $2\sqrt{r^2+h^2}+2h=18$, skąd $r^2=81-18h$. (2)
Łącząc równości (1) i (2) otrzymujemy $V(h)=-12\pi h^2+54\pi h$.
Dziedzinę D_V funkcji V określa układ nierówności: $h>0$ i $81-18h>0$.
Zatem $D_V=\left(0;\,\frac{9}{2}\right)$. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja $V(h)=-12\pi h^2+54\pi h$ osiąga wartość największą dla $h=\frac{-54}{-24}=\frac{9}{4}\left(\frac{9}{4}\in D_V\right)$.
Jeżeli $h=\frac{9}{4}$, to $r^2=\frac{81}{2}$, a tym samym $AB=2h=\frac{9}{2}$, a $BC=\sqrt{r^2+h^2}=\frac{27}{4}$.
Wobec tego objętość wymienionej w zadaniu bryły będzie największa wtedy i tylko wtedy, gdy podstawa obracanego trójkąta równoramiennego będzie długości $4\frac{1}{2}$ cm, a jego ramię $6\frac{3}{4}$ cm.

407. Przy oznaczeniach z rys. 31 pole prostokąta $KLMN$ wyraża się wzorem,
$P=xy$. (rys. 31). (1)



Rys. 31.

Ponieważ $\Delta CMN\sim\Delta CAB$ (cecha kk podobieństwa trójkątów), więc $\frac{CP}{CD}=\frac{MN}{AB}$.
Ale $AB=a$ i $MN=x$ i $CD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$
i $CP=CD-y=\frac{a\sqrt{3}}{2}-y$.

Zatem $\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}-y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{x}{a}$. Stąd $y=\frac{a\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{2}$. (2)

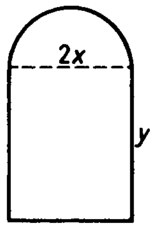
Łącząc równości (1) i (2) otrzymujemy $P(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{a\sqrt{3}}{2}x$. Dziedziną funkcji P jest zbiór rozwiązań układu nierówności $x>0$ i $\frac{a\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{2}>0$, czyli przedział $(0;\ a)$. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja $P(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{a\sqrt{3}}{2}x$ osiąga wartość największą wtedy i tylko wtedy, gdy $x=\frac{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\in(0;\ a)\right)$.

Jeśli $x=\frac{a}{2}$, to $y=\frac{a\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Zatem wśród prostokątów wpisanych w trójkąt równoboczny o boku długości a, największe pole ma prostokąt o bokach długości $\frac{a}{2}$ i $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

408. Zauważmy, że okno będzie przepuszczało maksymalną ilość światła wtedy, gdy pole S powierzchni tego okna będzie największe.

Przy oznaczeniach z rys. 32 mamy $S=2xy+\frac{1}{2}\pi x^2$.

Ale $2x+2y+\frac{1}{2}2\pi x=2p$. Zatem $y=\frac{2p-2x-\pi x}{2}$.



Rys. 32.

Wobec tego $S(x)=-\frac{\pi+4}{2}x^2+2px$. Dziedziną D_S funkcji S będzie zbiór rozwiązań układu nierówności: $x>0$ i $\frac{2p-2x-\pi x}{2}>0$. Stąd $D_S=\left(0;\frac{2p}{2+\pi}\right)$. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja $S(x)=-\frac{\pi+4}{2}x^2+2px$ osiąga wartość największą wtedy i tylko wtedy, gdy $x=\frac{-2p}{2\left(-\frac{\pi+4}{2}\right)}=\frac{2p}{\pi+4}\left(\frac{2p}{\pi+4}\in D_S\right)$.

Jeżeli $x=\frac{2p}{\pi+4}$, to $y=\frac{2p-2x-\pi x}{2}=\frac{2p}{\pi+4}$. Zatem długości boków prostokątnej części okna powinny wynosić $2x=\frac{4p}{\pi+4}$ i $y=\frac{2p}{\pi+4}$.

409. Kwadrat, którego bok ma długość 3 cm.

410. $m=6$.

411. Z treści zadania wynika, że rozwiązaniami równania $ax^2+bx+c=0$ są liczby postaci x_1 i $2x_1$. Stąd i ze wzorów Viete'a otrzymujemy równości: $x_1+2x_1=-\frac{b}{a}$ i $x_1(2x_1)=\frac{c}{a}$. Zatem $2\left(-\frac{b}{3a}\right)^2=\frac{c}{a}$, czyli $2b^2=9ac$.

412. Ponieważ $2b^2=9ac$ i $ac\neq0$, to $b^2-\frac{9}{2}ac=0$ i $ac>0$. Zatem $b^2-4ac>0$. Oznacza to, że równanie $ax^2+bx+c=0$ ma dwa różne rozwiązania $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ i $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Ale z równości $2b^2=9ac$ wynika, że $ac=\frac{2b^2}{9}$. Wobec tego $x_1=\frac{-3b-|b|}{6a}$ i $x_2=\frac{-3b+|b|}{6a}$. Jeśli $b\geqslant0$, to $x_1=\frac{-b}{3a}$ i $x_2=\frac{-2b}{3a}$, a jeśli $b<0$, to $x_1=-\frac{2b}{3a}$ i $x_2=\frac{-b}{3a}$. W przypadku pierwszym $x_2=2x_1$, a w przypadku drugim $x_1=2x_2$. Oznacza to, że podane twierdzenie jest prawdziwe.

413. Przypuśćmy, że $mp=2(n+q)$ i obydwa równania nie mają rozwiązań. Wtedy $p^2-4q<0$ i $m^2-4n<0$.
Dodając te nierówności stronami otrzymujemy $m^2+p^2-4(n+q)<0$. (1)
Ponieważ $mp=2(n+q)$, więc $4(n+q)=2mp$. (2)
Z (1) i (2) wynika, że $m^2+p^2-2mp<0$, czyli $(m-p)^2<0$, co jest sprzeczne.

414. Niech x_1 będzie wspólnym rozwiązaniem podanych równań. Oznacza to, że prawdziwe są równości: $x_1^2+mx_1+n=0$ i $x_1^2+px_1+q=0$. Odejmując te równości stronami otrzymujemy $(m-p)x_1+(n-q)=0$. Jeżeli $m-p=0$, to $n-q=0$, wobec czego $(n-q)^2=(m-p)(np-mq)$. Jeżeli $m-p\neq0$, to $x_1=-\frac{n-q}{m-p}$. Stąd i z równości $x_1^2+mx_1+m=0$ wynika, że $\left(\frac{n-q}{m-p}\right)^2-m\frac{n-q}{m-p}+n=0$. Z ostatniej równości, po prostych przekształceniach otrzymujemy równość $(n-q)^2=(m-p)(np-mq)$.

415. Jeśli x_1 jest wspólnym miejscem zerowym wymienionych w zadaniu funkcji, to prawdziwe są równości $x_1^2+ax_1+1=0$ i $x_1^2+x_1+a=0$. Z drugiej równości wynika, że $a=-x_1^2-x_1$. (1)
Wstawiając powyższe wyrażenie do równości pierwszej otrzymujemy
$x_1^2+(-x_1^2-x_1)x_1+1=0$. Stąd $x_1^3=1$, czyli $x_1=1$. (2)
Łącząc równości (1) i (2) stwierdzamy, że $a=-2$. Łatwo sprawdzić, że jeśli $a=-2$, to podane w zadaniu funkcje mają wspólne miejsce zerowe i jest nim $x=1$. Wobec tego warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $a=-2$.

416. Ponieważ $\bigwedge\limits_{k\in C} 5|ak^2+bk+c$, to

$5|\,f(1)$, czyli $5|a+b+c$, (1)

$5|\,f(-1)$, czyli $5|a-b+c$, (2)

$5|\,f(2)$, czyli $5|4a+2b+c$. (3)

Z (1) i (2) wynika, że $5|\,f(1)-f(-1)$, czyli $5|2b$. Wobec tego $5|b$, gdyż $b\in C$. Wykorzystując podobnie z (3) i (1) stwierdzamy, że $5|\,f(2)-f(1)$, czyli $5|3a+b$. Stąd i z $5|b$ mamy $5|3a$. Ale $a\in C$, więc $5|a$. Ponieważ $5|a$ i $5|b$ i $5|a+b+c$, więc $5|c$.

417. Przypuśćmy, że przy podanych założeniach, funkcja $y=ax^2+bx+c$ ma miejsce zerowe wymierne $\frac{p}{q}$, gdzie p, q są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Wtedy prawdziwa jest równość $ap^2+bpq+cq^2=0$, ale ponieważ a, b, c są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to $a=2k+1$ i $b=2l+1$, i $c=2m+1$, gdzie $k, l, m\in C$. Wobec tego prawdziwa jest równość $(2k+1)p^2+(2l+1)pq+(2m+1)q^2=0$, czyli równość $2(kp^2+lpq+mq^2)+p^2+pq+q^2=0$. Stąd wynika, że liczba p^2+pq+q^2 jest podzielna przez 2. To jest niemożliwe, bo przecież p i q są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Tak więc mogą zajść tylko dwa przypadki:
— liczby p i q są obie nieparzyste,
— jedna z liczb p i q jest parzysta, a druga nieparzysta.
Łatwo sprawdzić, że w obu tych przypadkach liczba p^2+pq+q^2 jest liczbą nieparzystą. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości podanego twierdzenia.

418. Wykażemy najpierw, że jeśli dla każdego $x\in C$ wartość funkcji $f(x)=ax^2+bx+c$ jest liczbą całkowitą, to $2a$, $a+b$, c są liczbami całkowitymi.
Ponieważ $\bigwedge\limits_{x\in R} ax^2+bx+x\in C$, więc $f(0)=c$, $c\in C$, $f(1)=a+b+c$, $a+b+c\in C$, i $f(-1)=a-b+c$, $a-b+c\in C$.
Wobec tego $f(1)-f(0)=a+b$, $a+b\in C$, $f(1)+f(-1)=2a+2c$ i $2a+2c\in C$.
Ale ponieważ $2a+2c\in C$ i $c\in C$, więc $2a\in C$.
Wykażemy teraz, że prawdziwe jest twierdzenie odwrotne do udowodnionego.
Wykażemy, że jeśli $2a$, $a+b$, c są liczbami całkowitymi to $\bigwedge\limits_{x\in C} ax^2+bx+c\in C$.
Zauważmy, że prawdziwa jest tożsamość

$$ax^2+bx+c=2a\frac{x(x-1)}{2}+(a+b)x+c. \qquad (1)$$

Ponieważ iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą, więc

$$\bigwedge_{x\in C} \frac{x(x-1)}{2}\in C. \qquad (2)$$

Z (1) i (2) i założenia $2a$, $a+b$, $c\in C$ wynika, że $\bigwedge\limits_{x\in C} ax^2+bx+c\in C$.

419. Wskazówka: Jeżeli przez x oznaczysz liczbę kilogramów cukru w jednym worku, to z treści zadania wynika równanie $x^2-50x=975$.

420. Wskazówka: x — szukana liczba procent, $9000-90x$ — cena książki po pierwszej obniżce, $9000-90x-\frac{x}{100}(9000-90x)$ — cena książki po drugiej obniżce.

421. Niech x oznacza liczbę kilometrów pokonywanych przez turystę jednego dnia, y liczbę dni w czasie których turysta pokonał trasę 105 km. Z treści zadania wynika układ równań: $xy=105$ i $(y+2)(x-6)=105$. Jedynym rozwiązaniem tego układu spełniającym warunki zadania jest para $x=21$ i $y=5$. Oznacza to, że turysta pokonywał dziennie 21 km.

422. Wskazówka: Jeżeli x oznacza liczbę lat solenizanta, to z treści zadania otrzymujesz równanie $(x-15)(x+15)=1845-x$.

423. Oznaczmy przez x liczbę pistoli za które kupiec kupił konia. Ponieważ koń został sprzedany za 24 pistole, więc kupiec stracił $x-24$ pistole. Z treści zadania wynika, że powyższa strata wynosi $x\%$ z x, czyli $\frac{x^2}{100}$. Otrzymujemy zatem równanie $x-24=\frac{x^2}{100}$. Zakładamy, że $x>24$. Stąd $x=40$ lub $x=60$.

424. Oznaczmy przez x ułamek wyrażający część całej ilości alkoholu odlewanego za każdym razem. Po pierwszym odlaniu w naczyniu zostało $40-40x$ litrów alkoholu. Po drugim odlaniu w naczyniu zostało $40-40x-x(40-40x)$ litrów alkoholu. Zgodnie z treścią zadania otrzymujemy równanie: $40-40x-x(40-40x)=10$. Rozwiązaniami tego równania są liczby $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{2}$. Stąd i z faktu, że $x\in(0;\,1)$ wynika, że $x=\frac{1}{2}$. Za każdym razem odlewano więc 20 litrów.

§ 5. Wielomiany. Równania i nierówności

425. a) $W(x)=G(x)\cdot H(x)\Leftrightarrow x^4+4x^3-8x-4=x^4+ax^3+(b-2)x^2-2ax-2b\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(a=4$ i $b-2a=0$, i $-2a=-8$, i $-2b=-4)\Leftrightarrow(a=4$ i $b=2)$.
b) $W(x)=G(x)\cdot H(x)\Leftrightarrow x^3+5x^2+4=x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(a-2=5$ i $b-2a=0$, i $-2b=4)\Leftrightarrow(a=7$ i $b=14$, i $b=-2)$.
Sprzeczność ostatniej koniunkcji oznacza, że wielomiany $W(x)$ i $G(x)\cdot H(x)$ nie będą równe dla żadnego $a, b\in R$.

426. Podany wielomian $W(x)$ może być kwadratem wielomianu postaci x^2+px+q. Ale $(x^2+px+q)^2=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$.
Zatem $x^4+ax^3+bx^2-8x+1=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2\Leftrightarrow(2p=a$ i $p^2+2q=b$, i $2pq=-8$, i $q^2=1)$. Stąd $a=-8$ i $b=18$ lub $a=8$ i $b=14$.

427. a) Ponieważ dziedziną wielomianu jest zbiór liczb rzeczywistych, więc będzie on funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} W(-x)=W(x)$. W naszym przypadku:
$\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} W(-x)=W(x)\Leftrightarrow \bigwedge_{x\in\mathbf{R}} -ax^3+bx^2-cx+d=ax^3+bx^2+cx+d\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \bigwedge_{x\in\mathbf{R}} 2ax^3+2cx=0\Leftrightarrow(a=0$ i $c=0)$. Wobec tego wielomian $W(x)$ będzie funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a=0$, $c=0$, $b\in\mathbf{R}$ i $d\in\mathbf{R}$.
b) $b=0$, $d=0$, $a\in\mathbf{R}$ i $c\in\mathbf{R}$.

428. x^2+x-2. **432.** x^2+3x-1. **436.** $x^2+2ax-1$.

429. x^2-3x+2. **433.** $x^4-x^3+x^2+x-1$. **437.** $x-2a$.

430. x^4-2x^2-1. **434.** $x^4-2x^3+4x^2-8x+16$. **438.** $x^2-(a+1)x+a^2-a+1$.

431. x^2+2x+1. **435.** $x^2-2ax+2a^2$.

439. Dzieląc wielomian $W(x)$ przez x^2+1 i x^3+1 otrzymujemy odpowiednio reszty $-bx+a+c$ i $-ax+c-b$. Należy sprawdzić, dla jakich $a, b, c\in\mathbf{R}$ zachodzi tożsamość $(-bx+a+c)(-ax+c-b)=2(x-1)(x-5)$, czyli tożsamość
$ab\left(x-\frac{c-b}{a}\right)\left(x-\frac{a+c}{b}\right)=2(x-1)(x-5)$. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy
$ab=2$ i $\frac{c-b}{a}=1$, i $\frac{a+c}{b}=5$ lub $ab=2$ i $\frac{c-b}{a}=5$, i $\frac{a+c}{b}=1$. Stąd $a=2$ i $b=1$, i $c=3$ lub $a=-2$ i $b=-1$, i $c=-3$.

440. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez x^2-3x+5 jest wielomianem $(3a+3)x+b-5a-15$. Reszta będzie wielomianem zerowym wtedy i tylko wtedy, gdy $3a+3=0$ i $b-5a-15=0$. Stąd $a=-1$ i $b=10$.

441. $a=-7$ i $b=1$, $c=6$.

442. Dzieląc wielomian $W(x)$ przez x^2+x+1 otrzymujemy wielomian $P(x)=x^4-x^3+ax^2+(1-a)x+b-1$ i resztę $R(x)=(a-b)x+c-b+1$. Jeżeli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez x^2+x+1, to $R(x)$ jest wielomianem zerowym. Wynika stąd, że $a-b=0$, czyli $a=b$. Ale ponieważ $a=b$, to $P(x)=x^4-x^3+ax^2+(1-a)x+a-1$. Wystarczy więc pokazać, że wielomian $P(x)$ jest podzielny przez x^2-x+1. Wykonując dzielenie stwierdzamy, że tak jest rzeczywiście.

443. Dzieląc podany wielomian przez $(x-a)^2$ stwierdzamy, że resztą, z tego dzielenia jest wielomian $\left(\frac{1}{2}a^2+a+1\right)x+1-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^3$. Ponieważ wyróżnik funkcji kwadratowej $y=\frac{1}{2}a^2+a+1$ jest ujemny, więc $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} \frac{1}{2}a^2+a+1>0$. Oznacza to, że dla żadnego a reszta nie będzie wielomianem zerowym.

444. Suma współczynników wielomianu $W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ jest równa $W(1)$.
W naszym przypadku: $W(1)=3(1^2-3\cdot1+3)^{1994}-4(1^3+2\cdot1^2-4)^{1995}=7$.

445. Wiadomo, że suma współczynników wielomianu $W(x)$ jest równa $W(1)$. W naszym przypadku $W(1)=12^n-5^n$. Wystarczy więc pokazać, że $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} 7|12^n-5^n$. Ze wzoru $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$ wynika, że
$12^n-5^n=(12-5)(12^{n-1}+12^{n-2}\cdot5+...+12\cdot5^{n-2}+5^{n-2}+5^{n-1})=$
$=7(12^{n-1}+12^{n-2}\cdot5+...+12\cdot5^{n-2}+5^{n-1})$.
Zatem $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} 7|12^n-5^n$.

446. Przypuśćmy, że istnieje wielomian $W(x)$ czyniący zadość warunkom zadania. Wielomian ten musi mieć postać $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, przy czym $a, b, c, d\in C$ i $a\neq0$. Ponieważ $W(2)=3$ i $W(-2)=2$, więc prawdziwe muszą być równości $8a+4b+2c+d=3$ i $-8a+4b-2c+d=2$. Po dodaniu ich stronami otrzymujemy równość $8b+2d=5$, która nie jest możliwa, bo lewa jej strona jest liczbą parzystą, a prawa nie. Zatem nie istnieje wielomian spełniający warunki zadania.

447. Przypuśćmy, że istnieje wielomian $W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, o współczynnikach całkowitych spełniający warunki zadania. Wtedy prawdziwe byłyby równości
$a_0+26a_1+26^2a_2+...+26^na_n=8$ i $a_0+29a_1+29^2a_2+...+29^na_n=15$.
Odejmując stronami od równości drugiej równość pierwszą otrzymujemy:
$(29-26)a_1+(29^2-26^2)a_2+...+(29^n-26^n)a_n=7$ Stąd i ze wzoru
$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$ wynika, że
$3a_1+3(29+26)a_2+...+3(29^{n-1}+29^{n-2}\cdot26+...+29\cdot26^{n-2}+26^{n-1})a_n=7$.
Ostatnia równość jest niemożliwa, bo jej lewa strona jest podzielna przez 3, a prawa nie jest podzielna przez 3.

448. Ponieważ $W(x)$ jest wielomianem stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, to $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ i $a\neq0$ i $a, b, c, d\in C$. Stąd i z treści zadania wynika, że prawdziwe są równości $a7^3+b7^2+c7+d=6$ i $ak^3+bk^2+ck+d=11$. Odejmując stronami od równości drugiej równość pierwszą otrzymujemy
$a(k^3-7^3)+b(k^2-7^2)+c(k-7)=5$. Zatem
$a(k-7)(k^2+7k+49)+b(k-7)(k+7)+c(k-7)=5$, czyli
$(k-7)[a(k^2+7k+49)+b(k+7)+c]=5$. Ostatnia równość i fakt, że $a, b, c, d\in C$ świadczą o tym, iż liczba 5 jest podzielna przez $k-7$. W takim razie $k-7=1$, lub $k-7=-1$, lub $k-7=5$, lub $k-7=-5$. Stąd $k=8$ lub $k=6$, lub $k=12$, lub $k=2$.

449. Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy
$3(1+\sqrt{3})^2+a(1+\sqrt{3})^2+b(1+\sqrt{3})+12=0$ i $a, b, \in C$. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy $a(1+\sqrt{3})^2+b(1+\sqrt{3})=-18(1+\sqrt{3})$ i $a, b\in C$, czyli gdy $a(1+\sqrt{3})=-b-18$ i $a, b\in C$. Stąd $a=0$ i $-b-18=0$, czyli $a=0$ i $b=-18$.

450. Ponieważ a, b, c, d są kolejnymi liczbami naturalnymi, więc możemy przyjąć, że $a=n$, $b=n+1$, $c=n+2$, $d=n+3$, gdzie $n \in N$.
Zatem $W(x)=nx^3-(n+1)x^2-(n+2)x+n+3$. Zauważymy, że:
$W(x)=0 \Leftrightarrow nx^3-nx^2-x^2-nx-2x+n+3=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow nx^3-nx^2-x^2+1-nx+n-2x+2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow nx^2(x-1)-(x-1)(x+1)-n(x-1)-2(x-1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)(nx^2-x-n-3)=0 \Leftrightarrow (x=1$ lub $nx^2-x-n-3=0)$. Ponieważ wyróżnik funkcji kwadratowej $f(x)=nx^2-x-n-3$ jest równy $4n^2+12n+1$ i jak widać jest dodatni dla każdego $n \in N$, więc funkcja ta ma dwa różne miejsca zerowe x_1 i x_2. Oznacza to, że wielomian $W(x)$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, w tym co najmniej jeden pierwiastek całkowity. Aby ustalić dla jakich wartości a, b, c, d suma tych pierwiastków jest największa, oznaczmy tę sumę przez y.

Wobec tego $y=1+x_1+x_2$. Ale ze wzorów Viete'a wynika, że $x_1+x_2=\frac{1}{n}$.

Zatem $y=1+\frac{1}{n}$. Funkcja $y=1+\frac{1}{n}$, gdzie $n \in N$ osiągnie wartość największą wtedy i tylko wtedy, gdy n będzie najmniejsze, to znaczy, gdy $n=1$. Wtedy $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$.

451. Ponieważ $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, więc $W(0)=d$ i $W(1)=a+b+c+d$. Stąd i z faktu, że $W(0)$ i $W(1)$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi wynika, że takimi samymi liczbami są d i $a+b+c+d$. Gdyby jakaś liczba całkowita parzysta $2k$, gdzie $k \in C$, była pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to zachodziłaby równość $8ak^3+4bk^2+2ck+d=0$. Równość ta jest niemożliwa, bo trzy pierwsze składniki sumy $8ak^3+4bk^2+2ck+d$ są parzyste a d jest nieparzyste, więc ich suma nie jest zerem.
Rozumując podobnie i wykorzystując fakt, że $a+b+c+d$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, stwierdzamy, iż pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nie może być także liczba całkowita nieparzysta.

452. Przypuśćmy, że wielomian $W(x)$ ma pierwiastki rzeczywiste i załóżmy, że x_0 jest największym z tych pierwiastków. Zatem, $W(x_0)=0$ (1)

Ale ponieważ $\bigwedge_{x \in R} W(x)\cdot W(x+2)=W(x^2+x+2)$, to prawdziwa jest równość

$W(x_0)\cdot W(x_0+2)=W(x_0^2+x_0+2)$. (2)

Z (1) i (2) wynika, że $W(x_0^2+x_0+2)=0$. Oznacza to, że liczba $x_0^2+x_0+2$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Widać jednak, że $x_0^2+x_0+2>x_0$.
To jest sprzeczne z założeniem, że x_0 jest największym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości podanego w zadaniu twierdzenia.

453. Przypuśćmy, że przy podanych w zadaniu założeniach wielomian $W(x)$ ma pierwiastek całkowity r. Jeżeli r jest liczbą parzystą, to parzyste są także liczby r^4, ar^3, br^2, cr.
Zatem równość $r^4+ar^3+br^2+cr+d=0$ jest sprzeczna, gdyż d jest liczbą nieparzystą. Jeśli r jest liczbą nieparzystą, to nieparzyste są także liczby r^4, r^3, br^2, cr. Ale suma czterech liczb nieparzystych jest liczbą parzystą, więc liczbą parzystą jest $r^4+ar^3+br^2+cr$. Oznacza to, że równość $r^4+ar^3+br^2+cr+d=0$ jest w tym przypadku także sprzeczna.

454. Zauważmy, że
$W(x)=x^4+2x^3+ax^2+bx+c=x^4+2x^3+x^2-x^2+ax^2+bx+c=$
$=x^2(x^2+2x+1)+(a-1)x^2+bx+c=x^2(x+1)^2+(a-1)x^2+bx+c.$ (1)

Widać, że $\bigwedge_{x \in R} x^2(x+1)^2 \geqslant 0.$ (2)

Ponieważ $b^2+4c<4ac$ i $b^2 \geqslant 0$, więc $4c<4ac$. Stąd i z faktu, że $c>0$ wynika, iż $a-1>0$. (3)
Oznacza to, że $(a-1)x^2+bx+c$ jest funkcją kwadratową.
Wyróżnik tej funkcji jest równy $b^2-4c(a-1)=b^2-4ac+4c$.
Ale ponieważ $b^2+4c<4ac$, więc $b^2-4ac+4c<0$. (4)

Nierówności (3) i (4) świadczą o tym, że $\bigwedge_{x \in R} (a-1)x^2+bx+c>0$.

Stąd oraz z (1) i (2) wynika, że $\bigwedge_{x \in R} W(x)>0$. Ostatnie stwierdzenie świadczy o tym, że wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

455. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian x^2-1 ma postać $ax+b$. Ponadto istnieje taki wielomian $Q(x)$, że prawdziwa jest tożsamość $x^{2001}+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$. Wstawiając do tej tożsamości za x liczby 1 i -1 otrzymujemy układ równań $a+b=2$ i $-a+b=0$, którego jedynym rozwiązaniem jest $a=1$ i $b=1$. Wobec tego szukaną resztą jest $x+1$.

456. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez x^2-1 ma postać $ax+b$. Ponadto istnieje taki wielomian $P(x)$, że zachodzi tożsamość $W(x)=P(x)(x^2-1)+ax+b$. Wstawiając do tej tożsamości za x liczby 1 i -1 otrzymujemy równości:
$a+b=W(1)$ i $-a+b=W(-1)$. (1)
Ale ponieważ resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian x^4+x^3-x-1 jest wielomian x^3+x^2+x+2, więc istnieje taki wielomian $Q(x)$, że prawdziwa jest tożsamość $W(x)=Q(x)(x^4+x^3-x-1)+x^3+x^2+x+2$.
Wstawiając do tej tożsamości za x liczby 1 i -1 otrzymujemy równości:
$W(1)=5$ i $W(-1)=1$. (2)
Z równości (1) i (2) wynika, że $a+b=5$ i $-a+b=1$.
Stąd $a=2$ i $b=3$. Zatem szukaną resztą jest dwumian $2x+3$.

457. Oznaczmy przez $Q(x)$ wielomian będący ilorazem wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-a$, a przez R resztę z tego dzielenia. Przy tych oznaczeniach prawdziwa jest tożsamość $W(x)=(x-a)Q(x)+R$.
Wstawiając do tej tożsamości $x=a$ otrzymujemy równość $W(a)=R$.

458. $k=-2$ lub $k=5$.

459. $a \in (-1;\ 3)$.

460. Z treści zadania wynika, że istnieje taki wielomian $P(x)$, że prawdziwa jest tożsamość
$W(x)=P(x)(x^3-3x-2)+3x^2-4x+1.$ (1)
Natomiast z twierdzenia o reszcie wynika, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-2$ jest równa $W(2)$. Wstawiając $x=2$ do tożsamości (1) stwierdzamy, że $W(2)=P(2)\cdot 0+5=5$. Wobec tego szukaną resztą jest 5.

461. Ponieważ reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian x^2+x-2 jest równa $x+1$, więc istnieje taki wielomian $Q(x)$, że prawdziwa jest tożsamość $W(x)=(x^2+x-2)Q(x)+x+1$. Wstawiając do tej tożsamości $x=-2$ otrzymujemy równość $W(-2)=-1$. Ale z twierdzenia o reszcie wynika, że $W(-2)$ jest resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x+2$. Zatem szukaną resztą jest -1.

462. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x-1)(x+1)$ ma postać $ax+b$. Ponadto istnieje taki wielomian $G(x)$, że prawdziwa jest tożsamość
$W(x)=(x-1)(x+1)G(x)+ax+b$. Wstawiając do tej tożsamości za x liczby 1 i -1 otrzymujemy układ $W(1)=a+b$ i $W(-1)=-a+b$. Ale z twierdzenia o reszcie i treści zadania wynika, że $W(1)=3$ i $W(-1)=1$. Wobec tego $a+b=3$ i $-a+b=1$. Stąd $a=1$ i $b=2$. Zatem szukaną resztą jest $x+2$.

463. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$ wtedy i tylko wtedy, gdy reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez ten dwumian jest wielomianem zerowym. Ale z twierdzenia o reszcie wiadomo, że jest ona równa $W(a)$. Zatem wielomian $W(x)$ będzie podzielny przez dwumian $x-a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a)=0$. Ostatnia równość oznacza, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

464. $a=3$ lub $a=-3$. **465.** $a=1$ lub $a=4$.

466. Wielomian $W(x)$ będzie podzielny przez $(x+2)(x-3)$ wtedy i tylko wtedy, gdy będzie podzielny przez $x+2$ i będzie podzielny przez $x-3$. Tak będzie, zgodnie z twierdzeniem Bezouta, wtedy i tylko wtedy, gdy $W(-2)=0$ i $W(3)=0$, czyli gdy $8-2a+b=0$ i $18+3a+b=0$. Stąd $a=-2$ i $b=12$.

467. $a=-8$ i $b=10$. Wskazówka: $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$.

468. $a=2$ i $b=1$. Wskazówka: $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.

469. Wskazówka: Udowodnij, że miejsca zerowe trójmianu x^2-3x+2 są pierwiastkami wielomianu $W(x)$.

470. Łatwo sprawdzić, że $W(1)=0$. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem Bezouta, wielomianu $W(x)$ jest podzielny przez $x-1$. Dzieląc $W(x)$ przez $x-1$ otrzymujemy trójmian kwadratowy $x^2+x+1-p$. W takim razie wielomian $W(x)$ będzie miał trzy pierwiastki rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy trójmian $x^2+x+1-p$ będzie miał dwa pierwiastki rzeczywiste. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik tego trójmianu, którym jest wyrażenie $1-4(1-p)$, będzie nieujemny. Stąd $p\in\left\langle\frac{3}{4};\ \infty\right)$.

471. Ponieważ liczba r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to zgodnie z twierdzeniem Bezouta, wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-r$. Z algorytmu dzielenia wielomianów wynika, że dzieląc wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych przez dwumian $x-r$, gdzie r jest liczbą całkowitą, otrzymujemy wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych. Zatem

$\bigwedge_{x\in \boldsymbol{R}} W(x)=(x-r)\cdot P(x)$. Wstawiając do tej tożsamości $x=1$ i $x=-1$ prawdziwe są równości $W(1)=(1-r)P(1)$ i $W(-1)=(-1-r)P(-1)$, czyli równości $W(1)=(r-1)[-P(1)]$ i $W(-1)=(r+1)[P(-1)]$. Z równości tych i wcześniejszych ustaleń wynika, że $(r-1)\mid W(1)$ i $(r+1)\mid W(-1)$.

Uwaga: Rozumując podobnie można wykazać, że jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q\in \boldsymbol{C}$ i $q\neq 0$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, to liczba $p-q$ jest dzielnikiem $W(1)$, a liczba $p+q$ jest dzielnikiem $W(-1)$.

472. Jeżeli x_1, x_2, x_3, x_4 są różnymi pierwiastkami całkowitymi wielomianu $Q(x)$, to zgodnie z twierdzeniem Bezouta, prawdziwa jest równość
$Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)R(x)$, gdzie $R(x)$ jest wielomianem (1)
Ze znanego algorytmu dzielenia wielomianów wynika, że dzieląc wielomian o współczynnikach całkowitych przez iloczyn $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ otrzymujemy wielomian o współczynnikach całkowitych. Oznacza to, że wielomian $R(x)$ ma współczynniki całkowite. Przypuśćmy, że wielomian $P(x)$ ma pierwiastek całkowity x_0. Wtedy, ze względu na założenie $Q(x)=P(x)+3$, byłoby $Q(x_0)=3$. (2)
Równość (2) świadczy o tam, że x_0 nie jest pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$. Liczba x_0 nie może także być pierwiastkiem wielomianu $R(x)$, bo gdyby $R(x_0)=0$, to z równości (1) wynikałoby, że $Q(x_0)=0$. Reasumując dotychczasowe ustalenia stwierdzamy, że: $|Q(x_0)|=|x_0-x_1|\cdot|x_0-x_2|\cdot|x_0-x_3|\cdot|x_0-x_4|\cdot|R(x_0)|=3,$ (3)
przy czym każdy wyraz ciągu $(|x_0-x_1|, |x_0-x_2|, |x_0-x_3|, |x_0-x_4|, |R(x_0)|)$ jest liczbą naturalną, a każdy z pierwszych czterech wyrazów może być równy tylko jednemu z pozostałych trzech wyrazów tego ciągu. Bez ograniczenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że $|x_0-x_1|\leqslant|x_0-x_2|\leqslant|x_0-x_3|\leqslant|x_0-x_4|$. W takim razie musi być: $|x_0-x_1|\geqslant 1$ i $|x_0-x_2|\geqslant 1$ i $|x_0-x_3|\geqslant 2$ i $|x_0-x_4|\geqslant 2$. Stąd i z równości (3) oraz faktu, że $|R(x_0)|>0$ otrzymujemy $|Q(x_0)|\geqslant 1\cdot 1\cdot 2\cdot 2|R(x_0)|>4$. Wniosek ten jest sprzeczny z równością (3). Wobec tego wielomian $P(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

473. Łatwo sprawdzić, że dany wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x-2)^2$ i wynikiem tego dzielenia jest trójmian kwadratowy $x^2+10x+25$, który nie jest podzielny przez $x-2$, gdyż liczba 2 nie jest jego miejscem zerowym. Oznacza to, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x-2)^2$ i nie jest podzielny przez $(x-2)^3$. Zatem liczba 2 jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu $W(x)$.

474. Liczba 3 będzie pierwiastkiem dwukrotnym danego wielomianu wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian ten będzie podzielny przez $(x-3)^2$ i nie będzie podzielny przez $(x-3)^3$. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwa będzie tożsamość
$x^3-5x^2+px+q=(x-3)^2(x-a)$ i $a\neq 3$. Stąd $p=3$ i $q=9$.

475. Załóżmy, że liczba rzeczywista p jest pierwiastkiem podwójnym danego wielomianu $W(x)$. Wtedy prawdziwa będzie tożsamość $x^3+ax+b=(x-p)^2(x-q)$, czyli tożsamość $x^3+ax+b=x^3-(2p+q)x^2+p(p+2q)x-qp^2$.

Stąd $2p+q=0$ i $p(p+2q)=a$, i $-p^2q=0$. Zatem, $p^2=-\frac{a}{3}$ i $p^3=\frac{b}{2}$, a tym samym $p^6=-\frac{a^3}{27}$ i $p^6=\frac{b^2}{4}$. Wobec tego $\frac{a^3}{27}=\frac{b^2}{4}$, czyli $4a^3+27b^2=0$.

476. Załóżmy, że $W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, gdzie $a_n, a_{n-1}, ... a_1, a_0 \in C$ i $W(r)=0$ i $r \in C-\{0\}$. Mamy wykazać, że $r|a_0$. Z założenia wynika, że $a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+...+a_1r+a_0=0$, czyli $a_0=r(-a_nr^{n-1}-a_{n-1}r^{n-2}-...-a_1)$. Ponieważ $-n_nr^{n-1}-a_{n-1}r^{n-2}-...-a_1 \in C$ i $r \neq 0$, więc $r|a_0$.

477. $-1, -4, -2$. **478.** $1, 2$.

479. Załóżmy, że ułamek $\frac{l}{m}$ jest ułamkiem nieskracalnym, różnym od zera, tzn. załóżmy, że l, m są liczbami całkowitymi różnymi od zera i względnie pierwszymi. Oprócz tego załóżmy jeszcze, że $W(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych. Przy tych założeniach mamy dowieść, że $l|a_0$ i $m|a_n$.

Zauważmy, że jeśli ułamek $\frac{l}{m}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to prawdziwa jest równość: $a_0+a_1\frac{l}{m}+a_2\frac{l^2}{m^2}+...+a_{n-1}\frac{l^{n-1}}{m^{n-1}}+a_n\frac{l^n}{m^n}=0$, czyli równość:

$a_0m^n+a_1lm^{n-1}+a_2l^2m^{n-2}+...+a_{n-1}l^{n-1}m+a_nl^n=0$.

Wobec tego:

$a_0m^n=-l(a_1m^{n-1}+a_2\,lm^{n-2}+...+a_{n-1}l^{n-2}m+a_nl^{n-1})$ i

$a_nl^n=-m(a_0m^{n-1}+a_1lm^{n-2}+a_2l^2m^{n-3}+...+a_{n-1}l^{n-1})$.

Ostatnie dwie równości i założemia twierdzenia upoważniają do wniosków:

$l|a_0m^n$ i $m|a_nl^n$. (1)

Ale l i m są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi, więc l nie jest dzielnikiem m i m nie jest dzielnikiem l, a tym samym l nie jest dzielnikiem m^n i m nie jest dzielnikiem l^n.

Stąd i z (1) wynika, że $l|a_0$ i $m|a_n$.

480. $\frac{1}{3}, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$. **481.** $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$.

482. Ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x podanego wielomianu jest równy 1, więc każdy wymierny pierwiastek wielomianu $W(x)$ musi być liczbą całkowitą. Oznacza to, że jedynymi możliwymi pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są dzielniki wyrazu wolnego tego wielomianu, czyli liczby $-2, -1, 1, 2$.

Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy będą istnieć liczby całkowite a i b dla których:

$W(-2)=0$ i $W(-1)=0$, i $W(1)=0$ lub $W(-2)=0$ i $W(-1)=0$, i $W(2)=0$ lub $W(-2)=0$ i $W(1)=0$, i $W(2)=0$, lub $W(-1)=0$ i $W(1)=0$, i $W(2)=0$, czyli gdy będą istnieć liczby całkowite a i b spełniające alternatywę układów:

$$\begin{cases}2a-b=3\\a-b=-1\\a+b=-3\end{cases} \text{ lub } \begin{cases}2a-b=3\\a-b=-1\\2a+b=-5,\end{cases} \text{ lub } \begin{cases}2a-b=3\\a+b=-3\\2a+b=-5,\end{cases} \text{ lub } \begin{cases}a-b=-1\\a+b=-3\\2a+b=-5.\end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $a=-2$ i $b=-1$.

483. $x^3-4x^2-3x+12=x^2(x-4)-3(x-4)=(x-4)(x^2-3)=(x-4)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

484. $x^3+3x^2-x-3=x^2(x+3)-1(x+3)=(x+3)(x^2-1)=(x+3)(x-1)(x+1)$.

485. $x^4-2x^3-x+2=x^3(x-2)-(x-2)=(x-2)(x^3-1)=(x-2)(x-1)(x^2+x+1)$.

486. $x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$.

487. $x^4+9=x^4+6x^2+9-6x^2=(x^2+3)^2-(\sqrt{6}x)^2=(x^2+\sqrt{6}x+3)(x^2-\sqrt{6}x+3)$.

488. $x^8-1=(x^4-1)(x^4+1)=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+2x^2+1-2x^2)=$
$=(x-1)(x+1)(x^2+1)[(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2]=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$
$(x^2+\sqrt{2}x+1)$.

489. $x^6+1=(x^2)^3+1^3=(x^2+1)(x^4-x^2+1)=(x^2+1)(x^4+2x^2+1-3x^2)=$
$=(x^2+1)[(x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2]=(x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$.

490. $x^3-7x+6=x^3-x-6x+6=x(x^2-1)-6(x-1)=x(x-1)(x+1)-6(x-1)=$
$=(x-1)[x(x+1)-6]=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x-2)(x+3)$.

491. $x^3+2x^2-2x+3=x^3+1+2x^2-2x+2=(x+1)(x^2-x+1)+2(x^2-x+1)=$
$=(x^2-x+1)(x+3)$.

492. $x^4+x^3+2x^2+x+1=x^4+2x^2+1+x^3+x=(x^2+1)^2+x(x^2+1)=$
$=(x^2+1)(x^2+x+1)$.

493. $x^4-2\sqrt{2}x^3+2x^2-16=x^2(x^2-2\sqrt{2}x+2)-16=x^2(x-\sqrt{2})^2-16=$
$=[x(x-\sqrt{2}]^2-4^2=(x^2-\sqrt{2}x-4)(x^2-\sqrt{2}x+4)=(x+\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$
$(x^2-\sqrt{2}x+4)$.

494. $x^8+x^4+1=x^8+2x^4+1-x^4=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=$
$=(x^4+2x^2+1-x^2)(x^4+2x^2+1-3x^2)=[(x^2+1)^2-x^2][(x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2]=$
$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$.

495. $x^4+x^2+2x+6=x^4+4+x^2+2x+2=x^4+4x^2+4-4x^2+x^2+2x+2=$
$=(x^2+2)^2-(2x)^2+(x^2+2x+2)=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)+(x^2+2x+2)=$
$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+3)$.

496. $x^4+x^2+\sqrt{2}x+2=x^4+1+x^2+\sqrt{2}x+1=x^4+2x^2+1-2x^2+x^2+\sqrt{2}x+1=$
$=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2+(x^2+\sqrt{2}x+1)=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)+$
$+(x^2+\sqrt{2}x+1)=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+2)$.

497. Wystarczy pokazać, że dla dowolnej liczby całkowitej x wielomian $W(x)$ jest iloczynem pięciu kolejnych liczb całkowitych. Zauważmy, że:
$W(x)=x(x^4-5x^2+4)=x(x^4+4x^2+4-9x^2)=x[(x^2+2)^2-(3x)^2]=$
$=x(x^2-3x+2)(x^2+3x+2)=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$.

498. $W(x)=\frac{1}{24}(x^4+6x^3+11x^2+6x)$. Wystarczy pokazać, że dla każdej liczby całkowitej x wielomian $P(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x$ jest podzielny przez 24. Trzeba udowodnić, że wielomian ten jest iloczynem czterech kolejnych liczb całkowitych. Nietrudno zauważyć, że:
$P(x)=x(x^3+6x^2+11x+6)=x(x+1)(x^2+5x+6)=x(x+1)(x+2)(x+3)$.

499. $W(x)=x^2\cdot x^{3n}+x+1=x^2\cdot x^{3n}-x^2+x^2+x+1=x^2(x^{3n}-1)+x^2+x+1$, ale z wzoru $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$ wynika, że $x^{3n}-1=(x^3)^n-1^n=(x^3-1)(x^{3n-3}+x^{3n-6}+...+x^3+1)=$ $=(x-1)(x^2+x+1)(x^{3n-3}+x^{3n-6}+...+x^3+1)$.
Wobec tego $W(x)=x^2(x-1)(x^2+x+1)(x^{3n-3}+x^{3n-6}+...+x^3+1)+x^2+x+1=$ $=(x^2+x+1)[x^2(x-1)(x^{3n-3}+x^{3n-6}+...+x^3+1)-1]$. To oznacza, że podane w zadaniu twierdzenie jest prawdziwe.

500. $W(x)=x^4+x^2+4x^3+4x+5x^2+5=x^2(x^2+1)+4x(x^2+1)+5(x^2+1)=$ $=(x^2+1)(x^2+4x+5)$.
Ponieważ obydwa czynniki otrzymanego iloczynu są dla każdej liczby całkowitej x dodatnie, więc jeśli $W(x)$ jest liczbą pierwszą, to $x^2+1=1$ i $x^2+4x+5>1$ lub $x^2+4x+5=1$ i $x^2+1>1$.
Stąd $x=0$ lub $x=-2$. Łatwo sprawdzić, że w obu przypadkach wartość wielomianu $W(x)$ jest równa 5, a 5 jest liczbą pierwszą. Wobec tego warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $x=0$ lub $x=-2$.

501. Przypuśćmy, że istnieją wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ stopnia niższego niż n, o współczynnikach całkowitych, takie, że $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)-1=P(x)\cdot Q(x)$. Wtedy: $P(a_1)\cdot Q(a_1)=-1$ i $P(a_2)\cdot Q(a_2)=-1$, i ..., i $P(a_n)\cdot Q(a_n)=-1$. Stąd $P(a_1)=1$ i $Q(a_1)=-1$ lub $P(a_1)=-1$ i $Q(a_1)=1$, dla $l=1, 2, ... n$. Stąd dla każdego $i=1, 2 ... n$ prawdziwe są równości: $P(a_i)+Q(a_i)=0$.
Oznacza to, że liczby $a_1, a_2, ... ,a_n$ są pierwiastkami wielomianu $P(x)+Q(x)$.
Ponieważ wielomian $P(x)+Q(x)$ może być stopnia co najwyżej $n-1$, więc może mieć n różnych pierwiastków wtedy i tylko wtedy, gdy jest wielomianem zerowym, czyli $P(x)=-Q(x)$. W takim razie prawdziwa jest tożsamość: $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)-1=-[Q(x)]^2$. To jest niemożliwe, gdyż współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x po lewej stronie tożsamości jest równy 1, a po prawej stronie jest ujemny.

502. Liczby rzeczywiście x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, gdzie $a\neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwa jest tożsamość $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, czyli tożsamość $ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3a$.
Stąd: $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$ i $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$ i $x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$.

503. Ze wzorów Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego wynika, że liczby a, b, c będą pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^3-ax^2+bx-c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a+b+c=a$ i $ab+ac+bc=b$ i $abc=c$. Ale prawdziwe są równoważności:
$a+b+c=a$ i $ab+ac+bc=b$, i $abc=c\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b+c=0$ i $a(b+c)+bc-b=0$, i $abc-c=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b+c=0$ i $b(c-1)=0$, i $c(ab-1)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow[b=0$ i $b+c=0$, i $c(ab-1)=0]$ lub $[c-1=0$ i $b+c=0$, i $c(ab-1)=0]\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(b=0$ i $c=0$, i $a\in\mathbb{R})$ lub $(c=1$ i $b=-1$, i $a=-1)$.
Wobec tego warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy a jest dowolną liczbą rzeczywistą i $b=0$, i $c=0$ lub $a=-1$ i $b=-1$, i $c=1$.

504. Ponieważ $x_1=x_2=x_3-3$, więc $x_2=x_1$ i $x_3=x_1+3$.
Ze wzorów Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego wynika, że liczby x_1, x_2, x_3, czyli liczby x_1, x_2, x_1+3 będą pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^3+ax+b$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony będzie układ równań:
$x_1+x_1+x_1+3=0$ i $x_1x_1+x_1(x_1+3)+x_1(x_1+3)=a$, i $x_1x_1(x_1+3)=-b$.
Stąd $x_1=-1$ i $a=-3$, i $b=-2$.

505. Oznaczmy przez x_1, x_2, x_3 różne pierwiastki rzeczywiste wielomianu $W(x)$. Z nierówności udowodnionej w zadaniu 101 wynika, że $x_1^2+x_2^2+x_3^2\geqslant x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$. Stąd po prostych przekształceniach otrzymujemy $(x_1+x_2+x_3)^2\geqslant 3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$.
Ale ze wzorów Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego mamy:
$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$ i $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$ Zatem $\frac{b^2}{a^2}\geqslant\frac{3c}{a}$, czyli $b^2\geqslant 3ac$.

506. Ponieważ x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $W(x)=x^3+ax^2+bx+c$, to zgodnie z twierdzeniem Viete'a prawdziwe są równości: $x_1+x_2+x_3=-a$ i $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$ i $x_1x_2x_3=-c$.
Ale ponieważ $x_1:x_2=x_2:x_3$, to $x_2^2=x_1x_3$. Wobec tego $x_1+x_2+x_3=-a$ i $x_1x_2+x_2^2+x_2x_3=b$, i $x_2^3=-c$. Zatem $x_1+x_2+x_3=-a$ i $x_2(x_1+x_2+x_3)=b$, i $x_2^3=-c$. Z pierwszych dwóch równości wynika, że $x_2(-a)=b$, czyli $-x_2^3\cdot a^3=b^3$. Stąd i z równości $x_2^3=-c$ otrzymujemy $b^3=ca^3$.

507. Niech x_1, x_2, x_3 oznaczają pierwiastki wielomianu $W(x)$. Ze wzorów Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego wynika, że $x_1+x_2+x_3=0$ i $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p$ i $x_1x_2x_3=-q$. Podnosząc obie strony pierwszej równości do kwadratu otrzymujemy $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=0$. Stąd i z faktu, że $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p$ wynika, iż $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2p$. (1)
Ponieważ $q\neq 0$, więc $x_1\neq 0$ i $x_2\neq 0$ i $x_3\neq 0$, a tym samym
$x_1^2+x_2^2+x_3^2>0$. (2)
Z (1) i (2) wynika, że $-2p>0$, czyli $p<0$.

508. Oznaczmy przez x_1, x_2, x_3 różne pierwiastki podanego wielomianu. Nie ograniczymy ogólności rozważań przyjmując, że $x_1<x_2<x_3$. Ponieważ jeden z pierwiastków jest średnią arytmetyczną pozostałych, więc $x_2=\frac{x_1+x_3}{2}$, stąd $x_1+x_3=2x_2$.
Ale zgodnie ze wzorami Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego mamy:
$x_1+x_2+x_3=-a$ i $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$, i $x_1x_2x_3=-c$.
Zatem $(x_1+x_3)+x_2=-a$ i $x_2(x_1+x_3)+x_1x_3=b$, i $x_1x_2x_3=-c$.
Łącząc te równości z równością $x_1+x_3=2x_2$ stwierdzamy, że
$3x_2=-a$ i $2x_2^2+x_1x_3=b$ i $x_1x_3x_2=-c$, czyli $x_2=-\frac{a}{3}$ i $2\cdot\frac{a^2}{9}+x_1x_3=b$ i $x_1x_3\left(-\frac{a}{3}\right)=-c$. Z równości drugiej wynika, że $x_1x_3=b-\frac{2a^2}{9}$. Stąd i z równości $x_1x_3\left(-\frac{a}{3}\right)=-c$ otrzymujemy $\left(b-\frac{2a^2}{9}\right)\left(-\frac{a}{3}\right)=-c$. Zatem $\frac{ab}{3}-\frac{2a^3}{27}=c$, czyli $27c=9ab-2a^3$.

509. Ponieważ liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^3+px+q$, więc zgodnie ze wzorami Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego, prawdziwe są równości:

$x_1+x_2+x_3=0$ i $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p$, i $x_1x_2x_3=-q$.

Z równości pierwszej wynika, że $x_3=-(x_1+x_2)$ (1)

Wobec tego $x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2=2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$. (2)

Ale ponieważ $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p$ i $x_3=-(x_1+x_2)$, to

$x_1x_2-x_1(x_1+x_2)-x_2(x_1+x_2)=p$, czyli

$x_1+x_1x_2+x_2^2=-p$. (3)

Z równości (2) i (3) wynika, że $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2p$.

Natomiast $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_1^3+x_2^3-(x_1+x_2)^3=$

$=x_1^3+x_2^3-x_1^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2-x_2^3=3x_1x_2(x_1+x_2)$.

Stąd i z równości (1) otrzymujemy $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3$.

Stąd i z faktu $x_1x_2x_3=-q$ otrzymujemy $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3q$.

510. $x=2$ lub $x=3$, lub $x=-3$.

511. $x=\sqrt{2}$ lub $x=3$, lub $x=-3$.

512. $x=\sqrt{5}$ lub $x=-\sqrt{5}$. Wskazówka: podstaw $x^2=t$.

513. $x=1$ lub $x=-2$, lub $x=3$. Wskazówka: $x^3-2x^2-5x+6=x^3-x^2-x^2+x-6x+6$.

514. $x=2$ lub $x=3$. **515.** $x=1$ lub $x=-2$. **516.** $x=\frac{1}{2}$. **517.** $x=-\frac{1}{2}$.

518. $x=4$. Wskazówka: $x^3-4x^2-|5x-20|=0 \Leftrightarrow (5x-20\geqslant 0$ i $x^3-4x^2-5x+20=0$ lub $5x-20<0$ i $x^3-4x^2+5x-20=0)$.

519. $x=\frac{5}{2}$ lub $x=1$ lub, $x=-\frac{5}{2}$, lub $x=-1$.

Wskazówka: $2x^4+5=|5x^3+2x| \Leftrightarrow (5x^3+2x=2x^4+5$ lub $5x^3+2x=-2x^4-5)$.

520. $x=0$ lub $x=4$ lub, $x=-1$ lub, $x=1$ lub, $x=-4$.

Wskazówka: $|x^3-4x|=3x^2 \Leftrightarrow (x^3-4x=3x^2$ lub $x^3-4x=-3x^2)$.

521. Podstawiając $x-\frac{3}{2}=y$ otrzymujemy równanie $(y-1)^4+\ y^4=1$, czyli równanie $y(y^3-2y^2+3y-2)=0$.

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy $y=0$ lub $y=1$.

Stąd i z równości $x-\frac{3}{2}=y$ mamy: $x=\frac{3}{2}$ lub $x=\frac{5}{2}$.

522. Podane równanie można przekształcić do postaci

$(6x+5)^2\cdot\frac{6x+5-1}{2}\cdot\frac{6x+5+1}{6}=6$. Przyjmując, że $6x+5=t$ otrzymujemy równanie

$t^2\cdot\frac{t-1}{2}\cdot\frac{t+1}{6}=6$, czyli równanie $t^4-t^2-72=0$. Podstawiając dalej $t^2=z$, gdzie $z\geqslant 0$ otrzymujemy równanie kwadratowe $z^2-z-72=0$, którego jedynym rozwiązaniem nieujemnym jest $z=9$. Wobec tego $t^2=9$, czyli $t=3$ lub $t=-3$. Oznacza to, że

$6x+5=3$ lub $6x+5=-3$. Stąd $x=-\frac{1}{3}$ lub $x=-\frac{4}{3}$.

523. Podstawiając $x\sqrt{2}=y$ otrzymujemy równanie $2y^3-11y^2+17y-6=0$.

Rozwiązaniami powyższego równania są liczby: 2, 3, $\frac{1}{2}$. Zatem, $x=\sqrt{2}$

lub $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, lub $x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

524. Przy założeniu $a\geqslant -1$ prawdziwe są równoważności:

$x^3-(a+2)x+\sqrt{a+1}=0 \Leftrightarrow x^3-(a+1)x-x+\sqrt{a+1}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-\sqrt{a+1})(x+\sqrt{a+1})-(x-\sqrt{a+1})=(x-\sqrt{a+1})(x+\sqrt{a+1}-1)=0$.

Stąd: $x=\sqrt{a+1}$ lub $x=\frac{-\sqrt{a+1}-\sqrt{a+5}}{2}$, lub $x=\frac{-\sqrt{a+1}+\sqrt{a+5}}{2}$.

525. Ponieważ $1+x^2+x^4=(1+2x^2+x^4)-x^2=(1+x^2)^2-x^2=(1+x+x^2)(1-x+x^2)$, więc podane równanie można zapisać w postaci

$(1+x+x^2)^2=\frac{a+1}{a-1}(1+x+x^2)(1-x+x^2)$, czyli

$$(1+x+x^2)\left[(1+x+x^2)-\frac{a+1}{a-1}(1-x+x^2)\right]=0 \qquad (1)$$

Ale trójmian $1+x+x^2$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, zatem rozwiązaniami rzeczywistymi równania (1) będą rozwiązania rzeczywiste równania

$(1+x+x^2)-\frac{a+1}{a-1}(1-x+x^2)=0$.

Stąd po prostych rachunkach i wykorzystaniu założenia $|a|\geqslant 2$

otrzymujemy: $x=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ lub $x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

526. Podane równanie przekształcamy do postaci

$(x^2-a^2)^2-3ax(x^2-a^2)+2a^2x^2=0$. Nietrudno sprawdzić, że $x=0$ nie jest jego rozwiązaniem. Przy założeniu $x\neq 0$ powyższe równanie jest równoważne równaniu

$\left(\frac{x^2-a^2}{ax}\right)^2-3\frac{x^2-a^2}{ax}+2=0$. Stąd $\frac{x^2-a^2}{ax}=1$ lub $\frac{x^2-a^2}{ax}=2$. Rozwiązując równanie i wykorzystując założenie $a>0$ otrzymujemy: $x=a(1-\sqrt{2})$ lub $x=a(1+\sqrt{2})$, lub

$x=\frac{a(1-\sqrt{5})}{2}$, lub $x=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$.

527. Łatwo sprawdzić, że liczba $x=-1$ nie jest rozwiązaniem podanego równania. Jeśli $x\neq -1$, to:

$x^4+(x+1)(5x^2-6x-6)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+\frac{5x^2-6x-6}{x+1}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+5\frac{x^2}{x+1}-6=0$. Podstawiając $\frac{x^2}{x+1}=t$ otrzymujemy równanie

$t^2+5t-6=0$, którego rozwiązaniami rzeczywistymi są liczby $t=1$ lub $t=-6$. Zatem

$\frac{x^2}{x+1}=1$ lub $\frac{x^2}{x+1}=-6$. Po rozwiązaniu powyższych równań otrzymujem

$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ lub $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, lub

$x=-3-\sqrt{3}$, lub $x=-3+\sqrt{3}$.

528. $x^4+3x^3+4x^2-13x-9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4+2x^2+1+3(x^3+2x^2+x+2)-4(x^2+4x+4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+1)^2+3[x^2(x+2)+x+2]-4(x+2)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+1)^2+3(x^2+1)(x+2)-4(x+2)^2=0$

Widać, że jeśli $x=-2$, to równanie jest sprzeczne. Jeśli $x\neq-2$, to równanie możem zapisać w postaci $\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^2+3\frac{x^2+1}{x+2}-4=0$. Stąd $\frac{x^2+1}{x+2}=1$ lub $\frac{x^2+1}{x+2}=-4$. P rozwiązaniu tych równań otrzymujemy $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ lub $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

529. Podane równanie przekształcamy do postaci $x(\sqrt{3})^2+(2x^2+1)\sqrt{3}+(x^3-1)=0$. Widać, że liczba $x=0$ nie jest rozwiązaniem równania.

Jeśli $x\neq0$, to liczba $\sqrt{3}$ spełnia równanie kwadratowe $xt^2+(2x^2+1)t+(x^3-1)=0$ z niewiadomą t. Oznacza to, że

$\sqrt{3}=\frac{-(2x^2+1)-(2x+1)}{2x}$ lub $\sqrt{3}=\frac{-(2x^2+1)+2x+1}{2x}$,

czyli $\sqrt{3}=-x+1$ lub $x^2+(\sqrt{3}+1)x+1=0$. Wobec tego

$x=1-\sqrt{3}$ lub $x=\frac{-(\sqrt{3}+1)-\sqrt[4]{12}}{2}$, lub $x=\frac{-(\sqrt{3}+1)+\sqrt[4]{12}}{2}$.

530. $x^4-12x^2+16\sqrt{2}x-12=x^4-6(\sqrt{2})^2x^2+8(\sqrt{2})^3x-3(\sqrt{2})^4=$

$=x^4-(\sqrt{2})^2x^2-5(\sqrt{2})^2x^2+5(\sqrt{2})^3x+3(\sqrt{2})^3x-3(\sqrt{2})^4=$

$=x^2[x^2-(\sqrt{2})^2]-5(\sqrt{2})^2x[x-\sqrt{2}]+3(\sqrt{2})^3[x-\sqrt{2}]=$

$=(x-\sqrt{2})[(x+\sqrt{2})x^2-5(\sqrt{2})^2x+3(\sqrt{2})^3]=$

$=(x-\sqrt{2})[x^3+\sqrt{2}x^2-5(\sqrt{2})^2x+3(\sqrt{2})^3]=$

$=(x-\sqrt{2})[x^3-\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}x^2-2(\sqrt{2})^2x-3(\sqrt{2})^2+3(\sqrt{2})^3]=$

$=(x-\sqrt{2})[x^2(x-\sqrt{2})+2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})-3(\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})]=$

$=(x-\sqrt{2})^2[x^2+2\sqrt{2}x-3(\sqrt{2})^2]$.

Stąd rozwiązaniami podanego równania są liczby $\sqrt{2}$ i $-3\sqrt{2}$.

531. $x^4+5x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow x^4+x^2+(4x^2-12x+9)=0 \Leftrightarrow x^4+x^2+(2x-3)^2=0$.
Ostatnie równanie jest sprzeczne.

532. $x=\frac{3}{2}$.

533. $x=-2$.

534. Ponieważ równanie można przekształcić do postaci
$x[m^2x^2+m(m+6)x+m+6]=0$, więc warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko

wtedy, gdy równanie $m^2x^2+m(m+6)x+m+6=0$ będzie sprzeczne. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy $m=0$ lub $m\neq0$ i $m^2(m+6)^2-4m^2(m+6)<0$, czyli gdy $m=0$ lub $m\neq0$ i $(m+6)^2-4(m+6)<0$. Stąd $m=0$ lub $m\in(-6;\ -2)$.

535. Ponieważ $(m+1)x^3-2x^2+(m-1)x=0 \Leftrightarrow x[(m+1)x^2-2x+m-1]=0$, więc warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy równanie
$(m+1)x^2-2x+m-1=0$ będzie mieć dwa różne rozwiązania niezerowe.
Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy $m+1\neq0$ i $m-1\neq0$,
i $4-4(m+1)>0$. Stąd $m\in(-\sqrt{2};\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ \sqrt{2})$.

536. Podstawiając $x^2=t$ otrzymujemy równanie $t^2-(m+2)t+m=0$.
Podane równanie będzie mieć dokładnie trzy różne rozwiązania rzeczywiście wtedy i tylko wtedy, gdy równanie ze zmienną t będzie mieć dwa rozwiązania rzeczywiste, z których jedno będzie zerem, a drugie liczbą dodatnią. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy $m=0$ i $(m+2)^2-4m>0$, i $m+2>0$. Stąd $m=0$.

537. Podstawiając $x^2=t$ otrzymujemy równanie $t^2-(a+1)t+4=0$.
Podane równanie będzie mieć cztery różne rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy równanie ze zmienną t będzie mieć dwa różne rozwiązania t_1, t_2 rzeczywiste i dodatnie. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy $(a+1)^2-16>0$ i $t_1t_2>0$, i $t_1+t_2>0$, czyli gdy $(a+5)(a-3)>0$ i $4>0$ i $a+1>0$. Stąd $a\in(3;\ \infty)$.

538. Podstawiając $x^2=t$ otrzymujemy równanie $t^2-10t+9-m=0$. (1)
Podane równanie ma 4 różne rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy równanie (1) ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste dodatnie, czyli gdy $m\in(-16;9)$.
Równanie ma dokładnie 3 różne rozwiązania rzeczywiste, gdy równanie (1) ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest zerem, a drugie liczbą rzeczywistą dodatnią, czyli gdy $m=9$.
Równanie ma dokładnie 2 różne rozwiązania rzeczywiste, gdy równanie (1) ma dwa rozwiązania rzeczywiste różnych znaków lub dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste dodatnie, to znaczy gdy $m=-16$ lub $m\in(9;\ \infty)$.
Równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste, gdy równanie (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie zerowe, a to jest niemożliwe.
Równanie jest sprzeczne wtedy i tylko wtedy, gdy równanie (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie ujemne lub równanie (1) ma dwa różne rozwiązania ujemne lub równanie (1) jest sprzeczne. Tak będzie, gdy $m\in(-\infty;\ -16)$.

539. Podane równanie można przekształcić do postaci $(x+1)^4-6(x+1)^2+a+5=0$.
Podstawmy $(x+1)^2=t$. Wtedy otrzymujemy równanie $t^2-6t+a+5=0$.
Oznaczmy przez Δ wyróżnik ostatniego równania, a przez t_1 i t_2 jego pierwiastki (niekoniecznie różne). Podane równanie ma 4 rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta>0$ i $t_1+t_2>0$ i $t_1t_2>0$, czyli gdy $a\in(-5;\ 4)$.
Równanie ma 3 rozwiązania, gdy $\Delta>0$ i $t_1t_2>0$ i $t_1+t_2>0$, czyli gdy $a=5$.
Równanie ma 2 rozwiązania, gdy $\Delta>0$ i $t_1t_2<0$ lub $\Delta=0$ i $t_1+t_2>0$,
czyli gdy $a\in(-\infty;\ -5)$ lub $a=4$.
Dla żadnego $a\in \mathbf{R}$ równanie nie ma dokładnie jednego rozwiązania.
Równanie nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta<0$ lub $\Delta\geqslant0$, $t_1t_2>0$ i $t_1+t_2<0$, czyli gdy $a\in(4;\ \infty)$.

540. Dane równanie można przekształcić do postaci $(x-1)(x^n-64)=0$. Wobec teg równanie to będzie mieć dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylk wtedy, gdy równanie $x^n-64=0$ będzie mieć dokładnie jedno rozwiązanie. Ta będzie wtedy i tylko wtedy, gdy n będzie nieparzystą liczbą naturalną. Rozumują podobnie stwierdzamy, że dane równanie ma dokładnie trzy rozwiązania rze czywiste, gdy n jest parzystą liczbą naturalną, a dokładnie trzy rozwiązani całkowite, gdy $n=2$ lub $n=6$.

541. Ponieważ liczba rzeczywista r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, więc $W(r)=0$. Wobe tego prawdziwa jest równoważność $W[W(r)]=W(r) \Leftrightarrow W(0)=0$. Stąd i z faktu, że $W(0$ jest wyrazem wolnym wielomianu $W(x)$ wynika prawdziwość podanego twierdzenia. Uwaga: Analogicznie można sprawdzić, że jeśli liczba rzeczywista r jest pierwiast kiem wielomianu $W(x)$, to r jest rozwiązaniem równania $W[W(x)]=x$ wtedy i tylk wtedy, gdy wyraz wolny wielomianu $W(x)$ jest równy r.

542. I sposób.

$x^3-(p+1)x^2+(p-3)x+3=0 \Leftrightarrow x^3-px^2-x^2+px-3x+3=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2(x-1)-px(x-1)-3(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-px-3)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x=1$ lub $x^2-px-3=0)$.

Ponieważ wyróżnik trójmianu kwadratowego x^2-px-3 jest równy p^2+12 i jak widać jest dodatni dla każdego $p \in \mathbf{R}$, więc równanie $x^3-(p+1)x^2+(p-3)x+3=0$ ma dla dowolnego rzeczywistego p trzy rozwiązania rzeczywiste:

$1, \dfrac{p-\sqrt{p^2+12}}{2}, \dfrac{p+\sqrt{p^2+12}}{2}$.

Łatwo zauważyć, że liczby te dla każdego $p \in \mathbf{R}$ spełniają nierówność

$\dfrac{p-\sqrt{p^2+12}}{2}<1<\dfrac{p+\sqrt{p^2+12}}{2}$. Wobec tego tylko liczba 1 może być średnią arytmetyczną liczb pozostałych. Tak będzie wtedy, gdy

$\dfrac{p-\sqrt{p^2+12}}{2}+\dfrac{p+\sqrt{p^2+12}}{2}=2$. Stąd $p=2$.

II sposób.

Niech x_1, x_2, x_3 będą liczbami rzeczywistymi. Bez ograniczenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że $x_1<x_2<x_3$. Przy tych ustaleniach tylko liczba x_2 może być średnią arytmetyczną liczb pozostałych. Natomiast ze wzorów Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego wynika, że liczby x_1, x_2, x_3 będą rozwiązaniami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1+x_2+x_3=p+1$ i $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p-3$ i $x_1x_2x_3=-3$.

Powiemy więc, że warunki zadania będą spełnione dla takich wartości parametru p, dla których prawdziwy będzie układ równań:

$x_1+x_2+x_3=p+1$ i $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p-3$, i $x_1x_2x_3=-3$, i $x_2=\dfrac{x_1+x_3}{2}$.

Przekształcając ten układ otrzymujemy $x_1+x_3=\dfrac{2p+2}{3}$ i $x_2=\dfrac{p+1}{3}$, i

$x_1x_3=\dfrac{-2p^2+5p-29}{9}$, i $2p^3-3p^2+24p-52=0$.

Łatwo sprawdzić, że jednym z rozwiązań równania $2p^3-3p^2+24p-52=0$ jest $p=2$, a dzieląc wielomian $2p^3-3p^2+24p-52$ przez $p-2$ otrzymujemy trójmian kwadratowy $2p^2+p+26$, którego wyróżnik jest ujemny.
Oznacza to, że jedynym rozwiązaniem równania $2p^3-3p^2+24p-52=0$ jest liczba $p=2$. Wobec tego dane równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest średnią arytmetyczną pozostałych wtedy i tylko wtedy, gdy $p=2$.

543. Oznaczmy przez x_1, x_2, x_3 rozwiązania podanego równania i załóżmy, że $x_2x_3=1$. (1)
Ze wzorów Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego wynika, że
$x_1x_2x_3=-2\sqrt{3}$. (2)
Z równości (1) i (2) otrzymujemy $x_1=-2\sqrt{3}$. dzieląc wielomian
$3x^3+2\sqrt{3}x^2-21x+6\sqrt{3}$ przez dwumian $x+2\sqrt{3}$ otrzymujemy trójmian
kwadratowy $3x^2-4\sqrt{3}x+3$, którego pierwiastkami są liczby $x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ i $x_3=\sqrt{3}$.

544. Ponieważ $x_1:x_2:x_3=1:2:3$, więc $x_2=2x_1$ i $x_3=3x_1$.
Stąd i ze wzorów Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego wynika, że:
$6x_1=6$ i $11x_1^2=p$, $6x_1^3=-q$. Zatem $x_1=1$ i $x_2=2$, i $x_3=3$, i $p=11$, i $q=-6$.
Łatwo sprawdzić, że otrzymane wartości czynią zadość warunkom zadania.

545. Ponieważ wyrazem wolnym wielomianu x^3-px+2 nie jest liczba zero, więc rozwiązaniem tego równania nie może być 0. Zatem musi być $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Wiadomo, że jeśli równanie stopnia trzeciego ma dwa rozwiązania rzeczywiste, to ma także rozwiązanie rzeczywiste trzecie. Oznaczmy je przez c. Prawdziwa jest więc równość:
$c^3-pc+2=0$. (1)
Ale ponieważ liczby a, b, c są rozwiązaniami równania $x^3-px+2=0$, to zgodnie ze wzorami Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego,
jest $abc=-2$, skąd $c=\dfrac{-2}{ab}$. (2)

Z równości (1) i (2) otrzymujemy $\left(\dfrac{-2}{ab}\right)^3-p\left(\dfrac{-2}{ab}\right)+2=0$

Wobec tego $(ab)^3+p(ab)^2-4=0$. Ostatnia równość oznacza, że liczba ab jest rozwiązaniem równania $x^3+px^2-4=0$.

546. Jeśli x_0 jest wspólnym rozwiązaniem rzeczywistym podanych równań, to prawdziwe są równości:
$x_0^3+ax_0+b=0$ i $x_0^3+cx_0+d=0$. (1)
Odejmując te równości stronami otrzymujemy
$(a-c)x_0+b-d=0$. (2)
Jeżeli $a=c$, to z równości (2) wynika, że $b-d=0$, czyli $b=d$ i jak łatwo sprawdzić równość $(ad-bc)(a-c)^2=(b-d)^3$ jest wtedy prawdziwa.
Jeśli $a \neq c$, to z równości (2) mamy $x_0=\dfrac{d-b}{a-c}$. Mnożąc równości (1) obustronnie

odpowiednio pierwszą przez d, drugą przez b i odejmując stronami stwierdzamy, że $x_0^3(d-b)+(ad-bc)x_0=0$. Stąd i z faktu, $x_0\neq 0$ wynika, że $x_0^2(d-b)+ad-bc=0$. Po wstawieniu do ostatniej równości $x_0=\frac{d-b}{a-c}$ i wykonaniu prostych przekształceń dostajemy tezę naszego twierdzenia.

547. Przyjmijmy, że $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=x$. (1)

Podnosząc obie strony równości (1) do trzeciej potęgi otrzymujemy

$x^3=\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}-2)-3\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)$, czyli

$x^3=4-3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)$. (2)

Z równości (1) i (2) otrzymujemy $x^3=4-3x$, czyli
$x^3+3x-4=0$. (3)

Łatwo stwierdzamy, że jedynym rozwiązaniem równania (3) jest liczba 1. Wobec tego
$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$.

548. $x\in(-\sqrt{5};\ 0)\cup(\sqrt{5};\ \infty)$.

549. $x\in\langle -3;\ 2\rangle\cup\langle 3;\ \infty)$.

550. $x\in\langle -2;\ 2\rangle\cup\langle 7;\ \infty)$.

551. $x\in(-\infty;\ -3\rangle\cup\langle 0;\ 1\rangle$.

552. $x\in(-\sqrt{3};\ \sqrt{3})$.

553. $x\in(-3;\ -1)\cup(2;\ \infty)$.

554. $x\in(-\infty;\ -2\rangle\cup\langle -1;\ 3\rangle$.

555. $x\in(-\infty;\ 2)$.

556. $x\in(-5;\ -2)\cup(5;\ \infty)$.

557. $x\in\left\langle -2;\ \frac{1}{2}\right\rangle$.

558. $x\in\langle -1;\ 2\rangle$.

559. $x\in(-\infty;\ -3\rangle\cup\{3\}$.

560. $x\in(-\infty;\ -5\rangle\cup\{-3\}\cup\langle 2;\ \infty)$.

561. $x\in(-\infty;\ -2\rangle\cup\{2\}\cup\langle 3;\ 4\rangle$.

562. $x\in(-\infty;\ -3\rangle\cup\{1\}\cup\langle 2;\ 3\rangle$.

563. $x\in(0;\ 2)$.

564. $x\in(0;\ 1)$.

565. Podstawiając $2x^2-3x-6=t$ otrzymujemy nierówność $(t-2)t<3$, której równoważny jest układ $t>-1$ i $t<3$.
Wobec tego rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu
$2x^2-3x-6>-1$ i $2x^2-3x-6<3$. Stąd $x\in\left(-\frac{3}{2};\ -1\right)\cup\left(\frac{5}{2};\ 3\right)$.

566. $x\in(-\infty;\ -\sqrt{6}\rangle$.

567. $x\in\langle 0;\ \sqrt{2})$.

568. $x\in(-\sqrt{3};\ -1\rangle\cup\langle 0;\ 1)$.

569. $x\in(0;\ 1)\cup(4;\ 5\rangle$.

570. $D_f=\langle 0;\ \sqrt{3})$.

571. $D_f=(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 0\rangle\cup\langle 2;\ 3)\cup(3;\ \infty)$.

572. $D_f=\left\langle -1;\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\ 1\right\rangle$.

573. Z treści zadania wynika, że $y=\sqrt{(x^2-4)^2-3(x^2-4)-10}$. Wobec tego dziedziną rozważanej funkcji jest zbiór $D=\{x\in\mathbf{R}: (x^2-4)^2-3(x^2-4)-10\geqslant 0\}$.
Nierówność $(x^2-4)^2-3(x^2-4)-10\geqslant 0$ rozwiążemy podstawiając $x^2-4=t$. Po tym podstawieniu mamy $t^2-3t-10\geqslant 0$.
Stąd $t\leqslant -1$ lub $t\geqslant 5$. Zatem $D=\{x\in\mathbf{R}: x^2-4\leqslant -2 \text{ lub } x^2-4\geqslant 5\}=$
$=(-\infty;\ -3\rangle\cup\langle -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\rangle\cup\langle 3;\ \infty)$.

574. Jeśli $W(x)=x^2-x+1$, to:
$W[W(x)]\geqslant x^2-x+36\Leftrightarrow(x^2-x+1)^2-(x^2-x+1)+1\geqslant x^2-x+36\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^4-2x^2+x^2-36\geqslant 0\Leftrightarrow x^2(x^2-2x+1)-36\geqslant 0\Leftrightarrow x^2(x-1)^2-36\geqslant 0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow[x(x-1)]^2-6^2\geqslant 0\Leftrightarrow(x^2-x-6)(x^2-x+6)\geqslant 0$.
Stąd $x\in(-\infty;\ -2\rangle\cup\langle 3;\ \infty)$.

575. Jeśli $W(x)=x^2+x+1$, to:
$W[W(x)]>W(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)+1>x^2+x+1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^4+2x^3+3x^2+2x+2>0\Leftrightarrow(x^4+2x^3+2x^2)+(x^2+2x+2)>0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2(x^2+2x+2)+(x^2+2x+2)>0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x^2+2x+2)(x^2+1)>0\Leftrightarrow x\in\mathbf{R}$.

576. Z treści zadania wynika, że $1+1-7+a+b=0$ i $1-1-7-a+b=0$. Stąd $a=-1$ i $b=6$. Dzieląc wielomian $x^4+x^3-7x^2-x+6$ przez x^2-1 otrzymujemy trójmian x^2+x-6. Oznacza to, że danej nierówności równoważna jest nierówność $(x^2-1)(x^2+x-6)>0$. Stąd $x\in(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 1)\cup(2;\ \infty)$.

577. $a\in(-\infty;\ -1\rangle\cup\langle 1;\ 3\rangle$.

578. $a\in(-\infty;\ -\sqrt{3})\cup(-\sqrt{2};\ 1)\cup(\sqrt{2};\ \sqrt{3})$.

579. Wskazówka: $x^8+x^6-4x^4+x^2+1\geqslant 0\Leftrightarrow(x^4-1)^2+x^2(x^2-1)^2\geqslant 0$.

580. Jeśli $x<0$, to wszystkie składniki lewej strony nierówności są dodatnie, więc nierówność jest prawdziwa. Jeśli $0\leqslant x<1$, to $1-x>0$ i $x^6-x^{11}=x^6(1-x^5)\geqslant 0$ i $x^{16}\geqslant 0$, więc nierówność jest prawdziwa. Jeśli wreszcie $x\geqslant 1$, to
$x^{16}-x^{11}=x^{11}(x^5-1)\geqslant 0$ i $x^6-x=x(x^5-1)\geqslant 0$ i $1>0$, więc nierówność jest także prawdziwa.

581. Nierówność $(x^2+2)(x^2-k)+2k+1>0$ będzie spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $(x^2+2)(x^2-k)+2k+1$ nie będzie miał pierwiastków. Oznaczmy $x^2=t$. Należy wówczas zbadać, kiedy równanie kwadratowe $(t+2)(t-k)+2k+1=0$ z niewiadomą t nie ma rozwiązań lub ma rozwiązania ujemne. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy $k\in(-\infty;\ 4)$.

§ 6. Funkcje wymierne. Równania i nierówności wymierne

582. $a-b$, $a \neq b$ i $a \neq b$.

583. $\frac{9}{a-b}$, $a \neq -b$ i $a \neq b$, i $a \neq -\frac{1}{2}b$.

584. $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=a^2-2$.

585. $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=a(a^2-2-1)=a^3-3a$.

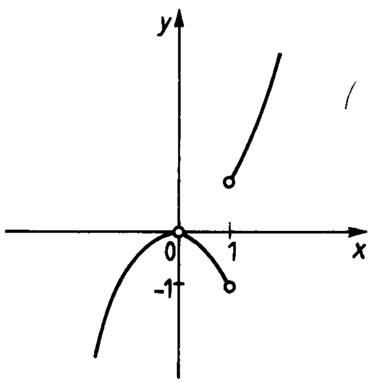
586. $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=(a^2-2)^2-2=a^4-4a^2+2$.

587. $A=1$ i $B=-1$, i $C=2$.

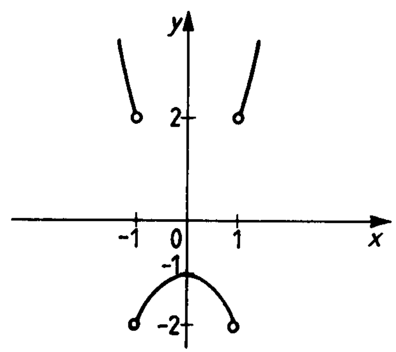
588. a) $f[f(x)]=\frac{x-1}{2-x}$. Dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}\setminus\{1, 2\}$.

b) $f\{f[f(x)]\}=\frac{2-x}{2x-3}$. Dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}\setminus\{1, \frac{3}{2}, 2\}$.

589. Jeżeli $x^3-x^2>0$, czyli $x \in (1; \infty)$, to $y=x^2$.
Jeżeli $x^3-x^2<0$, czyli $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, to $y=-x^2$ (rys. 33).



Rys. 33.



Rys. 34.

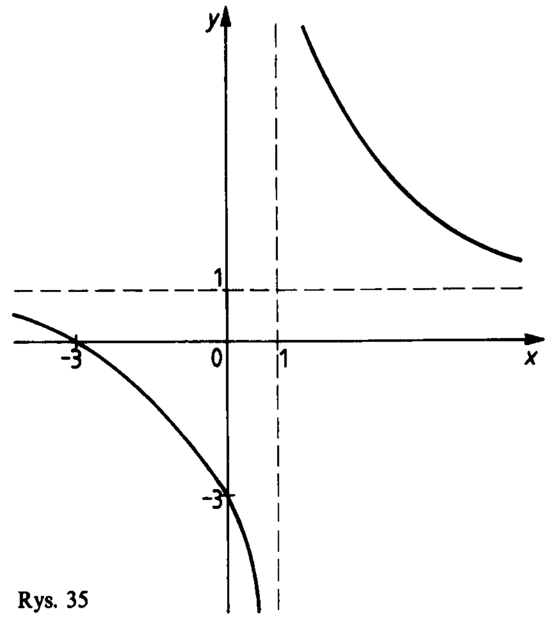
590. Jeżeli $x^2-1>0$, to $y=\frac{x^4-1}{x^2-1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1}=x^2+1$. Jeżeli $x^2-1<0$,

to $y=-\frac{x^4-1}{x^2-1}=-x^2-1$.

Wobec tego funkcja f jest określona następująco:

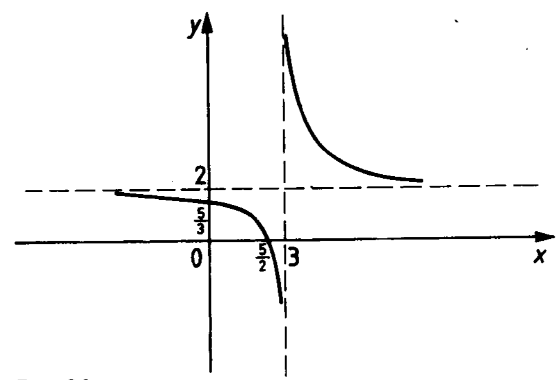
$$f: y=\begin{cases} x^2+1 & \text{dla } x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ \infty) \\ -x^2-1 & \text{dla } x \in (-1;\ 1) \end{cases} \quad \text{(rys. 34).}$$

591. Widać, że $y=\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{x-1}+1$ (rys. 35).



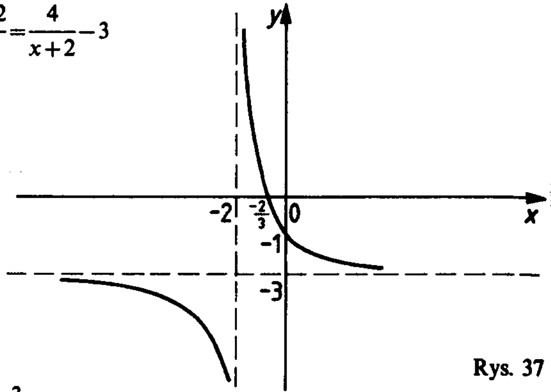
Rys. 35

592. Widać, że $y=\frac{2x-5}{x-5}=\frac{1}{x-3}+2$ (rys. 36).



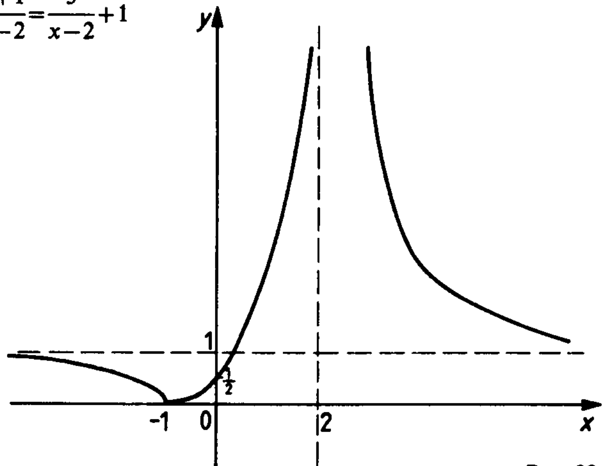
Rys. 36

593. Zauważmy, że $y=\dfrac{-3x-2}{x+2}=\dfrac{4}{x+2}-3$ (rys. 37).



Rys. 37

594. Zauważmy, że $y=\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+1$ (rys. 38).



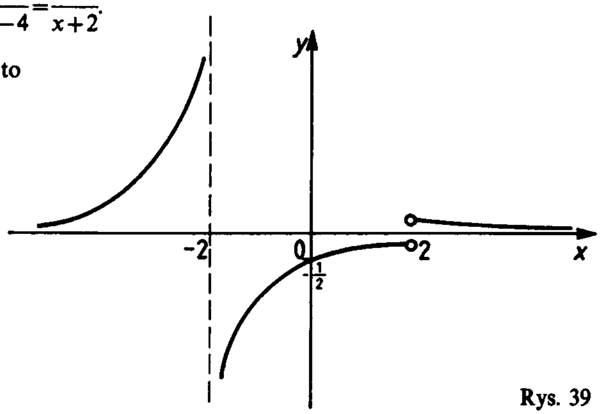
Rys. 38

595. Jeżeli $x>2$, to $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}$.

Jeżeli $x<2$ i $x\neq -2$, to

$y=\dfrac{2-x}{x^2-4}=\dfrac{-1}{x+2}$.

(rys. 39).



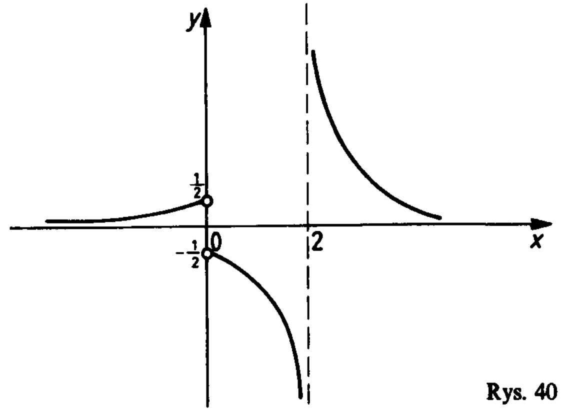
Rys. 39

596. Jeżeli $x^3-x^2+5x>0$ i $x\neq 2$, czyli $x>0$ i $x\neq 2$, to $y=\dfrac{1}{x-2}$. Jeżeli

$x^3-x^2+5x<0$,

czyli $x<0$, to $y=\dfrac{-1}{x-2}$

(rys. 40).



Rys. 40

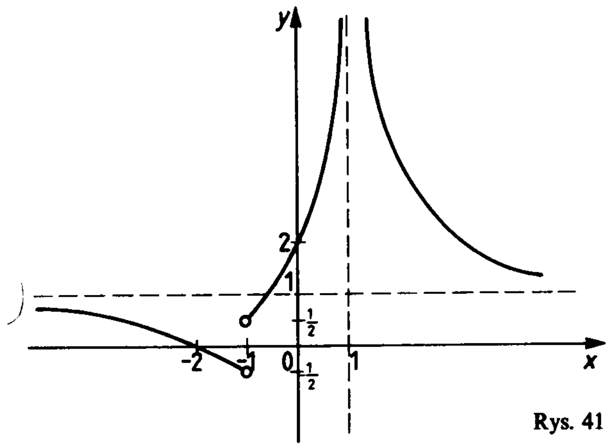
597. Łatwo sprawdzić, że $x^3-x^2-x+1=(x^2-1)(x-1)$.

Zatem funkcja f określona jest wzorem $y=\dfrac{|x^2-1|(x+2)}{(x^2-1)(x-1)}$.

Jeżeli $x^2-1>0$, to $y=\dfrac{x+2}{x-1}$, jeżeli $x^2-1<0$, to $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$.

Stąd funkcja f określona jest następująco:

$$f{:}\,y=\begin{cases}\dfrac{3}{x-1}+1 & \text{dla } x\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ \infty)\\[2mm] \dfrac{-3}{x-1}-1 & \text{dla } x\in(-1;\ 1)\end{cases}$$ (rys. 41).

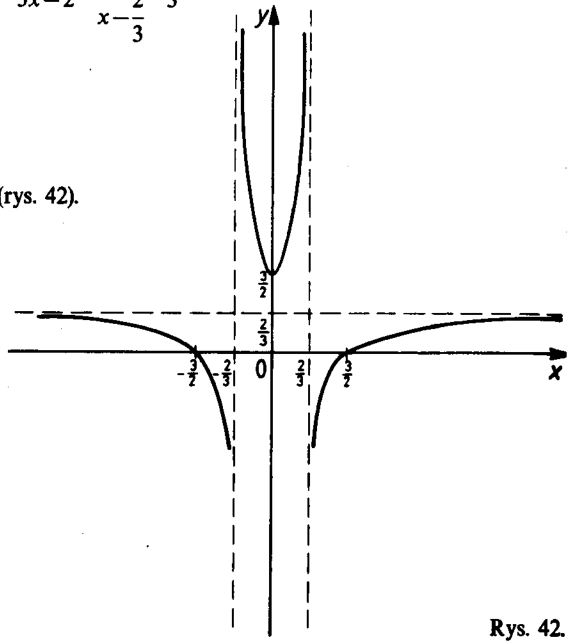


Rys. 41

598. Jeżeli $x \geqslant 0$ i $x \neq \frac{2}{3}$, to $y = \frac{2x-3}{3x-2} = \frac{\frac{-5}{9}}{x-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}$.

Jeżeli $x<0$ i $x \neq -\frac{2}{3}$,

to $y = \frac{2x+3}{3x+2} = \frac{\frac{5}{9}}{x+\frac{2}{5}} + \frac{2}{3}$ (rys. 42).

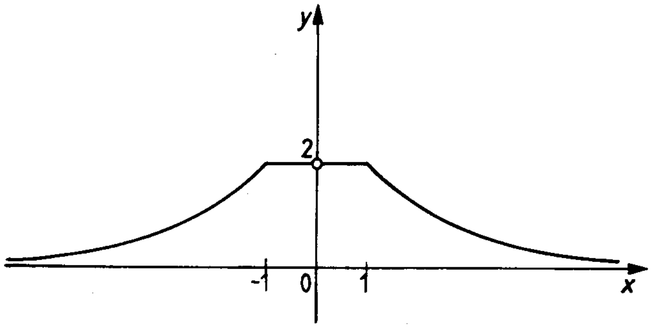


Rys. 42.

599. Jeżeli $x \in (-\infty; -1)$, to $y = \frac{-x-1-(-x+1)}{x} = \frac{-2}{x}$.

Jeżeli $x \in \langle -1; 0) \cup (0; 1)$, to $y = \frac{x+1-(-x+1)}{x} = 2$.

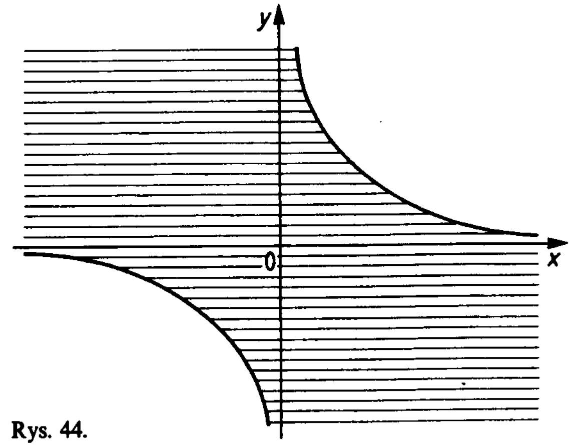
Jeżeli $x \in \langle 1; \infty)$, to $y = \frac{x+1-(x-1)}{x} = \frac{2}{x}$ (rys. 43).



Rys. 43

600. Dla $x=0$ nierówność $xy \leqslant 1$ przyjmuje postać $0 \cdot y \leqslant 1$ i spełnia ją każda para liczb rzeczywistych postaci $(0, y)$.

Jeżeli $x>0$, to $xy \leqslant 1 \Leftrightarrow y \leqslant \frac{1}{x}$. Jeżeli $x<0$, to $xy \leqslant 1 \Leftrightarrow y \geqslant \frac{1}{x}$ (rys. 44).

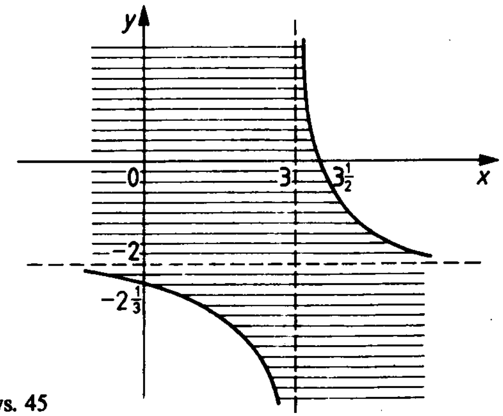


Rys. 44.

601. Dla $x=3$ podana nierówność przyjmuje postać $0 \cdot (y+2) \leqslant 1$ i spełnia ją każda para liczb rzeczywistych postaci $(3, y)$.

Jeżeli $x>3$, to $(x-3)(y+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow y \leqslant \frac{1}{x-3} - 2$.

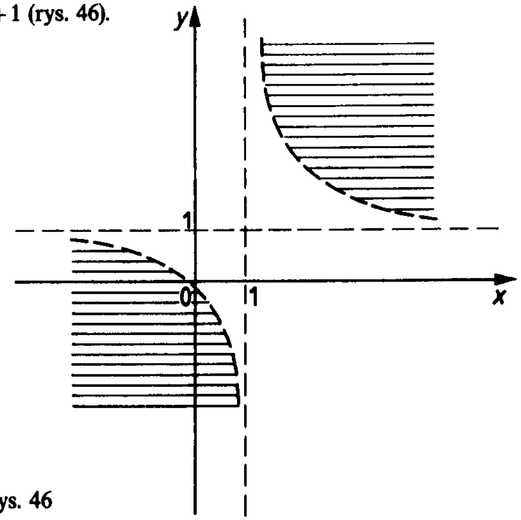
Jeżeli $x<3$, to $(x-3)(y+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow y \geqslant \frac{1}{x-3} - 2$. (rys. 45).



Rys. 45

602. $x+y<xy \Leftrightarrow xy-y>x \Leftrightarrow y(x-1)>x$.
Dla $x=1$ nierówność $y(x-1)>x$ przyjmuje postać $y\cdot 0>0$ i jest nierównością sprzeczną. Jeżeli $x>1$, to $y(x-1)>x \Leftrightarrow y>\frac{1}{x-1}+1$. Jeżeli $x<1$, to $y(x-1)>x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y<\frac{1}{x-1}+1$ (rys. 46).

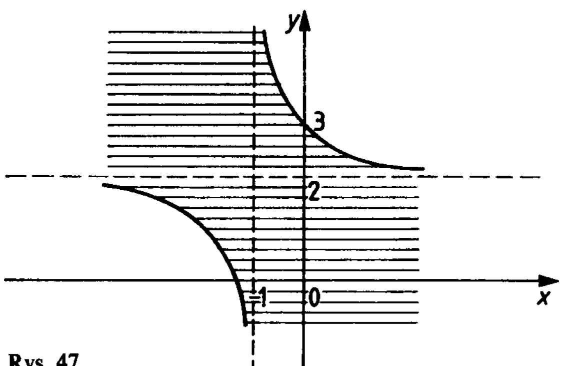


Rys. 46

603. $xy-2x+y\leqslant 3 \Leftrightarrow xy+y\leqslant 2x+3 \Leftrightarrow y(x+1)\leqslant 2x+3$.
Dla $x=-1$ nierówność $y(x+1)\leqslant 2x+3$ przyjmuje postać $y\cdot 0\leqslant 3$ i spełnia ją każda para liczb rzeczywistych postaci $(-1;\ y)$.

Jeśli $x>-1$, to $y(x+1)\leqslant 2x+3 \Leftrightarrow y\leqslant\frac{1}{x+1}+2$.

Jeśli $x<-1$, to $y(x+1)\leqslant 2x+3 \Leftrightarrow y\geqslant\frac{1}{x+1}+2$ (rys. 47).



Rys. 47

604. Równanie sprzeczne.

605. Równanie sprzeczne.

606. $x=2$.

607. $x=-1$.

608. Dziedziną równania jest zbiór $\mathbf{R}\setminus\{-2\}$. Przyjmując $\frac{x^2-3x+4}{x+2}=t$ otrzymujemy równanie postaci $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$ którego rozwiązaniami są liczby $t_1=2$ i $t_2=\frac{1}{2}$. Wobec tego $\frac{x^2-3x+4}{x+2}=2$ lub $\frac{x^2-3x+4}{x+2}=\frac{1}{2}$. Stąd $x=0$ lub $x=5$, lub $x=\frac{3}{2}$, lub $x=2$.

609. Dziedziną równania jest zbiór $\mathbf{R}$. Przyjmując $x^2-3x+3=t$ otrzymujemy równanie postaci $\frac{1}{t}+\frac{2}{t+1}=\frac{6}{t+2}$, którego rozwiązaniami są liczby $t_1=-\frac{2}{3}$ i $t_2=1$. Wobec tego $x^2-3x+3=-\frac{2}{3}$ lub $x^2-3x+3=1$, skąd $x=1$ lub $x=2$.

610. Podana funkcja osiąga wartość najmniejszą równą 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $m-1>0$ i $\frac{-(m-2)^2+4(m-1)}{4(m-1)}=1$. Stąd $m=2$.

611. $x\in\left(-2;\ \frac{3}{2}\right)$.

612. $x\in(-\infty;\ 0)\cup(1;\ \infty)$.

613. $x\in(-4;\ -3\rangle\cup\langle 2;\ \infty)$.

614. $x\in\langle -2;\ -1)$.

615. $x\in(-\infty;\ -3)\cup\langle 0;\ 3)$.

616. $x\in(-\infty;\ -2)\cup\langle 1;\ 2\rangle\cup(3;\ \infty)$.

617. $x\in(-2;\ 2)$.

618. $x\in(-1;\ 4)$.

619. $x\in(-8;\ 1\rangle$.

620. $x\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{1}{2};\ 1\right)\cup(1;\ 2)$.

621. $x\in(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 2\rangle$.

622. $x\in(-\infty;\ -1)\cup\left(-1;\ \frac{1}{4}\right\rangle$.

623. $x\in\langle -1;\ 2)\cup(2;\ \infty)$.

624. $x\in\left(\frac{1}{2};\ \frac{4}{5}\right)\cup(2;\ \infty)$.

625. $x\in(-\infty;\ 3)$.

626. $x\in(-\infty;\ -1)\cup\left\langle -\frac{1}{3};\ 1\right)\cup(1;\ \infty)$.

627. $D_f=(-\infty;\ 0)\cup\langle 2;\ 3\rangle$.

628. $D_f=(-\infty;\ -1)\cup\langle 4;\ \infty)$.

629. $D_f=(-5;\ 2)$.

630. Podstawiając $x^4=t$ i obliczając miejsca zerowe trójmianu t^2+t-20 stwierdzamy, że $x^8+x^4-20=(x^4+5)(x^4-4)=(x^4+5)(x^2+2)(x^2-2)$.
Ponieważ $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}}(x^4+5>0 \text{ i } x^2+2>0)$, więc:
$x^8+x^4-20\neq 0 \Leftrightarrow x^2-2\neq 0 \Leftrightarrow (x\neq\sqrt{2} \text{ i } x\neq-\sqrt{2})$.
Oznacza to, że dziedziną podanej funkcji jest zbiór $\mathbf{R}-\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$.

Przekształcamy wzór określający funkcję f:

$$f(x)=\frac{x^6-7x^2-6}{x^8+x^4-20}=-\frac{x^6-x^2-6x^2-6}{(x^4+5)(x^2-2)(x^2+2)}=\frac{x^2(x^4-1)-6(x^2+1)}{(x^4+5)(x^2-2)(x^2+2)}=$$

$$=\frac{x^2(x^2-1)(x^2+1)-6(x^2+1)}{(x^4+5)(x^2-2)(x^2+2)}=\frac{(x^2+1)(x^4-x^2-6)}{(x^4+5)(x^2-2)(x^2+2)}.$$

Rozkładając wielomian x^4-x^2-6 na czynniki otrzymujemy $x^4-x^2-6=(x^2+2)(x^2-3)$.

Wobec tego $f(x)=\dfrac{(x^2+1)(x^2+2)(x^2-3)}{(x^4+5)(x^2-2)(x^2+2)}=\dfrac{(x^2+1)(x^2-3)}{(x^4+5)(x^2-2)}$.

Stąd i z faktu, że $\bigwedge\limits_{x\in \mathbf{R}}(x^2+1>0 \text{ i } x^4+5>0)$ wynika, że

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{x^2-2}>0 \Leftrightarrow (x^2-3)(x^2-2)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;\ -\sqrt{3})\cup(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})\cup(3;\ \infty)$$

Łatwo zauważyć, że zbiór liczb całkowitych zawiera się w zbiorze $(-\infty;\ -\sqrt{3})\cup(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})\cup(\sqrt{3};\ \infty)$. Zatem $\bigwedge\limits_{x\in \mathbf{C}} f(x)>0$.

631. Ponieważ wyróżnik trójmianu kwadratowego x^2+x+1 jest ujemny, więc podana nierówność jest równoważna układowi nierówności $\frac{1}{3}(x^2+x+1)\leqslant x^2-x+1$ i $x^2-x+1\leqslant 3x^2+3x+3$, czyli układowi nierówności $(x-1)^2\geqslant 0$ i $(x+1)^2\geqslant 0$, który jest spełniony przez każdą liczbę rzeczywistą.

632. Ponieważ wyróżnik trójmianu kwadratowego x^2+2x+3 jest ujemny, więc podana nierówność jest równoważna układowi nierówności
$6x^2+(a+10)x+24\geqslant 0$ i $3x^2+(8-a)x+3\geqslant 0$.
Powyższy układ będzie spełniony przez każdą liczbę rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżniki trójmianów stanowiących lewe strony nierówności będą niedodatnie, to znaczy gdy $(a+10)^2-24^2\leqslant 0$ i $(8-a)^2-36\leqslant 0$. Po rozwiązaniu powyższego układu nierówności otrzymujemy: $a\in\langle 2;\ 14\rangle$.

633. $x\in(-1;\ 0)\cup(1;\ \infty)$. Wskazówka: Rozwiązać układ nierówności: $x<x^3$ i $x>\frac{1}{x}$.

634. $A=(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ -\frac{1}{6}\rangle$. Kres górny zbioru A jest równy $-\frac{1}{6}$, kres dolny zbioru A nie istnieje.

635. Wskazówka: $A=\langle -1;\ 2\rangle\cup\langle 3;\ \infty)$, $B=\left(\frac{5}{4};\ \infty\right)$.

636. Przy założeniu $m\neq 1$ proste o podanych równaniach przecinają się w punkcie $P=\left(\frac{m+4}{m-1},\ \frac{m^2+4}{m-1}\right)$. Punkt P będzie należał do prostej o równaniu $y=2x-2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2\cdot\frac{m+4}{m-1}-2=\frac{m^2+4}{m-1}$. Stąd $m=-\sqrt{6}$ lub $m=\sqrt{6}$.

637. Rozwiązując podany układ równań przy założeniu, że $m\in \mathbf{R}-\{-2\}$ stwierdzamy, że jego rozwiązaniem jest para liczb $x=\frac{m^2+4}{m+2}$ i $y=\frac{-m^2+2m-8}{m+2}$. Dalsza część pracy sprowadza się do rozwiązania nierówności $\frac{m^2+4}{m+2}\geqslant\frac{-m^2+2m-8}{m+2}+6$. Stąd otrzymujemy: $m\in(-2;\ 0)\cup\langle 4;\ \infty)$.

638. $k\in(-\infty;\ -\frac{4}{3})\cup\langle 2;\ \infty)$.

639. $m\in\left(-\infty;\ -\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};\ \infty\right)$.

640. $m\in(1;\ 4\rangle$.

641. Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $k\neq -2$ i $16-4(k+2)(-k+2)>0$ i $\frac{4}{k+2}\geqslant 2$. Stąd otrzymujemy: $k\in(-2;\ 0)$.

642. $k\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right)$.

643. $m\in\left(-\infty;\ \frac{-10}{3}\right\rangle\cup\langle 1;\ 2\rangle\cup(5;\ \infty)$.

644. $m\in(-\infty;\ -2)\cup\left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$.

645. $k\in(2-\sqrt{5};\ 1)$.

646. $m\in\langle\sqrt{3};\ 2)$.

647. Oznaczmy $x^2=t$. Wtedy otrzymujemy równanie: $(a-t)t^2-2(a+3)t+a-1=0$. Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy równanie kwadratowe z niewiadomą t będzie mieć dwa różne dodatnie rozwiązania. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy: $a\neq 2$ i $4(a+3)^2-4(a-2)(a-1)>0$ i $\frac{2(a+3)}{a-1}>0$ i $\frac{a-1}{a-2}>0$.
Stąd $a\in(2;\ \infty)$.

648. Z treści zadania wynika, że szukany ułamek musi mieć postać $\frac{x}{x^2-1}$ i spełniać układ nierówności $\frac{x+2}{x^2+1}>\frac{1}{4}$ i $\frac{x-3}{x^2-4}<\frac{1}{10}$.
Rozwiązując powyższy układ stwierdzamy, że spełniają go wyłącznie liczby z przedziału $(2;\ 2+\sqrt{11})$. Uwzględniając fakt, że $x\in \mathbf{N}$ i szukany ułamek jest nieskracalny stwierdzamy łatwo, że warunki zadania spełniają trzy ułamki: $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{15}$ i $\frac{5}{24}$.

649. Oznaczmy: x — liczba litrów jaką należy wziąć z pierwszego zbiornika, y — liczba litrów jaką należy wziąć z drugiego zbiornika. Zakładamy, że $x,y\in(0;\ 12)$. Z treści zadania otrzymujemy układ równań: $x+y=12$ i $\dfrac{\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y}{\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y}=\frac{3}{5}$. Stąd $x=9$ i $y=3$.

650. Oznaczmy: x — liczba kilogramów jaką należy wziąć z pierwszego stopu, y — liczba kilogramów jaką należy wziąć z drugiego stopu. Z treści zadania otrzymujemy układ równań: $x+y=10$ i $\dfrac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y}{\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y}=p$. Stąd $x=\dfrac{60-90p}{1+p}$ i

$y=\dfrac{100p-50}{1+p}>0$. Zadanie ma rozwiązanie jeśli $\dfrac{60-90p}{1+p}>0$ i $\dfrac{100p-50}{1+p}>0$.

Stąd $p\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$.

651. Niech liczby dodatnie x i y oznaczają odpowiednio masę stopu pierwszego i masę drugiego, na przykład w kilogramach, jaką należy wziąć, by otrzymać stop trzeci o żądanej w zadaniu własności. Przy tych oznaczeniach mamy obliczyć $\dfrac{x}{y}$.

Z treści zadania wynika, że w stopie pierwszym jest $\frac{1}{3}x$ kilogramów miedzi i $\frac{2}{3}x$ kilogramów cynku, a w stopie drugim jest $\frac{2}{5}y$ kilogramów miedzi i $\frac{3}{5}y$ kilogramów cynku. Warunki zadania będą więc spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$\dfrac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y}{\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y}=\dfrac{17}{27}$, czyli gdy $\dfrac{5x+6y}{10x+9y}=\dfrac{17}{27}$.

Stąd $9y=35x$, czyli $\dfrac{x}{y}=\dfrac{9}{35}$.

652. Oznaczmy: x — liczba dni potrzebnych na wykonanie pracy przez pierwszego robotnika, y — liczba dni potrzebnych na wykonanie pracy przez drugiego robotnika. Zakładamy, że $x\in N$ i $x>50$ i $y\in N$ i $y>20$. Z treści zadania otrzymujemy układ równań: $x-y=30$ i $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{20}$. Stąd $x=60$ i $y=30$.

653. Oznaczmy: x — liczba godzin których potrzebuje pierwszy automat aby wykonać całą pracę, y — liczba godzin których potrzebuje drugi automat aby wykonać całą pracę. Zakładamy, że $x>3$ i $y>3$. Z treści zadania otrzymujemy układ równań: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ i $\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{3}{4}$. Stąd $x=4$ i $y=12$.

654. Oznaczmy: x — szukana liczba dni, y — liczba dni potrzebnych do wykonania pracy samodzielnie przez koparkę B. Zakładamy, że $y\in N$ i $y>11$ i $x>0$. Wtedy $y-5$ oznacza liczbę dni potrzebnych do wykonania pracy przez koparkę A. Z treści zadania otrzymujemy układ równań: $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y-5}=1$ i $2\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y-5}\right)+x\cdot\dfrac{1}{y}=1$.

Stąd $x=10$ i $y=15$.

655. Oznaczmy: x — liczba godzin potrzebnych do napełnienia zbiornika przez pierwszy kran, y — liczba godzin potrzebnych do napełnienia zbiornika przez drugi kran. Zakładamy, że $x>2$ i $y>4{,}5$. Z treści zadania otrzymujemy układ równań:

$\dfrac{xy}{x+y}=x-2$ i $\dfrac{xy}{x+y}=y-4{,}5$. Stąd $x=5$ i $y=7{,}5$.

656. Oznaczmy przez x prędkość drugiego rowerzysty w km/h. Wtedy prędkość pierwszego rowerzysty wynosi $x+2$. Zakładając, że $x>0$ otrzymujemy równanie: $\dfrac{36}{x}-\dfrac{36}{x+2}=\dfrac{1}{4}$. Stąd $x=16$. Prędkośc ... zystów wynoszą więc 16 km/h i 18 km/h.

657. Oznaczmy przez x planowaną prędkość pociągu w km/h. Zakładamy, że $x>0$. Z treści zadania otrzymujemy równanie: $\dfrac{80}{x}=\dfrac{80}{x+10}+\dfrac{4}{15}$. Stąd $x=50$.

658. Oznaczmy: x — obwód koła tylnego w metrach, y — obwód koła przedniego w metrach. Zakładamy, że $x>y>0$. Z treści zadania otrzymujemy układ równań:

$\dfrac{36}{x}+6=\dfrac{36}{y}$ i $\dfrac{36}{x+1}+3=\dfrac{36}{y+1}$. Stąd $x=3$ i $y=2$.

Średnice kół wynoszą $\dfrac{3}{\pi}$ i $\dfrac{2}{\pi}$.

659. Oznaczmy: x — prędkość pierwszego punktu w cm/s., y — prędkość drugiego punktu w cm/s. Zakładamy, że $x>0$ i $y>0$. Z treści zadania otrzymujemy układ równań: $\dfrac{54}{x-y}=9$ i $\dfrac{54}{x}-\dfrac{54}{y}=12$. Stąd $x=9$ i $y=3$.

660. Oznaczmy odległość od A do B mierzoną w kilometrach przez a. Ponieważ drogę od A do B przebył samochód z prędkością v_1, więc na pokonanie tej drogi potrzebował

$\dfrac{a}{v_1}$ godzin. Rozumując analogicznie stwierdzamy, że drogę z B do A przebył samochód w czasie $\dfrac{a}{v_2}$ godzin. Wobec tego średnia prędkość v_s samochodu w obie strony jest równa: $v_s=\dfrac{a+a}{\frac{a}{v_1}+\frac{a}{v_2}}=\dfrac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$.

Wstawiając $v_1=40$ km/h i $v_2=30$ km/h otrzymujemy $v_s=34\frac{2}{7}$ km/h.

§ 7. Indukcja matematyczna

661. Oznaczmy lewą stronę dowodzonej równości przez L, prawą przez P.
1). Jeżeli $n=1$, to $L=1$ i $P=1^2$, więc $L=P$. Oznacza to, że dla $n=1$ podane twierdzenie jest prawdziwe.
2). Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej ustalonej liczby naturalnej n, to znaczy zakładamy, że dla liczby n prawdziwa jest równość
$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.
Dowodzimy, że wówczas twierdzenie jest prawdziwe dla liczby $n+1$, to znaczy dowodzimy, że prawdziwa jest równość:
$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$.
Korzystając z założeń mamy:
$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$.
Z 1), 2) i zasady indukcji matematycznej wynika, że podane twierdzenie jest prawdziwe.

662. Oznaczmy: L — lewa strona dowodzonej równości, P — prawa strona dowodzonej równości. Jeżeli $n=1$, to $L=1$ i $P=1$, zatem $L=P$.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$
Wykażemy, że: $1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Zauważmy, że:
$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

666. Oznaczmy przez L lewą stronę dowodzonej równości, przez P stronę prawą.
Jeżeli $n=2$, to $L=1-2=-1$, $P=-1$, zatem $L=P$.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:
$1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n=-n$.
Wykażemy, że $1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n+(2n+1)-(2n+2)=-(n+1)$.
Zauważmy, że:
$$1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n+(2n+1)-(2n+2)=-n+(2n+1)-(2n+2)=$$
$$=-n-1=-(n+1).$$
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

675. Jeżeli $n=1$, to łatwo sprawdzamy, że twierdzenie jest prawdziwe.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:
$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot n^2=(-1)^{n+1}\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

Wykażemy, że: $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot n^2+(-1)^{n+2}\cdot(n+1)=$
$=(-1)^{n+2}\cdot\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Zauważmy, że:
$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot n^2+(-1)^{n+2}\cdot(n+1)^2=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+$$
$$+(-1)^{n+2}\cdot(n+1)^2=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{2}[n+(-1)2(n+1)]=(-1)^{n+2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

676. Jeżeli $n=1$, to lewa strona podanej równości jest równa $1+5^1=6$, a prawa $\dfrac{25-1}{4}=6$, zatem w tym przypadku twierdzenie jest prawdziwe.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:
$$1+5^1+5^2+\ldots+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}.$$
Wykażemy, że: $1+5^1+5^2+\ldots+5^n+5^{n+1}=\dfrac{5^{n+2}-1}{4}$.
Zauważmy, że:
$$1+5^1+5^2+\ldots+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+1}-1}{4}+5^{n+1}=\frac{5^{n+1}-1+4\cdot5^{n+1}}{4}=\frac{5^{n+1}\cdot(1+4)-1}{4}=$$
$$=\frac{5^{n+2}-1}{4}.$$
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

677. Jeżeli $n=1$, to lewa strona podanej równości jest równa $1^3=1$, a prawa $\left(\dfrac{1\cdot2}{2}\right)^2=1$, zatem w tym przypadku twierdzenie jest prawdziwe.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:
$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$
Wykażemy, że: $1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$.
Zauważmy, że:
$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=$$
$$=\frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

684. Łatwo sprawdzić, że dla $n=1$ twierdzenie jest prawdziwe.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:
$1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+...+\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$.
Wykażemy, że: $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+...+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}=4-\frac{n+3}{2^n}$.
Zauważmy, że:
$$1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+...+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}=4-\left(\frac{n+2}{2^{n-1}}-\frac{n+1}{2^n}\right)=$$
$$=4-\frac{2n+4-n-1}{2^n}=4-\frac{n+3}{2^n}.$$
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

685. Jeżeli $n=1$, to lewa strona podanej równości jest równa $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, a prawa $\frac{1+2}{2(1+1)}=\frac{3}{4}$, zatem twierdzenie jest w tym przypadku prawdziwe.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}.$$
Wykażemy, że: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\frac{n+3}{2(n+2)}$.
Zauważmy, że: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=$
$$=\frac{n+2}{2(n+1)}\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}\cdot\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}=$$
$$=\frac{n+2}{2(n+1)}\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}=\frac{n+3}{2(n+2)}.$$
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

686. Łatwo sprawdzić, że dla $n=1$ podana równość jest prawdziwa.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:
$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$.
Wykażemy, że: $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+...+ab^{n-1}+b^n)$.
Zauważmy, że: $a^{n+1}-b^{n+1}=a^na-b^nb=a(a^n-b^n)+ab^n-b^nb=$
$=a(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})+b^n(a-b)=$
$=(a-b)[a(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})+b^n]=$
$=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+...+ab^{n-1}+b^n)$.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

687. Załóżmy, że m jest dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Jeżeli $n=1$, to lewa strona podanej równości jest równa $\frac{m+1}{2}$ a prawa $\frac{(m-1)(2-1)}{2}+1=\frac{m+1}{2}$, zatem w tym przypadku twierdzenie jest prawdziwe.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:
$$\frac{m+1}{2}+\frac{m+3}{4}+...+\frac{m+2^n-1}{2^n}=\frac{(m-1)(2^n-1)}{2^n}+n.$$
Wykażemy, że:
$$\frac{m+1}{2}+\frac{m+3}{4}+...+\frac{m+2^n-1}{2^n}+\frac{m+2^{n+1}-1}{2^{n+1}}=\frac{(m-1)(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}}+(n+1).$$
Zauważmy, że: $\frac{m+1}{2}+\frac{m+3}{4}+...+\frac{m+2^n-1}{2^n}+\frac{m+2^{n+1}-1}{2^{n+1}}=$
$$=\frac{(m-1)(2^n-1)}{2^n}+n+\frac{m+2^{n+1}-1}{2^{n+1}}=\frac{(m-1)(2^{n+1}-2)+m-1+2^{n+1}}{2^{n+1}}+n=$$
$$=\frac{(m-1)(2^{n+1}-2+1)+2^{n+1}}{2^{n+1}}+n=\frac{(m-1)(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}}+n+1.$$
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

688. Łatwo sprawdzić, że dla $n=1$ podana równość jest prawdziwa.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}.$$
Wykażemy, że:
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}.$$
Zauważmy, że:
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=$$
$$=\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}.$$
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

689. Dla $n=1$ lewa strona podanej równości jest równa x, a prawa $\frac{x-2x^2+x^3}{(1-x)^2}=\frac{x(1-x)^2}{(1-x)^2}=x$, zatem równość jest prawdziwa.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:
$$x+2x^2+...+nx^n=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$
Wykażemy, że:
$$x+2x^2+...+nx^n+(n+1)x^{n+1}=\frac{x-(n+2)x^{n+2}+(n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}.$$

Zauważmy, że:

$$x+2x^2+...+nx^n+(n+1)x^{n+1}=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}+(n+1)x^{n+1}=$$

$$=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}+(1-2x+x^2)(n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}+(n+1)x^{n+1}-2(n+1)x^{n+2}+(n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{x-[2(n+1)-n]x^{n+2}+(n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}=\frac{x-(n+2)x^{n+2}+(n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}.$$

Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podana równość jest prawdziwa.

690. Jeżeli $n=1$, to lewa strona podanej równości jest równa

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+1)},\ \text{a prawa}\ \frac{1}{x-1}+\frac{4}{1-x^4}=\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x^4-1}=$$

$$=\frac{(x+1)(x^2+1)-4}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{x^3+x^2+x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Zatem w tym przypadku twierdzenie jest prawdziwe.

Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+...+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

Wykażemy, że:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+....+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}+\frac{2^{n+2}}{1-x^{2^{n+1}}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+2}}{1-x^{2^{n+2}}}.$$

Zauważmy, że:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+...+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}+\frac{2^{n+1}}{1+{}^{2^{n+1}}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}+\frac{2^{n+1}}{1+x^{2^{n+1}}}=$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}\left(1+x^{2^{n+1}}\right)+2^{n+1}\left(1-x^{2^{n+1}}\right)}{\left(1-x^{2^{n+1}}\right)+\left(1+x^{2^{n+1}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}\cdot 2}{1-x^{2^{n+0.21}}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+2}}{1-x^{2^{n+2}}}.$$

Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

691. Jeżeli $n=2$, to $10^n-4=10^2-4=96$ i jak widać $12|96$. Załóżmy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ istnieje liczba całkowita k taka, że $10^n-4=12k$.

Wykażemy, że istnieje liczba całkowita l taka, że $10^{n+1}-4=12\cdot l$.

Zauważmy, że:

$10^{n+1}-4=10^n\cdot 10-4=10^n\cdot 10-40+36=10(10^n-4)+36=10\cdot 12k+36=$
$=12(10k+3)$.

Przyjmijmy, że $10k+3=l$. Ponieważ $k\in C$, więc $l\in C$. Istnieje zatem liczba całkowita l (jest nią $10k+3$) taka, że $10^{n+1}-4=12\cdot l$.

Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

692. Wskazówka: $7^{n+1}-1=7^n\cdot 7-1=7(7^n-1)+6$.

693. Wskazówka: $5^{n+1}-1=5^n\cdot 5-1=5(5^n-1)+4$.

694. Wskazówka: $3^{4n+2}+1=3^{4n-2}\cdot 3^4+1=3^{4n-2}\cdot 81+1=81(3^{4n-2}+1)-80$.

695. Wskazówka: $5^{2n+1}+3=5^{2n-1}\cdot 5^2+3=5^{2n-1}\cdot 25+3=25(5^{2n-1}+3)-72$.

696. Wskazówka: Ponieważ m jest liczbą naturalną parzystą, więc $m=2n$, gdzie $n\in N$. Należy więc pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $13^{2n}+6$ jest podzielna przez 7.

697. Wskazówka: $2^{n+3}+3^{2n+3}=2^{n+2}\cdot 2+3^{2n+1}\cdot 9=$
$=2(2^{n+2}+3^{2n+1})-7\cdot 3^{2n+1}$.

698. Wskazówka: $3^{4n+2}+5^{2n+1}=3^{4n-2}\cdot 3^4+5^{2n-1}\cdot 5^2=$
$=3^{4n-2}\cdot 81+5^{2n-1}\cdot 25=81(3^{4n-2}+5^{2n-1})-56\cdot 5^{2n-1}$.

699. Wskazówka: $2^{6n+7}+9^{n+2}=2^{6n+1}\cdot 2^6+9^{n+1}\cdot 9=$
$=2^{6n+1}\cdot 64+9^{n+1}\cdot 9=64(2^{6n+1}+9^{n+1})-55\cdot 9^{n+1}$.

700. Wskazówka: $11^{n+3}+12^{2n+3}=11^{n+2}\cdot 11+12^{2n+1}\cdot 12^2=$
$=11^{n+2}\cdot 11+12^{2n+1}\cdot 144=11(11^{n+2}+12^{2n+1})+133\cdot 12^{2n+1}$.

701. Wskazówka: $6^{2n}+3^{n+2}+3^n=6^{2n-2}\cdot 6^2+3^{n+1}\cdot 3+3^{n-1}\cdot 3=$
$=36\cdot 6^{2n-2}+3\cdot 3^{n+1}+3\cdot 3^{n-1}=36(6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1})-33\cdot 3^{n+1}-33\cdot 3^{n-1}$.

702. Wskazówka: $6^{2n+2}+10\cdot 3^{n+1}=6^{2n}\cdot 6^2+10\cdot 3^n\cdot 3=$
$=36\cdot 6^{2n}+30\cdot 3^n=36(6^{2n}+10\cdot 3^n)-330\cdot 3^n$.

703. Wskazówka: $3^{2n+2}+5\cdot 2^{3n+1}=2^{3n-1}\cdot 3^3+5\cdot 2^{3n-2}\cdot 2^3=27\cdot 3^{3n-1}+40\cdot 2^{3n-2}=$
$=27(3^{3n-1}+5\cdot 2^{3n-2})-95\cdot 2^{3n-2}$.

704. Jeżeli $n=1$, to $10^{3n+1}-3(-1)^n=10^4+3=10\,003$.

Łatwo sprawdzić, że $7|10\,003$.

Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n istnieje liczba całkowita k taka, że $10^{3n+1}-3(-1)^n=7k$.

Wykażemy, że istnieje liczba całkowita l taka, iż $10^{3n+4}-3(-1)^{n+1}=7\cdot l$.

Zauważmy, że: $10^{3n+4}-3(-1)^{n+1}=10^{3n+1}\cdot 10^3-3(-1)^n(-1)=$
$=10^{3n+1}\cdot 1000+3(-1)^n=1000[10^{3n+1}-3(-1)^n]+3\,003(-1)^n=$
$=1000\cdot 7k+3003(-1)^n=7[1000k+429(-1)^n]$.

Przyjmijmy, że $1000k+429(-1)^n=l$. Ponieważ $n\in \boldsymbol{N}$ i $k\in \boldsymbol{C}$, więc $l\in \boldsymbol{C}$.

Istnieje zatem liczba całkowita l (jest nią $1000k+429(-1)^n$) taka, że $10^{3n+4}-3(-1)^{n+1}=7\cdot l$.

Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

705. Wskazówka: $10^{2n+2}-(-1)^{n+1}=10^{2n}\cdot 10^2-(-1)^n\cdot(-1)=10^{2n}\cdot 100+(-1)^n=$
$=100[10^{2n}-(-1)^n]+101(-1)^n$.

706. Wskazówka: $10^{3n+4}-10(-1)^{n+1}=10^{3n+1}\cdot 10^3-10(-1)^n\cdot(-1)=$
$=10^{3n+1}\cdot 1000+10(-1)^n=1000[10^{3n+1}-10(-1)^n]+10\,010(-1)^n$.

707. Wskazówka: $10^{n+1}+4^{n+1}-2=10^n 10+4^n\cdot 4-2=$
$=10(10^n+4^n-2)-6\cdot 4^n+18.$

708. Wskazówka: $4^{n+1}+15(n+1)-1=4^n\cdot 4+15n+14=4(4^n+15n-1)-45n+18.$

709. Wskazówka: $3^{2n+3}+40(n+1)-67=3^{2n+1}\cdot 9+40n-27=$
$=9(3^{2n+1}+40n-67)-320n+576.$

710. Wskazówka: $2^{n+3}\cdot 3^{n+1}+5n+1=2^{n+2}\cdot 2\cdot 3^n\cdot 3+5n+1=$
$=6(2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4)-25n+25.$

711. Wskazówka: $5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}=$
$=5^{2n-1}\cdot 5^2\cdot 2^{n+1}\cdot 2+3^{n+1}\cdot 3\cdot 2^{2n-1}\cdot 2^2=50\cdot 5^{2n-1}\cdot 2^{n+1}+12\cdot 3^{n+1}\cdot 2^{2n-1}=$
$=50(5^{2n-1}\cdot 2^{n+1}+3^{n+1}\cdot 2^{2n-1})-38\cdot 3^{n+1}\cdot 2^{2n-1}.$

712. Jeżeli $n=1$, to $n^3+5n=1^3+5\cdot 1=6$ i jak widać $6|6$.
Niech dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n istnieje liczba całkowita k taka, że $n^3+5n=6k$.
Wykażemy, że istnieje liczba całkowita l taka, że $(n+1)^3+5(n+1)=6l$.
Zauważmy, że: $(n+1)^3+5(n+1)=n^3+5n+3n^2+3n+6=6k+6+3n(n+1)$. Liczba $3n(n+1)$ jest podzielna przez 6, zatem istnieje liczba całkowita p taka, że $3n(n+1)=6p$.
Wobec tego: $(n+1)^3+5(n+1)=6k+6+6p=6(k+1+p)$. Ponieważ $k, p\in C$, więc $k+1+p\in C$. *Przyjmijmy, że* $k+1+p=l$. Istnieje więc liczba całkowita l (jest nią $k+1+p$) taka, że $(n+1)^3+5(n+1)=6l$.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

713. Ponieważ m jest liczbą naturalną parzystą, więc $m=2n$, gdzie $n\in N$. Wystarczy więc pokazać, że dla każdej naturalnej liczby n liczba $8n^3+40n$, czyli $8(n^3+5n)$ jest podzielna przez 48. Wystarczy udowodnić, że dla każdej naturalnej liczby n liczba n^3+5n jest podzielna przez 6. Dowód ostatniego faktu został podany w rozwiązaniu zadania 712.

714. Wskazówka: $(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3=$
$=(n+1)^3+(n+2)^3+n^3+9n^2+27n+27.$

715. Wskazówka: Sprawdź, że $5^{n+2}+2\cdot 3^{n+1}+1=$
$=5(5^{n+1}+2\cdot 3^{n+1}+1)-4(3^n+1)$ i wykaż, że liczba 3^n+1 jest podzielna przez 2 dla każdej naturalnej liczby n.

716. Wskazówka: $4^{n+1}(3n+2)+1=4[4^n(3n-1)+1]+12(4^n-1)+9.$
Wykaż, że liczba 4^n-1 jest podzielna przez 3 dla każdej naturalnej liczby n.

717. Jeżeli $n=1$, to $W(x)=x^3+(x+1)^3=x^3+x^3+3x^2+3x+1=$
$=2x^3+2x^2+2x+x^2+x+1=2x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(2x+1).$
Widać, że $x^2+x+1|W(x)$.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n istnieje wielomian $P(x)$ taki, że: $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}=P(x)(x^2+x+1)$.
Wykażemy, że istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że:
$x^{n+3}+(x+1)^{2n+3}=Q(x)(x^2+x+1).$

Zauważymy, że:
$x^{n+3}+(x+1)^{2n+3}=x^{n+2}\cdot x+(x+1)^{2n+1}\cdot(x+1)^2=$
$=x^{n+2}\cdot x+(x+1)^{2n+1}\cdot(x^2+2x+1)=$
$=x^{n+2}\cdot x+(x+1)^{2n+1}\cdot x+(x+1)^{2n+1}\cdot(x^2+x+1)=$
$=x[x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}]+(x+1)^{2n+1}\cdot(x^2+x+1)=$
$=xP(x)\cdot(x^2+x+1)+(x+1)^{2n+1}\cdot(x^2+x+1)=$
$=(x^2+x+1)[xP(x)+(x+1)^{2n+1}].$
Przyjmijmy, że: $Q(x)=xP(x)+(x+1)^{2n+1}$. Ponieważ $P(x)$ jest wielomianem i $n\in N$, więc $Q(x)$ jest wielomianem. Istnieje zatem wielomian $Q(x)$ (jest nim $xP(x)+(x+1)^{2n+1}$) taki, że $x^{n+3}+(x+1)^{2n+3}=(x^2+x+1)Q(x)$.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

718. Jeżeli $n=1$, to $W(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$. Widać, że $(x-1)^2|W(x)$.
Załóżmy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n istnieje wielomian $P(x)$ taki, że: $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1=P(x)(x-1)^2$.
Wykażemy, że istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że
$(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+1=Q(x)(x-1)^2.$
Zauważmy, że:
$(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+1=nx^{n+2}+x^{n+2}-(n+1)x^{n+1}-x^{n+1}+1=$
$=nx\,x^{n+1}-(n+1)x\,x^n+x+x^{n+2}-x^{n+1}-x+1=$
$=x[nx^{n+1}-(n+1)x^n+1]+x^{n+1}(x-1)-(x-1)=$
$=xP(x)(x-1)^2+(x-1)(x^{n+1}-1).$
Ale $x^{n+1}-1=(x-1)(x^n+x^{n-1}+...+x+1)$. Zatem
$(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+1=xP(x)(x-1)^2+(x-1)^2(x^n+x^{n-1}+...+x+1)=$
$=(x-1)^2[xP(x)+x^n+x^{n-1}+...+x+1]=(x-1)^2Q(x)$,
gdzie $Q(x)=xP(x)+x^n+x^{n-1}+...+x+1$. Łatwo zauważyć, że $Q(x)$ jest wielomianem.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

719. Jeżeli $n=1$, to liczbą o której mowa w twierdzeniu jest 111. Widać, że $3^1|111$.
Załóżmy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n, istnieje liczba naturalna k taka, że $\underbrace{11111...11}_{3^n\text{jedynek}}=3^nk$.

Wykażemy, że istnieje liczba naturalna l taka, że $\underbrace{1111111...11}_{3^{n+1}\text{ jedynek}}=3^{n+1}\cdot l$.

Zauważmy, że:
$$\underbrace{11111111...1}_{3^{n+1}\text{jedynek}}=\underbrace{11111...11}_{3^n\text{jedynek}}\,\underbrace{11111...11}_{3^n\text{jedynek}}\,\underbrace{11111...11}_{3^n\text{jedynek}}=$$
$$=\underbrace{11111...11}_{3^n\text{jedynek}}\,\underbrace{000...00}_{2\cdot 3^n\text{zer}}+\underbrace{11111...11}_{3^n\text{jedynek}}\,\underbrace{00...0}_{3^n\text{zer}}+\underbrace{11111...11}_{3^n\text{jedynek}}=$$
$$=\underbrace{11111...11}_{3^n\text{jedynek}}\cdot 10^{2\cdot 3^n}+\underbrace{11111...11}_{3^n\text{jedynek}}\cdot 10^{3^n}+\underbrace{11111...11}_{3^n\text{jedynek}}=$$

$$=\underbrace{11111...11}_{3^n\text{ jedynek}}(100^{3^n}+10^{3^n}+1)=3^n k(100^{3^n}+10^{3^n}+1).$$

Ponieważ suma cyfr liczby $100^{3^n}+10^{3^n}+1$ jest równa 3, więc liczba ta jest podzielna przez 3. Oznacza to, że istnieje liczba naturalna p taka, że $100^{3^n}+10^{3^n}+1=3p$. Wobec tego

$$\underbrace{1111111...11}_{3^{n+1}\text{ jedynek}}=3^n\cdot k\cdot 3\cdot p=3^{n+1}\cdot kp=3^{n+1}\cdot l,\text{ gdzie } l=kp.$$

Ponieważ $k,\ p\in N$, więc $l\in N$. Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

720. Jeżeli $n=3$, to $2^n=8$ i $2n+1=7$, więc twierdzenie jest prawdziwe.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonego $n\in N$ i $n\geqslant 3$ prawdziwa jest nierówność $2^n>2n+1$.
Wykażemy, że $2^{n+1}>2n+3$.
Zauważmy, że: $2^{n+1}=2^n\cdot 2>(2n+1)2=4n+2=2n+2n+2>2n+3$.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych $n>2$.

721. Jeżeli $n=1$, to $2^n=2$ i $n^2=1$, więc twierdzenie jest prawdziwe.
Jeżeli $n=5$, to $2^n=32$ i $n^2=25$, więc twierdzenie także jest prawdziwe.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej $n\geqslant 5$ prawdziwa jest nierówność $2^n>n^2$.
Wykażemy, że $2^{n+1}>(n+1)^2$.
Zauważmy, że ponieważ $2^{n+1}=2^n\cdot 2$ i z założenia $2^n>n^2$, więc $2^{n+1}>2n^2$. Wystarczy zatem pokazać, że jeśli $n\geqslant 5$, to $2n^2\geqslant(n+1)^2$.
Ostatniej nierówności równoważna jest nierówność $n(n-2)\geqslant 1$, która jest prawdziwa dla $n\geqslant 5$.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

722. Gdy $n=2$, to $3^n=9$ i $n^2+4=8$, zatem twierdzenie jest prawdziwe.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ prawdziwa jest nierówność $3^n>n^2+4$.
Wykażemy, że: $3^{n+1}>(n+1)^2+4$.
Zauważmy, że: $3^{n+1}=3^n\cdot 3>(n^2+4)3$. Wystarczy więc dowieść, że jeżeli $n\geqslant 2$, to $(n^2+4)3\geqslant(n+1)^2+4$.
Prawdą jest, że: $(n^2+4)3\geqslant(n+1)^2+4\Leftrightarrow 3n^2+12\geqslant n^2+2n+5\Leftrightarrow 2n^2-2n+7\geqslant 0$.
Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla $n\geqslant 2$.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

723. Jeżeli $n=1$, to $n^3=1$ i $\frac{n(n+1)}{2}=1$, zatem twierdzenie jest prawdziwe.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdą jest, że:
$n^3\geqslant\frac{n(n+1)}{2}$.

Wykażemy, że: $(n+1)^3\geqslant\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Ponieważ $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$, a z założemia $n^3\geqslant\frac{n(n+1)}{2}$,

więc $(n+1)^3\geqslant\frac{n(n+1)}{2}+3n^2+3n+1$. Wystarczy więc pokazać, że:

$\frac{n(n+1)}{2}+3n^2+3n+1\geqslant\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż jest ona równoważna nierówności $3n^2+2n\geqslant 0$, która jest prawdziwa dla każdego naturalnego n. Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

724. Jeżeli $n=4$, to $(n+1)2^n=80$ i $3^n=81$, zatem twierdzenie jest prawdziwe.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej $n\geqslant 4$ prawdą jest, że: $(n+1)2^n<3^n$.
Wykażemy, że: $(n+2)2^{n+1}<3^{n+1}$.
Ponieważ $(n+2)2^{n+1}=(n+1)2^{n+1}+2^{n+1}=(n+1)2^n\cdot 2+2^{n+1}$, a z założenia $(n+1)2^n<3^n$, więc $(n+2)2^{n+1}<2\cdot 3^n+2^{n+1}$.
Wystarczy więc dowieść, że jeżeli $n>3$, to $2\cdot 3^n+2^{n+1}\leqslant 3^{n+1}$.
Zauważmy, że:

$$2\cdot 3^n+2^{n+1}\leqslant 3^{n+1}\Leftrightarrow 2^{n+1}\leqslant 3^n\cdot 3-2\cdot 3^n\Leftrightarrow 2\cdot 2^n\leqslant 3^n\Leftrightarrow 2\leqslant\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla $n>3$ i $n\in N$. Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, twierdzenie jest prawdziwe.

725. Jeżeli $n=1$, to $2^n=2$ i $n^3=1$, więc nierówność jest prawdziwa.
Jeżeli $n=10$, to $2^n=1024$ i $n^3=1000$, czyli nierówność także jest prawdziwa.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej $n\geqslant 10$ prawdziwa jest nierówność $2^n>n^3$.
Wykażemy, że $2^{n+1}>(n+1)^3$.
Ponieważ $2^{n+1}=2^n\cdot 2$, a z założenia $2^n>n^3$, więc $2^{n+1}>2n^3$.
Wystarczy więc pokazać, że jeśli $n>9$, to $2n^3\geqslant(n+1)^3$.
Zauważmy, że: $2n^3\geqslant(n+1)^3\Leftrightarrow 2n^3\geqslant n^3+3n^2+3n+1\Leftrightarrow n^3-3n^2-3n\geqslant 1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n(n^2-3n-3)\geqslant 1\Leftrightarrow n[n(n-3)-3]\geqslant 1$.
Przy $n>9$ ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż prawdą jest, że:
$n>9\Rightarrow n-3>6\Rightarrow n(n-3)>6\Rightarrow n(n-3)-3>3\Rightarrow n[n(n-3)-3]>3\Rightarrow$
$\Rightarrow n[n(n-3)-3]>1$.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

726. Gdy $n=7$, to $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}=\frac{1089}{420}\approx 2{,}59$ i $\sqrt{7}\approx 2{,}65$, zatem nierówność jest prawdziwa.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej $n\geqslant 7$ prawdziwa jest nierówność $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}<\sqrt{n}$.

Wykażemy, że: $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}<\sqrt{n+1}$.

Zauważmy, że: $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}<\sqrt{n}+\frac{1}{n+1}$.

Wystarczy więc dowieść, że $\sqrt{n}+\frac{1}{n+1}\leqslant\sqrt{n+1}$ dla $n\geqslant 7$ i $n\in\mathbf{N}$.

Zauważmy, że dla $n\geqslant 7$

$$\sqrt{n}+\frac{1}{n+1}\leqslant\sqrt{n+1}\Leftrightarrow n+\frac{2\sqrt{n}}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant n+1\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{n}}{n+1}\leqslant 1-\frac{1}{(n+1)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{n}}{n+1}\leqslant\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\Leftrightarrow 2\sqrt{n}(n+1)\leqslant n(n+2)\Leftrightarrow 4n(n+1)^2\leqslant n^2(n+2)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(n+1)^2\leqslant n(n+2)^2.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż dla $n\geqslant 7$ jest $4\leqslant n$ i $(n+1)^2\leqslant(n+2)^2$, skąd $4(n+1)^2\leqslant n(n+2)^2$.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

727. Jeżeli $n=2$, to $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ i $\sqrt{n}=\sqrt{2}$.

Łatwo dowieść, że: $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$.

Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ prawdziwa jest nierówność: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

Wykażemy, że: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$.

Z założenia wynika, że: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Wystarczy więc pokazać, że jeżeli $n>1$, to: $\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\geqslant\sqrt{n+1}$.

Ostatnią nierówność można przekształcić do postaci $\sqrt{n(n+1)}\geqslant\sqrt{n}$, a nierówność ta jest prawdziwa dla $n\in\mathbf{N}$.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

728. Jeżeli $n=1$, to lewa strona podanej nierówności jest równa:
$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+3}=\frac{13}{12}$, a prawa 1, zatem nierówność jest prawdziwa.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonego n naturalnego prawdą jest:
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1.$$

Wykażemy, że:
$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}>1$$

Zauważmy, że: $\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}=$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}>$$

$$>1+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}.$$

Wystarczy więc udowodnić, że dla naturalnego n prawdziwa jest nierówność:

$$1+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}\geqslant 1,$$

czyli nierówność: $\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}\geqslant 0$.

Przekształcając ostatnią nierówność otrzymujemy nierówność $2n\geqslant -2$ która jest prawdziwa.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

29. Jeżeli $n=2$, to lewa strona podanej nierówności jest równa:
$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{2+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{14}{24}$, a prawa $\frac{13}{24}$, zatem nierówność jest prawdziwa.

Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ prawdą jest, że:
$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

Wykażemy, że: $\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}>\frac{13}{24}$.

Zauważmy, że:
$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+$$

$$+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}>\frac{13}{24}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}.$$

Wystarczy więc udowodnić, że dla $n>1$ prawdziwa jest nierówność:
$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\geqslant 0$. Łatwo pokazać, że dla $n>1$ ostatnią nierówność można przekształcić do postaci $\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}\geqslant 0$, która jest prawdziwa.

Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

730. I sposób.
Jeżeli $n=1$, to lewa oraz prawa strona podanej nierówności są równe 1, zatem w tym przypadku nierówność jest prawdziwa.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność:
$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$.
Wykażemy, że: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}$.
Założenia wynika, że: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$.
Wystarczy więc udowodnić, że jeśli n jest liczbą naturalną, to prawdziwa jest nierówność: $2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}$. Ostatnią nierówność łatwo przekształcić do postaci $0\leqslant 1$, co kończy dowód.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

II sposób.
Jeżeli $n=1$, to nierówność jest prawdziwa. Jeżeli $n>1$, to:
$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot n}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}$.
Z zadania 678 wiadomo, że $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n}$. Wobec tego:
$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{n-1}{n}=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}$.

731. Gdy $n=2$ oraz $x_1>0$ i $x_2>0$ i $x_1x_2=1$, to

$$x_1+x_2-2=x_1+\frac{1}{x_1}-2=\frac{x_1^2-2x_1+1}{x_1}=\frac{(x_1-1)^2}{x_1}\geqslant 0,$$

zatem $x_1+x_2\geqslant 2$.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej $n>2$ oraz dowolnie ustalonych n liczb dodatnich, których iloczyn jest równy 1, suma tych liczb jest nie mniejsza od n.
Wykażemy, że jeżeli $x_1>0$ i $x_2>0$ i ... i $x_{n+1}>0$ i $x_1x_2\ldots x_{n+1}=1$, to $x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}\geqslant n+1$.
Nie ograniczymy ogólności rozważań przyjmując $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_{n+1}$.
Musi być $x_1\leqslant 1$, bo gdyby $x_1>1$, to liczby $x_2, x_3, \ldots x_{n+1}$ byłyby także większe od 1, co przeczy założeniu, że $x_1x_2\ldots x_{n+1}=1$.
Musi być także $x_{n+1}\geqslant 1$, bo gdyby $x_{n+1}<1$, to również liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ byłyby mniejsze od 1, co sprzeczne z założeniem, że $x_1x_2\ldots x_{n+1}=1$. Zatem
$(1-x_1)(x_{n+1}-1)\geqslant 0,$ (1)
czyli $x_{n+1}-1-x_1x_{n+1}+x_1\geqslant 0$.
Ponieważ $x_1x_2\ldots x_{n+1}=1$, więc na mocy założenia indukcyjnego
$x_2+x_3+\ldots+x_n+(x_1x_{n+1})\geqslant n.$ (2)

Dodając stronami nierówności (1) i (2) otrzymujemy
$x_{n+1}-1-x_1x_{n+1}+x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n+x_1x_{n+1}\geqslant n$, czyli
$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}\geqslant n+1$, to kończy dowód.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.
Uwaga: Z udowodnionego twierdzenia wynika, że jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liczbami dodatnimi, to $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n$.

732. Oznaczmy: $x_1=\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}$, $x_2=\frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}$, ..., $x_n=\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}$.
Łatwo zauważyć, że $x_1, x_2, \ldots, x_n\in \boldsymbol{R}_+$ i $x_1x_2\ldots x_n=1$.
Stąd i z zadania 731 mamy:

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}+\frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}\geqslant n.$$

Mnożąc obie strony powyższej nierówności przez $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$ otrzymujemy
$a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$, czyli
$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

733. Ustalmy dowolnie $x\geqslant -1$. Jeżeli $n=1$, to $(1+x)^n=1+x$ i $1+nx=1+x$, zatem nierówność jest prawdziwa.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonego n naturalnego prawdą jest, że:
$(1+x)^n\geqslant 1+nx$.
Wykażemy, że: $(1+x)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)x$.
Zauważmy, że:
$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)\geqslant(1+nx)(1+x)=1+x+nx+nx^2\geqslant 1+x+nx=$
$=1+(n+1)x$.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

734. Ustalmy dowolnie $x\in\langle 0;\ \infty)$. Gdy $n=1$, to lewa oraz prawa strona podanej nierówności są równe $1+x$, zatem nierówność jest prawdziwa.
Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdą jest, że:
$(1+x)^n\geqslant 1+nx+\frac{1}{2}n(n-1)x^2$.
Wykażemy, że: $(1+x)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)x+\frac{1}{2}n(n+1)x^2$.
Z założenia otrzymujemy nierówność:
$(1+x)^n(1+x)\geqslant(1+x)[1+nx+\frac{1}{2}n(n-1)x^2]$.
Wystarczy więc pokazać, że dla n naturalnego i $x\in\langle 0;\ +\infty)$ prawdziwa jest nierówność: $(1+x)[1+nx+\frac{1}{2}n(n-1)x^2]\geqslant 1+(n+1)x+\frac{1}{2}n(n+1)x^2$.

Przekształcając ostatnią nierówność otrzymujemy nierówność $x^3(n-1)\geqslant 0$, która jest prawdziwa.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

735. Ustalmy dowolnie $a,b\in\mathbf{R}$. Jeżeli $n=1$, to $(a+b)^n=a+b$ i $2^n(a^n+b^n)=2(a+b)$. Zatem nierówność jest prawdziwa.
Zakładamy, że dla dowlnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $(a+b)^n<2^n(a^n+b^n)$.
Wykażemy, że $(a+b)^{n+1}<2^{n+1}(a^{n+1}+b^{n+1})$.
Z założenia otrzymujemy nierówność $(a+b)^n(a+b)<2^n(a^n+b^n)(a+b)$,
czyli nierówność $(a+b)^{n+1}<2^n(a^n+b^n)(a+b)$.
Wystarczy więc pokazać, że dla $a,\ b\in\mathbf{R}$ i $n\in\mathbf{N}$ prawdziwa jest nierówność $2^n(a^n+b^n)(a+b)\leqslant 2^{n+1}(a^{n+1}+b^{n+1})$.
Przekształcając ostatnią nierówność otrzymujemy nierówność
$(a-b)^2(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})\geqslant 0$, która jest prawdziwa.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

736. Prawdziwość nierówności $1+\frac{k}{n}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$ przy podanych założeniach wynika z nierówności Bernoulliego (zadanie 733).
Ustalmy dowolnie liczbę naturalną n. Jeżeli $k=1$, to

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k=1+\frac{1}{n}$ i $1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$, zatem nierówność jest prawdziwa.

Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej k takiej, że $k\leqslant n$ prawdziwa jest nierówność $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2<1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$.

Wykażemy, że $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}<1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Wystarczy więc pokazać, że przy $k,\ n\in\mathbf{N}$ oraz $k\leqslant n$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}.$$

Przy podanych założeniach powyższa nierówność jest równoważna nierówności $k^2\leqslant(k+1)n$, która jest prawdziwa.
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.
Uwaga: Z udowodnionej nierówności wynika, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$.

§ 8. Ciągi liczbowe

737. 9 początkowych wyrazów.

738. 6 początkowych wyrazów.

739. $a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7$.

740. $a_3,\ a_4,\ a_5$.

741. $$a_n=\frac{1\overbrace{999\ldots9}^{n}}{\underbrace{999\ldots95}_{n}}=\frac{2\overbrace{000\ldots0}^{n}-1}{\underbrace{1000\ldots0}_{n+1}-5}=\frac{2\cdot 10^n-1}{10^{n+1}-5}=\frac{2\cdot 10^n-1}{10\cdot 10^n-5}=\frac{2\cdot 10^n-1}{5(2\cdot 10^n-1)}=\frac{1}{5}.$$

742. Ciąg malejący.

743. Ciąg rosnący.

744. Ciąg rosnący.

745. Ciąg rosnący.

746. Nie jest monotoniczny.

747. Ciąg rosnący.

748. Zauważmy, że: $a_n=\dfrac{5\overbrace{000\ldots0}^{n}-1}{1\underbrace{000\ldots0}_{n}-2}=\dfrac{5\cdot 10^n-1}{10^{n+1}-2}$.

Zatem $a_{n+1}-a_n=\dfrac{5\cdot 10^{n+1}-1}{10^{n+2}-2}-\dfrac{5\cdot 10^n-1}{10^{n+1}-2}=\dfrac{9\cdot 10^{n+1}}{(10^{n+2}-2)(10^{n+1}-2)}$.

Widać, że $\bigwedge\limits_{x\in\mathbf{N}}\dfrac{9\cdot 10^{n+1}}{(10^{n+2}-2)(10^{n+1}-2)}>0$. Zatem podany ciąg jest ciągiem rosnącym.

749. Ciąg rosnący.

750. Ciąg rosnący.

751. Załóżmy, że $n\in\mathbf{N}$ i $n>1$. Korzystając z nierówności Bernoulliego mamy:
$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1+\left(-\frac{1}{n^2}\right)n$.
Przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$, co oznacza, że $a_n>a_{n-1}$. Stąd wniosek, że rozważany ciąg jest rosnący.

752. Zauważmy, że: $a_n=\sqrt{n^2+n}-n=\dfrac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$. Wobec tego:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}+(n+1)}-\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}>\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=0.$$

753. $ad>bc$.

754. a). $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)+(n-1)}+\frac{1}{(n+1)+n}+$ $+\frac{1}{(n+1)+(n+1)}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$. Zatem:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Ponieważ $\bigwedge_{n\in N}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$, więc ciąg (a_n) jest rosnący.

b). Należy wykazać, że $\bigwedge_{n\in N}a_n\geqslant\frac{1}{2}$ i $\bigwedge_{n\in N}a_n<1$.

Dla $n\in N$ mamy: $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\geqslant$

$\geqslant\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\ldots+\frac{1}{n+n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$,

oraz

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1.$$

755. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Wykażemy najpierw, że $\bigwedge_{n\in N}a_{n+1}>a_n$.

Jeśli $n=1$, to $a_2=\sqrt{k+\sqrt{k}}$ oraz $a_1=\sqrt{k}$. Widać, że $\sqrt{k+\sqrt{k}}>\sqrt{k}$.
Zakładamy, że dla $n\in N$ $a_{n+1}>a_n$. Wykażemy, że $a_{n+2}>a_{n+1}$, co zakończy dowód.
Z określenia ciągu (a_n) wynika, że $a_{n+2}=\sqrt{k+a_{n+1}}$. Stąd i z założenia indukcyjnego otrzymujemy $a_{n+2}>\sqrt{k+a_n}=a_{n+1}$.
Oznacza to, że $a_{n+2}>a_{n+1}$.

Udowodnijmy teraz, że $\bigwedge_{n\in N}a_n<\sqrt{k}+1$. Jeżeli $n=1$, to $a_n=a_1=\sqrt{k}$.
Widać, że $\sqrt{k}<\sqrt{k}+1$. Niech dla $n\in N$: $a_n<\sqrt{k}+1$.
Wykażemy, że $a_{n+1}<\sqrt{k}+1$, co zakończy dowód.
Z określenia ciągu (a_n) wynika, że $a_{n+1}=\sqrt{k+a_n}$. Stąd i z założenia indukcyjnego
$a_{n+1}<\sqrt{k+\sqrt{k}+1}<\sqrt{k+2\sqrt{k}+1}=\sqrt{(\sqrt{k}+1)^2}=\sqrt{k}+1$. Zatem:
$a_{n+1}<\sqrt{k}+1$.

756. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Gdy $n=5$, to $a_5=48$, czyli $a_5>2^5$.
Zakładamy, że dla $n\geqslant 5$, $a_n>2^n$. Wykażemy, że $a_{n+1}>2^{n+1}$, co zakończy dowód.
$a_{n+1}=a_n^2-2^n>(2^n)^2-2^n=2^n(2^n-1)>2^n2=2^{n+1}$.

757. Niech a_n^r oznacza n-ty wyraz ciągu (a_n) uzyskany z w definicji rekurencyjnej, a a_n^w n-ty wyraz uzyskany ze wzoru.

Mamy wykazać, że $\bigwedge_{n\in N}a_n^r=a_n^w$. Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej. Jeżeli $n=1$, to $a_n^r=a_1^r=1$ i $a_n^w=a_1^w=(2\cdot 1-1)^2=1$, zatem $a_1^r=a_1^w$.

Zakładamy, że $a_n^r=a_n^w$ dla $n\in N$.
Wykażemy, że $a_{n+1}^r=a_{n+1}^w$, co zakończy dowód.
$a_{n+1}^r=a_n^r+8n=a_n^w+8n=(2n-1)^2+8n=4n^2-4n+1+8n=(2n+1)^2=a_{n+1}^w$.

758. Oznaczmy przez a_n^r n-ty wyraz uzyskany z określenia rekurencyjnego, a przez a_n^w n-ty uzyskany ze wzoru.
Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej.

Gdy $n=1$, to $a_1^r=\frac{1}{2}$ i $a_1^w=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^0}=\frac{1}{2}$, zatem $a_1^r=a_1^w$.

Zakładamy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość $a_n^r=n_n^w$. Wykażemy, że $a_{n+1}^r=a_{n+1}^w$, co zakończy dowód.

Zauważmy, że: $a_{n+1}^r=a_n^r+\frac{1}{2^n}=a_n^w+\frac{1}{2^n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{3}{2}-\frac{2-1}{2^n}=$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}=a_{n+1}^w$.

759. Licząc a_1 i a_2 ze wzoru, po łatwych rachunkach, otrzymujemy: $a_1=a_2=1$.
Dla $n\in N$ mamy:

$$a_{n+1}+a_n=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]=\right.$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right].$$

Ponieważ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ i $\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$, więc

$$a_{n+1}+a_n=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]=a_{n+2}.$$

760. Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej.
Dla $n=2$, $a_2^2-a_1\cdot a_3=1-1\cdot 2=-1$ i $(-1)^1=-1$, czyli twierdzenie jest prawdziwe dla $n=2$.
Załóżmy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ prawdą jest, że
$a_n^2-a_{n-1}\cdot a_{n+1}=(-1)^{n-1}$.
Wykażemy, że $a_{n+1}^2-a_n\cdot a_{n+2}=(-1)^n$.
Zauważmy, że: $a_{n+1}^2-a_n\cdot a_{n+2}=a_{n+1}^2-a_n(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}^2-a_n\cdot a_{n+1}-a_n^2=$
$=a_{n+1}(a_{n+1}-a_n)-a_n^2=a_{n+1}\cdot a_{n-1}-a_n^2=(-1)(a_n^2-a_{n-1}\cdot a_{n+1})=$
$=(-1)(-1)^{n-1}=(-1)^n$.

761. Zauważmy, że: $a_{n+1}\cdot a_{n+2}-a_n\cdot a_{n+3}=a_{n+1}\cdot a_{n+2}-a_n(a_{n+2}+a_{n+1})=$
$=a_{n+1}\cdot a_{n+2}-a_n\cdot a_{n+2}-a_n\cdot a_{n+1}$.
Korzystając z zadania 760 mamy: $-a_n\cdot a_{n+2}=(-1)^n-a_{n+1}^2$.
Zatem: $a_{n+1}\cdot a_{n+2}-a_n\cdot a_{n+3}=a_{n+1}\cdot a_{n+2}-a_n\cdot a_{n+1}+(-1)^n-a_{n+1}^2=$
$=a_{n+1}\cdot a_{n+2}-a_{n+1}(a_n+a_{n+1})+(-1)^n=a_{n+1}\cdot a_{n+2}-a_{n+1}\cdot a_{n+2}+(-1)^n=(-1)^n$.

762. Z definicji S_n wynika, że $a_1=S_1$, $a_2=S_2-S_1$ i $a_3=S_3-S_2$.
Ponieważ $\bigwedge_{n\in N} S_n=n^2+3n-2$, więc $S_1=2$, $S_2=8$ i $S_3=16$. Zatem $a_1=2$, $a_2=6$ i $a_3=8$.

763. $a_7=5\frac{2}{3}$. Wskazówka: $a_7=S_7-S_6$.

764. Z definicji S_n i równości $S_n=\frac{n}{n+1}$ wynika, że jeśli $n>1$,
to $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$,
a dla $n=1$, $S_1=a_1=\frac{1}{2}$. Ponieważ ze wzoru $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, to dla $n=1$
i otrzymujemy $a_1=\frac{1}{2}$, więc $\bigwedge_{n\in N} a_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

765. Tak.

766. Nie.

767. $b_n=(n+1)^2-5(n+1)+2-(n^2-5n+2)+9=2n+5$. Zatem,
$b_{n+1}-b_n=2(n+1)+5-(2n+5)=2$.
Wobec tego ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 2.

768. Oznaczmy przez r_1 i r_2 odpowiednio różnice ciągów (a_n) i (b_n). Mamy wykazać, że $d_{n+1}-d_n=2r_1r_2$. Zauważmy, że:
$d_{n+1}-d_n=c_{n+2}-c_{n+1}-c_{n+1}+c_n=a_{n+2}b_{n+2}-2a_{n+1}b_{n+1}+a_nb_n=$
$=(a_n+2r_1)(b_n+2r_2)-2(a_n+r_1)(b_n+r_2)+a_nb_n$.
Wykonując dalej działania otrzymujemy $d_{n+1}-d_n=2r_1r_2$.

769. Łatwo sprawdzić, że $a_n=S_n-S_{n-1}=4n+1$. Wobec tego
$a_{n+1}-a_n=[4(n+1)+1]-(4n+1)=4$. Oznacza to, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 4.

770. $x=-1$ lub $x=1$.

771. Niech r oznacza różnicę interesującego nas ciągu arytmetycznego. Ponieważ liczby $x+y$, $x+2y+1$ i $x^2+4y+3x$ są trzema kolejnymi wyrazami tego ciągu, to
$x+2y+1-(x+y)=x^2+4y+3x-(x+2y+1)$ i $r=x+2y+1-(x+y)$.
Stąd $y=-x^2-2x+2$ i $r=y+1$, a więc $r=-x^2-2x+3$.
Ponieważ ciąg arytmetyczny jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy jego różnica jest dodatnia, więc nasz ciąg będzie rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy $-x^2-2x+3>0$, czyli gdy $x\in(-3;1)$.

772. Przypuśćmy, że z danego ciągu można wybrać nieskończony ciąg arytmetyczny. Ponieważ ciąg $\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$ jest ciągiem malejącym, więc wybrany ciąg arytmetyczny byłby także ciągiem malejącym. Zatem jego różnica musiałaby być liczbą ujemną. To oznacza, że od pewnego miejsca, wyrazy tego ciągu byłyby liczbami ujemnymi. Jest to niemożliwe, gdyż wszystkie wyrazy ciągu $(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ są dodatnie.

773. Mamy wykazać, że $\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}$.
Przekształcając powyższą równość, otrzymujemy do udowodnienia $b^2-a^2=c^2-b^2$. Ostatnia równość jest prawdziwa, gdyż ciąg (a^2, b^2, c^2) jest ciągiem arytmetycznym z założenia.

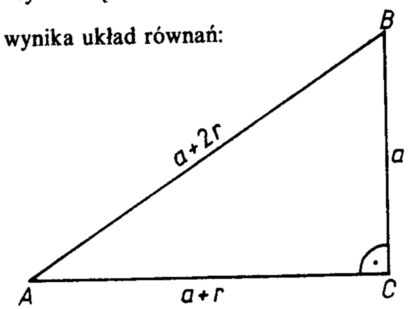
774. Niech liczby dodatnie a i b oznaczają długości przyprostokątnych, a P pole rozważanego trójkąta. Przy tych oznaczeniach: $P=\frac{1}{2}ab$.
Ponieważ ciąg $(a, b, 30)$ jest ciągiem arytmetycznym, więc $b-a=30-b$, czyli $a=2b-30$.
Z twierdzenia Pitagorasa wynika natomiast, że $a^2+b^2=900$.
Rozwiązując układ równań $a=2b-30$ i $a^2+b^2=900$ stwierdzamy, że jedynymi liczbami dodatnimi spełniającymi ten układ są $a=18$ i $b=24$. Pole trójkąta jest więc równe $P=216$.

775. Ponieważ długości boków trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, więc możemy je oznaczyć jak na rys. 48, przy czym a i r są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Przy tych oznaczeniach obwód l trójkąta ABC wyraża się wzorem $l=3a+3r$.

Z treści zadania i twierdzenia Pitagorasa wynika układ równań:

$\frac{1}{2}a(a+r)=150$ i $a^2+(a+r)^2=(a+2r)^2$.

Rozwiązując ten układ stwierdzamy, że jedynymi dodatnimi jego rozwiązaniami są liczby $a=15$ i $r=5$. Obwód trójkąta jest więc równy $l=60$.



Rys. 48

776. Niech P oznacza pole rozważanego trójkąta. Wiadomo, że $P=\frac{1}{2}ah$ i $P=\frac{1}{2}(a+b+c)r$.
Zatem $bh=(a+b+c)r$. (1)
Ponieważ ciąg (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym, więc $b-a=c-b$, czyli $a+c=2b$. (2)
Z (1) i (2) wynika, że $bh=3br$, skąd $h=3r$.

777. Z treści zadania otrzymujemy układ równań:
$9a-3b+c=0$ i $b-a=c-b$ i $a+b+c=24$. Stąd $a=1$ i $b=6$ i $c=15$. Wobec tego drugim rozwiązaniem równania $ax^2+bx+c=0$ czyli równania $x^2+8x+15=0$ jest -5.

778. Ponieważ interesujące nas trzy pierwiastki wielomianu $W(x)$ tworzą ciąg arytmetyczny, więc możemy je zapisać w postaci $x-r, x, x+r$. Z treści zadania wynika ponadto, że $x-r+x+x+r=21$ i $(x-r)x(x+r)=315$. Stąd $x=7$ i $r=2$. W obu przypadkach otrzymujemy liczby 5, 7 i 9. Zatem wielomian $W(x)$ możemy zapisać w postaci: $W(x)=(x-5)(x-7)(x-9)\,W_1(x)$, gdzie $W_1(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych. Podstawiając za x liczbę nieparzystą $2k-1$, gdzie $k\in C$ mamy: $W(2k-1)=(2k-6)(2k-8)(2k-10)\,W_1(2k-1)=8(k-3)(k-4)(k-5)\,W_1(2k-1)$. Ponieważ iloczyn $(k-3)(k-4)(k-5)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych, więc iloczyn ten jest podzielny przez 6. Zatem wielomian $W(x)$ jest podzielny przez 48.

779. Niech r oznacza różnicę ciągu arytmetycznego (a^3, b^3, c^3). Zgodnie z definicją ciągu arytmetycznego prawdziwe są równości: $b^3-a^3=r$ i $c^3-b^3=r$ i $c^3-a^3=2r$. (1)
Jeżeli $r=0$, to $a=b=c$ i jak łatwo sprawdzić, równość którą mamy udowodnić jest prawdziwa. Jeżeli $r\neq 0$, to $a\neq b$ i $b\neq c$, i $a\neq c$, więc $a-b\neq 0$ i $b-c\neq 0$, i $a-c\neq 0$. Wtedy korzystając ze wzoru $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ i równości (1) mamy:

$$(a^2+ab+b^2)^{-1}+(b^2+bc+c^2)^{-1}=\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}=\frac{a-b}{a^3-b^3}+\frac{b-c}{b^3-c^3}=$$
$$=\frac{a-b}{-r}+\frac{b-c}{-r}=\frac{c-a}{r},\ \text{a}\ 2(a^2+ac+c^2)^{-1}=\frac{2}{a^2+ac+c^2}=\frac{2(a-c)}{a^3-c^3}=\frac{2(a-c)}{-2r}=$$
$$=\frac{c-a}{r}.$$

Zatem i w tym przypadku równość jest prawdziwa.

780. Niech r oznacza różnicę rozważanego ciągu. Z treści i wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego wynika, że $23=-7+6r$. Stąd $r=5$. Wobec tego:
$x_1=-2$, $x_2=3$, $x_3=8$, $x_4=13$ i $x_5=18$.

781. $a_{21}=75$.

782. $a_1=2$ i $r=2$.

783. Niech a_1 oznacza wyraz pierwszy, r różnicę rozważanego ciągu arytmetycznego. Z treści zadania wynika, że:
$a_1+(a_1+r)+(a_1+2r)=15$ i $a_1(a_1+r)(a_1+2r)=80$, czyli $a_1+r=5$ i $a_15(a_1+2r)=80$. Stąd $a_1=2$ i $r=3$ lub $a_1=8$ i $r=-3$.

784. Niech a_1 i r oznaczają odpowiednio wyraz pierwszy i różnicę szukanego ciągu arytmetycznego. Z treści zadania wynika, że
$a_1+a_1+r+a_1+2r=15$ i $a_1^2+(a_1+r)^2+(a_1+2r)^2=93$.
Stąd $a_1=2$ i $r=3$ lub $a_1=8$ i $r=-3$.

785. Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego (a_n).
$a_n=a_1+(n-1)r$ i $a_m=a_1+(m-1)r$. Odejmując te równości stronami stwierdzamy, że $a_n-a_m=(n-1)r-(m-1)r=(n-m)r$. Ale $a_n=m$ i $a_m=n$, zatem $m-n=(n-m)r$. Ponieważ $n\neq m$, więc z ostatniej równości otrzymujemy $r=-1$.

786. Niech a_1 i r oznaczają odpowiednio wyraz pierwszy i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) o n wyrazach. Stąd wynika, że wyraz k-ty licząc od początku ciągu jest równy $a_k=a_1+(k-1)r$.
Ponieważ wyraz k-ty licząc od końca ciągu jest $n-k+1$ wyrazem licząc od początku ciągu, więc wyraz ten jest równy $a_{n-k+1}=a_1+(n-k)r$. Wobec tego $a_k+a_{n-k+1}=a_1+(k-1)r+a_1(n-k)r=a_1+a_1+(n-1)r=a_1+a_n$.

787. Niech liczby dodatnie a i r oznaczają odpowiednio wartość wyjściową maszyny i kwotę o jaką ta wartość maleje co roku.
Ponieważ wartości użytkowe maszyny w poszczególnych latach tworzą ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym a i różnicy $-r$, więc jej wartość użytkowa po n latach wyraża się wzorem $a_n=a-(n-1)r$.
Należy ustalić, dla jakiego naturalnego n jest $a-(n-1)r=0$. Z treści zadania wynika, że $3a_{25}=a_{15}$, czyli $3(a-24r)=a-14r$. Zatem $a-29r=0$, czyli $a=29r$. Oznacza to, że równość $a-(n-1)r=0$ będzie prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $29r-(n-1)r=0$. Stąd, wobec faktu, że $r\neq 0$, otrzymujemy $n=30$.

788. Niech r będzie różnicą ciągu arytmetycznego (a, b, c, d). Wtedy: $b=a+r$ i $c=a+2r$ i $d=a+3r$. Stąd otrzymujemy: $abcd+(b-a)^4=(a^2+3ar+r^2)^2$.
Ponieważ $a, r\in C$, więc $a^2+3ar+r^2$ jest liczbą całkowitą.

789. Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy r, w którym $a_2^2=a_1a_4$. Mamy wykazać, że $a_6^2=a_4a_9$, czyli $(a_1+5r)^2=(a_1+3r)(a_1+8r)$. Wykonując działania otrzymujemy do udowodnienia równość $a_1r=r^2$. Ostatnia równość jest prawdziwa, gdyż z założenia $(a_1+r)^2=(a_1+3r)a_1$, czyli $a_1r=r^2$.

790. Przyjmijmy, że omawiany ciąg arytmetyczny ma pierwszy wyraz a_1 i różnicę r, wtedy prawdziwe są równości: $a_1+(k-1)r=a$ i $a_1+(l-1)r=b$, i $a_1+(m-1)r=c$, czyli równości $a_1=a-(k-1)r$ i $a-(k-1)r+(l-1)r=b$, i $a-(k-1)r+(m-1)r=c$. Wobec tego $a-b=(k-l)r$ i $a-c=(k-m)r$. Stąd i z założeń $k\neq l$ i $k\neq m$ wynika, że $\frac{a-b}{k-l}=r$ i $\frac{a-c}{k-m}=r$, a więc $\frac{a-b}{k-l}=\frac{a-c}{k-m}$.

791. Oznaczmy przez r różnicę rozważanego ciągu arytmetycznego.
Wtedy dla $r\neq 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+$$
$$+\ldots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{r}=\frac{a_n-a_1}{r(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Gdy $r=0$, to $a_1=a_2=\ldots=a_n$. Wtedy lewa i prawa strona podanej równości są równe $\frac{n-1}{2\sqrt{a_1}}$.

792. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego (a_n). Dla $n=3$, lewa strona równości jest równa

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{a_3+a_1}{a_1a_2a_3}=\frac{a_1+2r+a_1}{a_1a_2a_3}=\frac{2a_1+2r}{a_1a_2a_3}=\frac{2(a_1+r)}{a_1a_2a_3}=\frac{2a_2}{a_1a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3},$$

a prawa strona $\frac{3-1}{a_1a_3}=\frac{2}{a_1a_3}$. Wobec tego twierdzenie jest prawdziwe dla $n=3$.

Załóżmy, że dla $n \geq 3$ prawdziwa jest równość:
$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\dots+\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$
Wykażemy, że:
$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\dots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$
Zauważmy, że:
$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\dots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n-1}{a_1\cdot a_n}+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{(n-1)a_{n+1}+a_1}{a_1a_na_{n+1}}=$$
$$=\frac{(n-1)(a_n+r)+a_1}{a_1a_na_{n+1}}=\frac{(n-1)a_n+(n-1)r+a_1}{a_1a_na_{n+1}}=\frac{(n-1)a_n+a_n}{a_1a_na_{n+1}}=\frac{na_n}{a_1a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$
Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, podane twierdzenie jest prawdziwe.

793. Przypuśćmy, że szukane liczby istnieją. Zapiszmy je w postaci: $x,\ x+r,\ x+2r,\ x+3r$, gdzie $x\in C$, $r\in N$. Mamy zatem:
$(x+3r)^2=x^2+(x+r)^2+(x+2r)^2$.
Powyższa równość jest równoważna równości $\left|\frac{x}{r}\right|=\sqrt{2}$, która nie jest prawdziwa dla $x\in C$ i $n\in N$. Oznacza to, że liczby spełniające warunki zadania nie istnieją.

794. Ponieważ szukane liczby całkowite tworzą ciąg arytmetyczny, więc możemy je zapisać w postaci: $x,\ x+r,\ x+2r,\ x+3r$, gdzie $x\in C$ i $r\in N$. Z treści zadania wynika równanie $x+3r=x^2+(x+r)^2+(x+2r)^2$, czyli równanie
$3x^2+(6r-1)x+5r^2-3r=0.$ (1)
Rozwiązując równanie (1) ze względu na zmienną x stwierdzamy, że jego wyróżnik $\Delta=(6r-1)^2-12(5r^2-3r)=-24r^2+24r+1$.
Równanie (1) będzie miało rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta\geq 0$, czyli
gdy $r\in\left\langle\frac{6-\sqrt{42}}{12};\frac{6+\sqrt{42}}{12}\right\rangle$. (2)
Łatwo sprawdzić, że do przedziału (2) należy tylko jedna liczba naturalna i jest nią $r=1$. Jeśli $r=1$, to równanie (1) przyjmuje postać $3x^2+54x+2=0$ i jego jedynym rozwiązaniem całkowitym jest $x=-1$. Wobec tego szukanymi liczbami mogą być liczby: -1, 0, 1, 2. Łatwo sprawdzić, że liczby te spełniają warunki zadania.

795. Oznaczmy szukaną liczbę następująco: $100x+10y+z$, gdzie x, y, z są cyframi tej liczby. Ponieważ rozważana liczba jest podzielna przez 45, więc jest ona podzielna przez 9 i 5. Stąd: ($z=0$ lub $z=5$) i $9\mid x+y+z$.
Przyjmijmy, że ciąg (x, y, z) jest arytmetyczny. Stąd $y=x+r$ i $z=x+2r$, gdzie r jest różnicą tego ciągu.
Otrzymujemy układ równań:
$$\begin{cases}x+2r=0 \text{ lub } x+2r=5\\ 3x+3r=9 \text{ lub } 3x+3r=18, \text{ lub } 3x+3r=27,\end{cases}$$
gdzie $x\in\{1, 2, \dots, 9\}$.
Stąd: ($x=6$ i $r=-3$) lub ($x=1$ i $r=2$), lub ($x=7$ i $r=-1$).
Szukanymi liczbami są więc: 630, 135 i 765.

796. Równość $a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=1$ przekształćmy do postaci $(a_{n+1}-a_n)-(a_n-a_{n-1})=1$. Oznacza to, że ciąg $(b_n): b_n=a_n-a_{n-1}$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 1. Zauważmy, że:
$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\dots+(a_2-a_1)+a_1=b_n+b_{n-1}+\dots+b_2+a_1=$
$$=\frac{2b_2+(n-2)\cdot 1}{2}\cdot(n-1)+a_1=\frac{2(a_2-a_1)+n-2}{2}\cdot(n-1)+a_1.$$

797. Oznaczmy przez (b_n) ciąg arytmetyczny utworzony z różnic między sąsiednimi wyrazami ciągu (a_n), a przez r różnicę ciągu (b_n). Stąd $b_1=a_2-a_1=2$ i $b_2=a_3-a_2=5$, a więc $r=b_2-b_1=3$. Zauważmy, że: $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\dots+(a_n-a_{n-1})=$
$$=a_1+b_1+b_2+\dots+b_{n-1}=3+\frac{4+3(n-2)}{2}\cdot(n-1)=\frac{1}{2}(3n^2-5n+8).$$

798. Przypuśćmy, że istnieje ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r taki, że:
$\sqrt{2}=a_1+(k-1)r$ i $\sqrt{3}=a_1+(m-1)r$ i $\sqrt{5}=a_1+(n-1)r$, gdzie $k, m, n\in N$.
Stąd $\sqrt{3}-\sqrt{2}=(m-k)r$ i $\sqrt{5}-\sqrt{2}=(n-k)r$. Ponieważ $m-k\neq 0$ i $n-k\neq 0$, i $r\neq 0$,
więc dzieląc stronami powyższe równości otrzymujemy $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{m-k}{n-k}$,
co jest sprzeczne, gdyż po lewej stronie jest liczba niewymierna, na prawej liczba wymierna.

799. Liczby naturalne nieparzyste mniejsze od 200, to znaczy liczby 1, 3, 5, ... ,197, 199 tworzą ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym 1, wyrazie ostatnim 199 i różnicy 2. Oznaczmy przez S_n szukaną sumę. Wtedy $S_n=\frac{(1+199)n}{2}=100n$.
Ale $199=1+(n-1)2$, skąd $n=100$.
Otrzymujemy więc $S_n=S_{100}=10000$.

800. 123 300.

801. 1 210.

802. 3 240. Wskazówka: Odejmij od sumy wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych sumę liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 3.

803. 672.

804. $\frac{119}{3}$.

805. Oznaczmy: $a_1+a_2+\dots+a_n=S_n$, a przez r różnicę ciągu (a_n).
Wtedy $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$, czyli $4a_1+38r=20$. Stąd $2a_1+19r=10$.
Widać, że: $S_{20}=(a_1+a_{20})10=10(2a_1+19r)$. Tak więc $S_{20}=10\cdot 10=100$.

806. Niech r oznacza różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) oraz $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$. Ponieważ ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym, więc $r<0$. Z treści zadania wynika, że $(a_1+2r)(a_1+6r)=28$ i $a_1+r=3(a_1+5r)+2$. Rozwiązując układ i uwzględniając nierówność $r<0$ stwierdzamy, że $r=-3$ i $a_1=20$. Stąd $S_{13}=26$.

807. $r=-3$. **808.** 7.

809. Niech a_1 i r oznaczają odpowiednio wyraz pierwszy i różnicę szukanego ciągu. Z treści zadania wynika układ równań
$\frac{[(a_1+r)+(a_1+9r)]\,5}{2}=25$ i $\frac{[a_1+(a_1+8r)]\,5}{2}=15.$
Stąd $a_1=-5$ i $r=2$. Zatem, szukanym ciągiem jest ciąg $(-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 11, 13)$.

810. Niech a_1 oznacza wyraz pierwszy, r różnicę, a n liczbę wyrazów interesującego nas ciągu arytmetycznego. Z treści zadania oraz ze wzorów na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, wynika układ równań: $4a_1+6r=40$ i $4a_1+(n-1)r+(n-2)r+(n-3)r+(n-4)r=104$ i $\frac{1}{2}n[2a_1+(n-1)r]=216$. Rozwiązując ten układ otrzymujemy:
$n=12$ i $r=2$, i $a_1=7$. Wobec tego szukanymi liczbami są: 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29.

811. Niech a_1 i r oznaczają odpowiednio szukany wyraz pierwszy i szukaną różnicę rozważanego ciągu arytmetycznego, oraz $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$.
Ponieważ $S_n=\frac{1}{4}S_{2n}$, więc
$\frac{[2a_1+(n-1)r]\cdot n}{2}=\frac{1}{4}\frac{[2a_1+(2n-1)r]\,2n}{2}$. Stąd $r=2a_1$.
Z treści zadania wiadomo, że $a_5=18$, czyli $a_1+4r=18$.
Otrzymujemy więc $a_1=2$ i $r=4$.

812. Niech S oznacza szukaną wartość liczbową podanego wyrażenia. Łatwo zauważyć, że $S=(100-99)(100+99)+(98-97)(98+97)+(96-95)(96+95)+\ldots+$ $+(4-3)(4+3)+(2-1)(2+1)=199+195+191+\ldots+7+3.$
Składniki ostatniej sumy tworzą ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym 3, wyrazie ostatnim 199 i różnicy 4. Stąd $S=\frac{(3+199)n}{2}=101n.$
Ale $199=3+(n-1)4$, skąd $n=50$.
Otrzymujemy więc $S=5\,050$.

813. Składniki sumy stanowiącej lewą stronę równania tworzą ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_1=1$, $r=3$ i $S_n=145$, gdzie $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$.
Ponieważ $a_n=a_1+(n-1)r$, więc $x=3n-2$.
Zatem $145=\frac{[2+(n-1)\,3]n}{2}$. Stąd, wobec faktu, że $n\in N$, otrzymujemy $n=10$.
Wobec tego $x=28$.

814. Składniki sumy lewej strony równania tworzą ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_1=x+1$, $r=3$, $x+28=a_n$ i $S_n=155$, gdzie $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$.
Ponieważ $x+28=a_n$ i $a_n=a_1+(n-1)r=x+1+(n-1)\,3=x+3n-2$, więc $x+28=x+3n-2$, skąd $n=10$.
Zatem $155=\frac{(x+1+x+28)\,10}{2}$. Stąd $x=1$.

815. Mnożąc obie strony równania przez x, przy założeniu, że $x\neq0$, otrzymujemy: $1+2+\ldots+(x-2)+(x-1)=3x$. Łatwo zauważyć, że składniki stanowiące lewą stronę równania tworzą ciąg arytmetyczny, w którym pierwszy wyraz jest równy 1, ostatni wyraz jest równy $x-1$, a liczba wyrazów jest równa $x-1$. Stosując wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie $\frac{(1+x-1)(x-1)}{2}=3x$. Stąd i z założenia $x\neq0$ otrzymujemy $x=7$.

816. Ponieważ miary stopniowe kątów wewnętrznych interesującego nas wielokąta wypukłego tworzą n-wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym 120° i różnicy 5°, więc największy kąt wewnętrzny tego wielokąta musi mieć miarę stopniową $120°+(n-1)\,5°=5°n+115°$. Ale wielokąt jest wypukły, zatem $5°n+115°<180°$, czyli $n<13$. Wiadomo, że suma S_n miar stopniowych kątów wnętrznych n-kąta wypukłego wyraża się wzorem $S_n=(n-2)\,180°$.
Z drugiej strony korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i wcześniejszych ustaleń otrzymujemy
$S_n=\frac{[120°+(5°n+115°)]n}{2}=\frac{(5°n+235°)n}{2}$. Stąd szukana liczba naturalna n musi spełniać układ: $n<13$ i $\frac{(5°n+235°)\,n}{2}=(n-2)\,180°$.
Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy $n=9$.

817. Niech x oznacza liczbę dni potrzebnych panu Cosinusowi na dogonienie przyjaciela. Pan Sinus, będąc w drodze przez $x+6$ dni i pokonując 40 kilometrów dziennie, oddalił się od miejsca rozpoczęcia podróży o $(x+6)40$ kilometrów. Natomiast pan Cosinus, jak to wynika z treści zadania, pokonywał dziennie odcinki drogi, których długości tworzą ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym 82 i różnicy -4. Powyższe ustalenia i wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, upoważniają do wniosku, że pan Cosinus pokonał w czasie x dni drogę długości $\frac{[164+(x-1)(-4)]\,x}{2}$ kilometrów. Spotkanie przyjaciół nastąpi wtedy, gdy spełnione będzie równanie $\frac{[164+(x-1)(-4)]\,x}{2}=(x+6)40$. Stąd $x=10$ lub $x=12$.
Oznacza to, że pan Cosinus dogoni pana Sinusa w dziesiątym dniu od chwili rozpoczęcia podróży. Będzie to miało miejsce w odległości $16\cdot40=640$ kilometrów od miejsca rozpoczęcia podróży.

818. Łatwo zauważyć, że liczby otrzymywanych co roku książek przez każdego z synów tworzą ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszemu $a_1=5$ i różnicy $r=1$. Niech n oznacza liczbę wyrazów ciągu, jaki tworzyły liczby otrzymywanych co roku książek przez najstarszego z synów. Ponieważ liczby oznaczające wiek synów tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3, więc pozostali bracia dostawali książki odpowiednio przez $n-3$, $n-6$, $n-9$ i $n-12$ lat.
Oznaczmy przez S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 łączną liczbę książek otrzymywanych przez synów, od najstarszego do najmnłodszego.
Wtedy: $S_1=\frac{[10+(n-1)\cdot1]\,n}{2}$, $S_2=\frac{[10+(n-4)\cdot1](n-3)}{2}$

$S_3\frac{[10+(n-7)\cdot 1](n-6)}{2}$, $S_4=\frac{[10+(n-10)\cdot 1](n-9)}{2}$,

$S_5=\frac{[10+(n-13)\cdot 1](n-12)}{2}$.

Z treści zadania wynika, że $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=325$, czyli

$$\frac{(n+9)n}{2}+\frac{(n+6)(n-3)}{2}+\frac{(n+3)(n-6)}{2}+\frac{n(n-9)}{2}+\frac{(n-3)(n-12)}{2}=325.$$

Rozwiązując powyższe równanie w zbiorze liczb naturalnych otrzymujemy $n=13$. Wiemy więc, że pierwszy syn dostawał książki przez 13 lat począwszy od piątego roku życia. Musiał więc mieć 17 lat. Oznacza to, że synowie pozostali mieli odpowiednio 14, 11, 8 i 5 lat.

819. Łatwo zauważyć, że ciąg (12, 13) spełnia warunki zadania.
Niech ciąg $(n, n+1, n+2, \dots, n+k)$, gdzie $n, k\in N$ i $k>1$ będzie ciągiem spełniającym warunki zadania.
Ponieważ powyższy ciąg jest $k+1$ wyrazowym ciągiem arytmetycznym o wyrazie pierwszym n i wyrazie ostatnim $n+k$, więc suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{[n+(n+k)](k+1)}{2}$, czyli $\frac{(2n+k)(k+1)}{2}$.
Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy
$\frac{(2n+k)(k+1)}{2}=25$ i $n, k\in N$, i $k>1$, czyli gdy $(2n+k)(k+1)=50$ i $n, k\in N$, i $k>1$,
Rozwiązując powyższe równanie w zbiorze liczb naturalnych otrzymujemy $k=4$ i $n=3$. Wobec tego szukanymi ciągami są ciągi: (12, 13) oraz (3, 4, 5, 6, 7).

820. Wiadomo, że $S_{m+n}=\frac{[2a_1+(m+n-1)r](m+n)}{2}$.
Wystarczy więc wykazać, że $2a_1+(m+n-1)r=0$.
Z założenia $S_m=S_n$ otrzymujemy $[2a_1+(m-1)r]m=[2a_1+(n-1)r]n$. Stąd, po łatwych rachunkach $2a_1(m-n)+(m-n)(m+n)r-(m-n)r=0$. Ponieważ $m\neq n$, więc dzieląc ostatnią równość obustronnie przez $m-n$ mamy
$2a_1+(m+n)r-r=0$, czyli $2a_1+(m+n-1)r=0$.

821. Oznaczmy przez r różnicę ciągu (a_n). Należy wykazać, że $\frac{a_1+(m-1)r}{a_1+(n-1)r}=\frac{2m-1}{2n-1}$.
Stąd, po przekształceniach otrzymujemy do udowodnienia $(n-m)(2a_1-r)=0$.
Z założenia $\frac{[2a_1+(m-1)r]m}{[2a_1+(n-1)r]n}=\frac{m^2}{n^2}$.
Stąd po łatwych rachunkach $(n-m)(2a_1-r)=0$.

822. Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego (a_n).
Mamy: $a_1+(n-1)r=\frac{1}{m}$ i $a_1+(m-1)r=\frac{1}{n}$. Rozwiązując ten układ ze względu na a_1 i r przy założeniu $m\neq n$ otrzymujemy $a_1=\frac{1}{mn}$ i $r=\frac{1}{mn}$.

Stąd $S_{mn}=\frac{1}{2}mn[2a_1+(mn-1)r]=\frac{1}{2}mn\left[\frac{2}{mn}+(mn-1)\frac{1}{mn}\right]$.
Po wykonaniu działań otrzymujemy $S_{mn}=\frac{1+mn}{2}$.

823. Niech a_1 i r oznaczają odpowiednio wyraz pierwszy i różnicę ciągu arytmetycznego.
Ponieważ $S_n=n^2p$ i $S_k=k^2p$, więc $\frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2}=n^2p$
i $\frac{[2a_1+(k-1)r]k}{2}=k^2p$, czyli $2a_1+(n-1)r=2np$ i $2a_1+(k-1)r=2kp$.
Dzieląc ostatnie równości stronami otrzymujemy $\frac{2a_1+(n-1)r}{2a_1+(k-1)r}=\frac{n}{k}$,
zatem $2a_1(k-n)=r(k-n)$. Stąd i z założenia $n\neq k$, wynika, że: $r=2a$.
Wobec tego $S_p=\frac{[2a_1+(p-1)r]p}{2}=\frac{[2a_1+(p-1)2a_1]p}{2}=a_1p^2$.
Ale ponieważ $S_n=n^2p$, to $S_1=p$. Natomiast z definicji symbolu S_n wiadomo, że $S_1=a_1$, zatem $a_1=p$.
Otrzymujemy więc $S_p=p^3$.

824. Niech S oznacza szukaną sumę. Łatwo zauważyć, że liczby należące do n-tej grupy tworzą n wyrazowy ciąg arytmetyczny o różnicy 1. Aby obliczyć S musimy ustalić pierwszy wyraz interesującej nas grupy. Ponieważ do grup poprzedzających grupę n-tą należy $1+2+3+\dots+(n-1)$ początkowych liczb naturalnych, a ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wynika, że
$1+2+\dots+(n-1)=\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, więc pierwszym wyrazem tej grupy jest liczba $\frac{n(n-1)}{2}+1=\frac{n^2-n+2}{2}$.
Wobec tego $S=\frac{(n^2-n+2+n-1)n}{2}=\frac{(n^2+1)n}{2}$.

825. Oznaczając przez r różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) i korzystając z wzoru $S_n=\frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2}$ mamy:

$$3(S_{2n}-S_n)=3\left\{\frac{[2a_1+(2n-1)r]2n}{2}-\frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2}\right\}=$$
$$=3\frac{(2a_1+2nr-r)2n-(2a_1+nr-r)n}{2}=\frac{(2a_1+3nr-r)3n}{2}=$$
$$=\frac{[2a_1+(3n-1)r]3n}{2}=S_{3n}.$$

826. $S_n=20$. Wskazówka: Wykorzystaj zadanie 825.

827. Jeśli równanie $x^4+px^2+q=0$ ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste, to równanie $t^2+pt+q=0$, gdzie $t=x^2$ musi mieć dwa różne rozwiązania rzeczywiste dodatnie t_1 i t_2. Bez ograniczenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że $t_2<t_1$.

Oznacza to, że rozwiązaniami równania $x^4+px^2+q=0$ muszą być liczby $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $-\sqrt{t_2}$, $\sqrt{t_2}$, a liczby t_1 i t_2 muszą zgodnie ze wzorami Viete'a spełniać warunki:

$t_1+t_2=-p$ i $t_1\,t_2=q$. (1)

Z treści zadania wiadomo ponadto, że rozwiązania równania $x^4+px^2+q=0$, czyli liczby $-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}$ tworzą ciąg arytmetyczny. Ze względu na nierówość $t_2<t_1$ oraz fakt, że ciąg arytmetyczny o różnych wyrazach jest monotoniczny, jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $-\sqrt{t_2}$, $\sqrt{t_2}$ ustawimy w kolejności $-\sqrt{t_1}$, $-\sqrt{t_2}$, $\sqrt{t_2}$, $\sqrt{t_1}$ lub w kolejności odwrotnej. W obu przypadkach prawdziwa jest równość $-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}=\sqrt{t_2}+\sqrt{t_2}$, czyli równość $\sqrt{t_1}=3\sqrt{t_2}$,

skąd $t_1=9t_2$. (2)

Z (1) i (2) otrzymujemy $10t_2=-p$ i $9t_2^2=q$, czyli $t_2=\frac{-p}{10}$ i $t_2^2=\frac{q}{9}$

Zatem $\frac{p^2}{100}=\frac{q}{9}$, czyli $9p^2=100q$.

828. $k=\frac{-6}{19}$ lub $k=6$. Wskazówka: Wykorzystaj zadanie 827.

829. Oznaczmy przez (a_n) ciąg pierwszy, przez (b_n) ciąg drugi, przez r_1 i r_2 odpowiednio różnice tych ciągów. Z treści zadania wynika, że $a_1=17$, $r_1=4$, $b_1=16$ i $r_2=5$. Wobec tego zgodnie ze wzorem na dowolny wyraz ciągu arytmetycznego mamy:

że $a_k=17+(k-1)4=4k+13$ i $b_l=16+(l-1)5=5l+11$, gdzie $k, l \in N$. Oznacza to,

że $a_k=b_l \Leftrightarrow (4k+13=5l+11$ i $k, l\in N) \Leftrightarrow (k=l+\frac{l-2}{4}$ i $k, l \in N) \Leftrightarrow (k=l+\frac{l-2}{4}$ i

$\frac{l-2}{4}\in N\cup\{0\})$.

Pierwszą setkę liczb naturalnych l, spełniających ostatnią koniunkcję, tworzą liczby $2, 6, 10, \ldots, 398$. Odpowiadającymi takim numerom wyrazami ciągu (b_n), obliczonymi z pomocą równości $b_l=5l+11$ i będącymi także wyrazami ciągu (a_n) są: $b_2=21$, $b_6=41$, $b_{10}=61$, ..., $b_{398}=2001$. Ponieważ liczby te tworzą 100-wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym 21 i wyrazie ostatnim 2001, więc na podstawie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego stwierdzamy, że

suma tych liczb jest równa $\frac{(21+2001)\,100}{2}=101\ 100$.

830. Zauważmy, że w n-tym wierszu podanej tablicy znajdują się liczby: $n, n+1, n+2, \ldots, n+(2n-2)$. Liczby te tworzą $2n-1$-wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym n i wyrazie ostatnim $n+(2n-2)=3n-2$. Wykorzystując wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego stwierdzamy, że

$$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(3n-2)=\frac{[n+(3n-2)](2n-1)}{2}=(2n-1)^2.$$

831. Nietrudno zauważyć, że liczby poszczególnych wierszy tablicy tworzą ciągi arytmetyczne. Niech $S_1, S_2, \ldots, S_n$ oznaczają sumy tych ciągów. Mamy więc:

$S_1=\frac{n(n+1)}{2}$, $S_2=\frac{n(n+3)}{2}$, ..., $S_n=\frac{n(3n-1)}{2}$. Wobec tego:

$$S_1+S_2+\ldots+S_n=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+3)}{2}+\ldots+\frac{n(3n-1)}{2}=\frac{n}{2}[(n+1)+(n+3)+\ldots+$$

$$+(3n-1)]=\frac{n}{2}\cdot\frac{n(n+1+3n-1)}{2}=\frac{n}{2}\cdot 2n^2=n^3.$$

832. Oznaczmy przez $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ sumy liczb w poszczególnych wierszach tablicy. Mamy: $S_1=1+2+\ldots+n$, $S_2=2(1+2+\ldots+n)$, $S_3=3(1+2+\ldots+n)$, ..., $S_n=n(1+2+\ldots+n)$. Zatem $S_1+S_2+\ldots+S_n=(1+2+\ldots+n)^2$.

Ale $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Wobec tego $S_1+S_2+\ldots+S_n=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Stąd oraz z treści zadania wynika równanie $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=36\ 100$.

Jedynym naturalnym rozwiązaniem tego równania jest $n=19$.

833. Tak. **834.** Nie.

835. Ciąg $(\sqrt{13}+2, x, \sqrt{13}-2)$ będzie ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{x}{\sqrt{13}+2}=\frac{\sqrt{13}-2}{x}$, czyli gdy $x^2=9$. Stąd $x=3$ lub $x=-3$.

836. Jeśli przez x, y oznaczymy odpowiednio pierwszy i drugi z szukanych składników, to składnikiem trzecim będzie $x+120$. Z treści zadania wynika, że $x+y+x+120=195$ i ciąg $(x, y, x+120)$ jest ciągiem geometrycznym. Zatem

$2x+y=75$ i $\frac{y}{x}=\frac{x+120}{y}$, czyli

$y=75-2x$ i $y^2=x(x+120)$. Stąd $x=15$ i $y=45$ lub $x=125$ i $y=-175$. W przypadku pierwszym otrzymujemy składniki: 15, 45, 135, a w przypadku drugim składniki: 125, -175 i 245. Łatwo sprawdzić, że obie trójki spełniają warunki zadania.

837. Liczby a, b, c są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, jeżeli $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$,

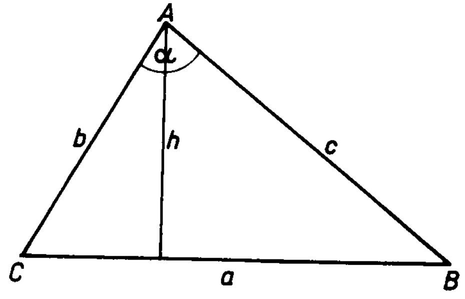
czyli gdy $b^2=ac$. Wobec tego $a^2+b^2+c^2=a^2+ac+c^2=$ $(a+c)^2-ac=(a+c)^2-b^2=(a+b+c)(a+c-b)$. Stąd i z faktu, że $a, b, c\in C-\{0\}$ wynika prawdziwość podanego twierdzenia.

838. Niech a, b, c oznaczają długości boków interesującego nas trójkąta, a h_a, h_b, h_c długości odpowiadających tym bokom wysokości. Przy tych oznaczeniach, na podstawie znanego wzoru na pole trójkąta, mamy $\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b$ i $\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$, czyli

$\frac{h_b}{h_a}=\frac{a}{b}$ i $\frac{h_c}{h_b}=\frac{b}{c}$. Ponieważ ciąg (a, b, c) jest ciągiem geometrycznym, więc $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

Wynika stąd, że $\frac{h_b}{h_a}=\frac{h_c}{h_b}$ czyli ciąg (h_a, h_b, h_c) jest ciągiem geometrycznym.

839. Przyjmijmy oznaczenia z rys. 49 i oznaczmy jeszcze przez S pole trójkąta ABC.



Rys. 49.

Ponieważ ciąg (a, b, c, h) jest ciągiem geometrycznym, a liczby a, b, c, h są dodatnie, więc $\frac{b}{a}=\frac{h}{c}$, czyli $ah=bc$. Ale $ah=2S$. Zatem $S=\frac{1}{2}bc$. Wiadomo, że $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

Łącząc ostatnie dwie równości stwierdzamy, że $\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}bc$.

Stąd, wobec faktu, że $b>0$ i $c>0$ otrzymujemy $\sin\alpha=1$. Ponieważ $\sin\alpha=1$ i $0^0<\alpha<180^0$, więc $\alpha=90^0$.

840. Z oczywistej nierówności $(\sqrt{a^n}-\sqrt{c^n})^2>0$ po łatwych przekształceniach otrzymujemy $a^n+c^n>2\sqrt{(ac)^n}$. Stąd i z faktu, że $ac=b^2$ (ciąg (a, b, c) jest geometryczny) uzyskujemy żądaną nierówność.

841. Grubość wyjściowa razem z grubościami po kolejnych złożeniach tworzą 51-wyrazowy ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1=\frac{1}{16}$ i iloraz $q_1=2$. Interesująca nas grubość końcowa jest ostatnim wyrazem tego ciągu. Zatem $a_{51}=\frac{1}{16}2^{50}=2^{46}$ [mm].

Uwaga: Można sprawdzić, że 2^{46}mm $=64$ mln km. Oznacza to, że końcowa grubość bibułki jest ponad 160 razy większa niż odległość Ziemi do Księżyca.

842. Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n). Z treści zadania i wzoru $a_n=a_1q^{n-1}$ wynika, że $b_n=5a_{n+1}-2a_n=5a_1q^n-2a_1q^{n-1}=a_1q^{n-1}(5q-2)=$ $=a_1(5q-2)q^{n-1}$. Oznacza to, że ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazie pierwszym $a_1(5q-2)$ i ilorazie q.

843. 6 lub -6.

844. Należy obliczyć wyraz pierwszy a_1 i iloraz q szukanego ciągu geometrycznego. Z treści zadania oraz wzoru $a_n=a_1q^{n-1}$ wynika układ równań: $a_1+a_1q^2+a_1q^4=21$ i $a_1q^2-a_1=3$.
Stąd $a_1=3$ i $q=\sqrt{2}$ lub $a_1=3$ i $q=-\sqrt{2}$, lub $a_1=1$ i $q=2$, lub $a_1=1$ i $q=-2$.

845. Niech q oznacza szukany iloraz, a a_1 pierwszy wyraz interesującego nas ciągu geometrycznego. Z treści zadania i wzoru $a_n=a_1q^{n-1}$ wynika układ równań:
$a_1+a_1q^2=15$ i $a_1^2+a_1^2q^4=153$. Stąd $q=2$ lub $q=-2$, lub $q=\frac{1}{2}$, lub $q=-\frac{1}{2}$.

846. Oznaczmy przez q iloraz ciągu geometrycznego $(3, x, y, 375)$. Stąd $x=3q$, $y=3q^2$ i $375=3q^3$. Jedynym rozwiązaniem ostatniego równania jest $q=5$. Wobec tego $x=15$ i $y=75$. Łatwo sprawdzić, że otrzymana para liczb spełnia warunki zadania.

847. 16, 24 i 36.

848. Ponieważ ciąg (x, y, z) jest ciągiem geometrycznym, to $y=xq$ i $z=xq^2$, gdzie q jest ilorazem tego ciągu. Wobec tego:
$(x+y+z)(x-y+z)=(x+xq+xq^2)(x-xq+xq^2)=$
$=x^2-x^2q+x^2q^2+x^2q-x^2q^2+x^2q^3+x^2q^2-x^2q^3+x^2q^4=x^2+x^2q^2+x^2q^4$,
oraz $x^2+y^2+z^2=x^2+x^2q^2+x^2q^4$.

849. Niech L oznacza lewą, a P prawą stronę dowodzonej równości, oraz q iloraz ciągu geometrycznego (a, b, c, d). Z definicji ciągu geometrycznego wynika, że $b=aq$ i $c=aq^2$, $d=aq^3$.
Wobec tego:
$L=(a-aq^2)^2+(aq-aq^2)^2+(aq-aq^3)^2=a^2-2a^2q^2+a^2q^4+a^2q^2-2a^2q^3+a^2q^4+$ $+a^2q^2-2a^2q^4+a^2q^6=a^2-2a^2q^3+a^2q^6$ oraz $P=(a-aq^3)^2=a^2-2a^2q^3+a^2q^6$.
Zatem $L=P$.

850. Niech L oznacza lewą, a P prawą stronę dowodzonej równości, oraz q iloraz ciągu geometrycznego (a, b, c, d). Z definicji ciągu geometrycznego wynika, że $b=aq$ i $c=aq^2$ i $d=aq^3$.
Wobec tego:
$L=(a^2+a^2q^2+a^2q^4)(a^2q^2+a^2q^4+a^2q^6)=a^2(1+q^2+q^4)a^2q^2(1+q^2+q^4)=$
$=a^4q^2(1+q^2+q^4)^2$, oraz $P=(a^2q+a^2q^3+a^2q^5)^2=[a^2q(1+q^2+q^4)]^2=$
$=a^4q^2(1+q^2+q^4)^2$. Tak więc $L=P$.

851. Niech x oznacza największą z szukanych liczb, a q iloraz ciągu geometrycznego jaki tworzą te liczby. Ponieważ ciąg jest malejący, więc $0<q<1$. Pozostałe liczby możemy zapisać w postaci xq i xq^2. Z treści zadania wynika układ:
$x+xq+xq^2=7$ i $x=xq+xq^2+\frac{1}{3}(xq+xq^2)$. Rozwiązując ten układ otrzymujemy:
$q=\frac{1}{2}$ i $x=4$. Wobec tego szukanymi liczbami są: 4, 2, 1.

852. Ponieważ szukane liczby tworzą ciąg geometryczny, to można je zapisać w postaci: a, aq, aq^2, aq^3. Z treści zadania wynika układ równań: $a+aq^3=-21$ i $aq+aq^2=6$.
Rozwiązując powyższy układ mamy: $a=3$ i $q=-2$ lub $a=-24$ i $q=-\frac{1}{2}$. W przypadku pierwszym otrzymujemy liczby 3, -6, 12, -24, a w przypadku drugim liczby -24, 12, -6, 3. Łatwo sprawdzić, że obie czwórki liczb spełniają warunki zadania.

853. Ponieważ szukane liczby tworzą ciąg geometryczny, więc możemy zapisać je w postaci: x, xq, xq^2 i xq^3. Z treści zadania wynika układ równań: $x-xq=36$ i $xq^2-xq^3=4$. Stąd $x=54$ i $q=\frac{1}{3}$ lub $x=27$ i $q=-\frac{1}{3}$. Szukanymi liczbami są więc: 54, 18, 6, 2 lub 27, -9, 3, -1.

854. Każdy ciąg geometryczny o ilorazie równym $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ lub $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

855. Oznaczmy przez q iloraz ciągu geometrycznego (x_1, x_2, x_3, x_4). Wtedy $x_2=x_1q$, $x_3=x_1q^2$, $x_4=x_1q^3$. Wykorzystując wzory Viete'a mamy: $x_1+x_1q=3$ i $x_1^2q=A$ i $x_1q^2+x_1q^3=12$ i $x_1^2q^5=B$.
Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy: $A=2$ i $B=32$.

856. Wskazówka: Postępuj podobnie jak w zadaniu 786.

857. Niech k będzie liczbą naturalną i $1<k<n$. Mamy wykazać, że $a_k=a_{k+1}-a_{k-1}$.
Z pomocą definicji ciągu geometrycznego otrzymujemy równości:

$$a_{k+1}-a_{k-1}=a_kq-\frac{a_k}{q}=a_k\left(q-\frac{1}{q}\right).$$

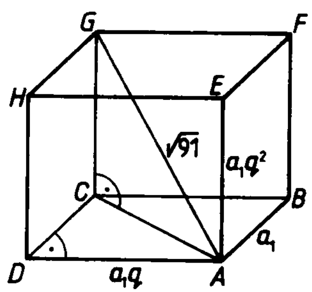
Podstawiając $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ mamy $a_{k+1}-a_{k-1}=a_k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)=a_k$.

858. Ponieważ ciąg (a, b, c, d) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 3, więc $b=3a$ i $c=9a$ i $d=27a$. Zatem dane równanie możemy zapisać w postaci: $a(x^3+3x^2+9x+27)=0$. Ale $a\neq 0$, więc $x^3+3x^2+9x+27=0$, czyli $(x+3)(x^2+9)=0$. Stąd $x=-3$.

859. Przyjmijmy oznaczenia z rys. 50, gdzie $q(q>0)$ jest ilorazem ciągu geometrycznego jaki tworzą długości krawędzi AB, AD i AE. Oznaczmy jeszcze przez S pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$. Ponieważ objętość prostopadłościanu jest równa 27, więc

$a_1a_1qa_1q^2=27$, skąd $a_1q=3$. (1)

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ADC wynika, że $a_1^2+a_1^2q^2=AC^2$.



Rys. 50

Z tego samego twierdzenia zastosowanego do trójkąta ACG wynika natomiast, że $AC^2+a_1^2q^4=91$. Wobec tego

$a_1^2+a_1^2q^2+a_1^2q^4=91$ (2)

Rozwiązując układ równań (1) i (2) i wykorzystując nierówność $q>0$ stwierdzamy, że $q=3$ i $a_1=1$ lub $q=\frac{1}{3}$ i $a_1=9$.

W obu przypadkach krawędzie prostopadłościanu mają długości 1, 3 i 9.
Zatem $S=2\cdot 1\cdot 3+2\cdot 1\cdot 9+2\cdot 3\cdot 9=78$.

860. Jeśli długości boków trójkąta tworzą ciąg geometryczny, to możemy je zapisać w postaci: x, xq, xq^2, gdzie x i q są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Bez ograniczenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że $x<xq<xq^2$. Ponieważ trójkąt jest prostokątny, więc zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa mamy $x^2q^4=x^2q^2+x^2$. Stąd i z faktu, że $x>0$ wynika, iż $q^4-q^2-1=0$.
Jedynym rzeczywistym dodatnim rozwiązaniem równania $q^4-q^2-1=0$ jest $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Widać, że otrzymane q jest liczbą niewymierną, przy tym także q^2 jest liczbą niewymierną. Wobec tego jeżeli x jest liczbą wymierną, to niewymierne są liczby xq i xq^2. Jeśli x jest niewymierne, to gdyby wymierne okazało się xq, niewymierne będzie xq^2. W takim razie podane twierdzenie jest prawdziwe.

861. Niech a_1, q oznaczają odpowiednio wyraz pierwszy i iloraz szukanego ciągu. Z treści zadania wynika, że $a_1+a_1q+a_1q^2=91$ i a_1, $q\in N$, czyli $a_1(1+q+q^2)=7\cdot 13$ i a_1, $q\in N$. Otrzymany układ będzie spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy ($a_1=7$ i $1+q+q^2=13$ i $q\in N$) lub ($a_1=13$ i $1+q+q^2=7$ i $q\in N$). Stąd $a_1=7$ i $q=3$ lub $a_1=13$ i $q=2$. Oznacza to, że istnieją dwa ciągi geometryczne, które mogą spełniać warunki zadania i są nimi ciągi: (7, 21, 63) oraz (13, 26, 52). Łatwo sprawdzić, że ciągi te mają żądane własności.

862. Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n).
Ponieważ $a_n=a_1q^{n-1}$, więc $a_1q^{n+m-1}=A$ i $a_1q^{n-m-1}=B$. Mnożąc ostatnie dwie równości stronami otrzymujemy $a_1^2q^{2n-2}=AB$.
Zatem, $(a_1q^{n-1})^2=AB$, czyli $a_n^2=AB$. Z treści zadania wynika, że $AB>0$.
Wobec tego $a_n=\sqrt{AB}$.

863. Jeśli liczby rzeczywiste a, b, c są odpowiednio k-tym, l-tym i m-tym wyrazem ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym a_1 i ilorazie q, to prawdziwe są równości: $a_1q^{k-1}=a$ i $a_1q^{l-1}=b$ i $a_1q^{m-1}=c$. Stąd i z założenia, że liczby a, b, c są różne od zera wynika: $\frac{a}{b}=q^{k-l}$ i $\frac{b}{c}=q^{l-m}$. Podnosząc obie strony pierwszej równości do potęgi $l-m$, a obie strony równości drugiej do potęgi $k-l$ otrzymujemy

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{l-m}=q^{(k-l)(l-m)} \text{ i } \left(\frac{b}{c}\right)^{k-l}=q^{(l-m)(k-l)}.$$

Wobec tego $\left(\frac{a}{b}\right)^{l-m}=\left(\frac{b}{c}\right)^{k-l}$, czyli $\frac{a^{l-m}}{b^{l-m}}=\frac{b^{k-l}}{c^{k-l}}$, skąd $a^{l-m}\cdot c^{k-l}=b^{k-m}$.

864. Przypuśćmy, że istnieją takie liczby q, m, n, że $q\neq 0$ i $m, n\in N$ i $m>n>1$ i $12=11q^n$ i $13=11q^m$. Stąd otrzymujemy $\frac{12^m}{13^n}=11^{m-n}$.

Ostatnia równość jest sprzeczna, gdyż $11^{m-n}\in C$, a $\frac{12^m}{13^n}\notin C$.

865. Z treści zadania wynika, że kwoty jakie zapłacono za poszczególne metry głębokości tworzą ciąg geometryczny o wyrazie pierwszym p i ilorazie 2, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $511p$. Stąd $511p=\frac{p(2^n-1)}{2-1}$.

Ponieważ $p>0$, więc powyższemu równaniu równoważne jest równanie $2^n=512$. Stąd $n=9$. Oznacza to, że wykopana studnia miała głębokość 9m.

866. Oznaczając przez q iloraz ciągu geometrycznego (a_n) oraz wykorzystując wzór $a_n=a_1q^{n-1}$ i podane w zadaniu równości otrzymujemy: $a_1+a_1q^4=17$ i $a_1q+a_1q^5=-34$. Stąd $a_1=1$ i $q=-2$.
Korzystając ze wzoru na sumę n wyrazów ciągu geometrycznego oraz dane, otrzymujemy równanie $\frac{(-2)^n-1}{-3}=43$, skąd $n=7$.

867. Jeśli oznaczymy przez q iloraz ciągu (a_n), to zgodnie z informacjami podanymi w treści zadania i wzorem na n-ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymamy: $a_1q+a_1q^5=34$
i $a_1q^2+a_1q^6=68$. Stąd $a_1=1$ i $q=2$. Aby rozwiązać zadanie należy ustalić, dla jakich naturalnych n prawdziwa jest nierówność $S_n\geqslant 63$. Ponieważ $q\neq 1$, więc w naszym przypadku $S_n=2^n-1$. Wobec tego $2^n-1\geqslant 63$ i $n\in N$, czyli $2^n\geqslant 2^6$ i $n\in N$, skąd $n\geqslant 6$
i $n\in N$. Oznacza to, że należy zsumować co najmniej 6 początkowych wyrazów ciągu (a_n).

868. Niech a_1 oznacza wyraz pierwszy, a q iloraz interesującego nas ciągu geometrycznego. Z treści zadania wynika, że $q\neq 1$. Gdyby $q=1$, to ciąg byłby ciągiem stałym i wtedy suma jego wyrazów byłaby dwa razy większa od sumy wyrazów o numerach nieparzystych. Widać ponadto, że wyrazy o numerach nieparzystych tworzą ciąg geometryczny o wyrazie pierwszym a_1 i ilorazie q^2, liczący $\frac{n}{2}$ wyrazów (n oznacza liczbę wyrazów ciągu (a_n)). Stąd i z treści zadania wynika równość:

$$\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=3\cdot\frac{a_1\left[(q^2)^{\frac{n}{2}}-1\right]}{q^2-1}.$$ Stąd $q=2$.

869. Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n), S_n — sumę wszystkich wyrazów tego ciągu, zaś S'_n sumę odwrotności tych wyrazów. Przy tych oznaczeniach mamy wykazać, że $\frac{S_n}{S'_n}=a_1a_n$.

$$\frac{S_n}{S'_n}=\frac{a^1+a^2+a^3+\ldots+a^n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=\frac{a_1+a_2q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a^1q}+\frac{1}{a^1q^n}+\ldots+\frac{1}{a_1q^{n-1}}}=$$

$$=\frac{a_1(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})}{\frac{1}{a_1}\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^{n-1}}\right)}=\frac{a_1^2(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})}{\frac{q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1}{q^{n-1}}}=a_1^2q^{n-1}=a_1a_1q^{n-1}=a_1a_n.$$

870. Wykorzystując wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymamy:
$a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n=a_1(a_1q)+(a_1q)(a_1q^2)+\ldots+(a_1q^{n-2})(a_1q^{n-1})=$
$=a_1^2q+a_1^2q^3+\ldots+a_1^2q^{2n-3}=a_1^2q(1+q^2+\ldots+q^{2n-4})$.
Ponieważ składniki sumy $1+q^2+\ldots+q^{2n-4}$ tworzą $n-1$ wyrazowy ciąg geometryczny o wyrazie pierwszym 1 i ilorazie q^2, oraz $q^2\neq 1$, więc zgodnie ze wzorem na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$1+q^2+\ldots+q^{2n-4}=\frac{q^{2n-2}-1}{q^2-1}.$$

Otrzymujemy więc równości: $a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n=$

$$=a_1^2q\frac{q^{2n-2}-1}{q^2-1}=\frac{q\left[(a_1q^{n-1})^2-a_1^2\right]}{q^2-1}=\frac{q(a_n^2-a_1^2)}{q^2-1}.$$

871. $S_1=n$, $S_2=\frac{1-2^n}{-1}2^n-1$, $S_3=\frac{1-3^n}{-2}=\frac{1}{2}(3^n-1)$.

$S_4=\frac{1-4^n}{-3}=\frac{1}{3}(4^n-1)$, ... $S_n=\frac{1-n^n}{1-n}=\frac{1}{n-1}(n^n-1)$.
Zatem: $S_1+S_2+2S_3+3S_4+\ldots+(n-1)S_n=n+2^n-1+3^n-1+4^n-1+\ldots+n^n-1=$
$=n-(n-1)+2^n+3^n+4^n+\ldots+n^n=1^n+2^n+3^n+4^n+\ldots+n^n$.

872. $a_n=\frac{3^n-1}{2}$.

873. $a_1+a_2+\ldots+a_n=2^{n+1}-n-2$.
Wskazówka: Wykaż, że $a_n=2^n-1$.

874. Niech S_{2n} oznacza sumę $2n$ początkowych wyrazów pierwszego ciągu geometrycznego, a S_n sumę n początkowych wyrazów drugiego ciągu geometrycznego. Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów dowolnego ciągu geometrycznego wynika, że jeśli $q=1$, to $S_{2n}=2na$ i $S_n=nb$. Stąd i z założenia $S_{2n}=S_n$ mamy $b=2a$.
Jeśli $q\neq 1$ i $q\neq -1$, to $S_{2n}=\frac{a(q^{2n}-1)}{q-1}$ i $S_n=\frac{b[(q^2)^n-1]}{q^2-1}=\frac{b(q^{2n}-1)}{q^2-1}$.
Ponieważ $S_{2n}=S_n$, więc $\frac{a(q^{2n}-1)}{q-1}=\frac{b(q^{2n}-1)}{q^2-1}$,
czyli $a(q+1)(q^{2n}-1)=b(q^{2n}-1)$. Stąd, wobec założenia $q\neq 1$ i $q\neq -1$ otrzymujemy $a(q+1)=b$, czyli $b=a+aq$.

875. Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n). Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wynika, że jeśli $q=1$, to
$S_n(S_{3n}-S_{2n})=na_1(3na_1-2na_1)=n^2a_1^2$ oraz $(S_{2n}-S_n)^2=(2na_1-na_1)^2=n^2a_1^2$.
Zatem podana równość jest prawdziwa.
Jeśli $q\neq 1$, to $S_n(S_{3n}-S_{2n})=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\left[\frac{a_1(1-q^{3n})}{1-q}-\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}\right]=$

$$=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\cdot\frac{a_1(1-q^{3n}-1+q^{2n})}{1-q}=\frac{a_1^2\left(1-q^n)q^{2n}(1-q^n)\right)}{(1-q)^2}=$$

$=\frac{a_1^2q^{2n}(1-q^n)^2}{(1-q)^2}$, oraz $(S_{2n}-S_n)^2=\left[\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}-\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\right]^2=$

$=\left[\frac{a_1(1-q^{2n}-1+q^n)}{1-q}\right]^2=\left[\frac{a_1q^n(1-q^n)}{1-q}\right]^2=\frac{a_1^2q^{2n}(1-q^n)^2}{(1-q)^2}$. Zatem podana równość jest prawdziwa.

876. $S_n=2$. Wskazówka: Wykorzystaj zadania 875.

877. Zauważmy, że: $\underbrace{111...1}_{2n} - \underbrace{222...2}_{n}=$

$=(10^{2n-1}+10^{2n-2}+...+10+1)-2(10^{n-1}+10^{n-2}+...+10+1)=$

$=\frac{1-10^{2n}}{1-10}-2\frac{1-10^n}{1-10}=\frac{10^{2n}-1-2\cdot 10^n+2}{9}=\left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2.$

Ponieważ $10^n-1=\underbrace{999...9}_{n}$, więc $\frac{10^n-1}{3}$ jest liczbą naturalną.

878. Wskazówka: Porównaj rozwiązanie zadania 877.

879. Zauważmy, że: $11=1+10=\frac{10^2-1}{9}$, $111=1+10+10^2=\frac{10^3-1}{9}$,..., $\underbrace{111...1}_{n}=$

$=1+10+...+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{9}$. Stąd $1+11+111+...+\underbrace{111...1}_{n}=$

$=1+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+...+\frac{10^n-1}{9}=\frac{1}{9}[9+10^2+10^3+...+10^n-(n-1)]=$

$=\frac{1}{9}(10+10^2+10^3+...+10^n-n)=\frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right).$

880. Oznaczmy przez S szukaną sumę. Widać, że S można zapisać w postaci:

$S=1+2+2^2+2^3+...+2^{98}+2^{99}+$
$+2+2^2+2^3+...+2^{98}+2^{99}+$
$+2^2+2^3+...+2^{98}+2^{99}+...+$
$+2^{98}+2^{99}+$
$+2^{99}.$

Zatem: $S=\frac{1(2^{100}-1)}{2-1}+\frac{2(2^{99}-1)}{2-1}+\frac{2^2(2^{98}-1)}{2-1}+...+\frac{2^{98}(2^2-1)}{2-1}+\frac{2^{99}(2-1)}{2-1}=$

$=(2^{100}-1)+(2^{100}-2)+(2^{100}-2^2)+...+(2^{100}-2^{98})+(2^{100}-2^{99})=$

$=100\cdot 2^{100}-(1+2+2^2+...+2^{99})=99\cdot 2^{100}+1.$

881. Zauważmy, że: $3+33+333+...+\underbrace{333...3}_{30}=$

$=\frac{10^1-1}{3}+\frac{10^2-1}{3}+\frac{10^3-1}{3}+...+\frac{10^{30}-1}{3}=\frac{1}{3}(10+10^2+10^3+...+10^{30}-30)=$

$=\frac{1}{3}\left(10\cdot\frac{10^{30}-1}{10-1}-30\right)=\frac{10^{31}-280}{27}$. Mamy pokazać, że $10^{29}<\frac{10^{31}-280}{27}<10^{30}$.

Czyli, że $0<73\cdot 10^{29}-280<243\cdot 10^{29}$.
Wystarczy więc pokazać, że $73\cdot 10^{29}-280<243\cdot 10^{29}$, co jest oczywiste, gdyż $170\cdot 10^{29}>-280$.

882. Wystarczy pokazać, że $\frac{c}{b}=\frac{2b-a}{c}$ czyli, że $c^2=2b^2-ab$.

Tak jest, gdyż jeżeli ciąg (ab, b^2, c^2) jest ciągiem arytmetycznym, to $b^2-ab=c^2-b^2$, czyli $c^2=2b^2-ab$.

883. $x=\frac{1}{4}$ i $y=\frac{5}{2}$ lub $x=4$ i $y=10$.

884. Rozwiązując podany układ stwierdzamy, że $x=m-3$ i $y=1$ i $z=m+1$.
a) Ciąg $(m-3, 1, m+1)$ będzie ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy $1-(m-3)=(m+1)-1$. Stąd $m=2$.
b) Ciąg $(m-3, 1, m+1)$ będzie ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{m-3}=\frac{m+1}{1}$. Stąd $m=1-\sqrt{5}$ lub $m=1+\sqrt{5}$.

885. Ponieważ ciąg (a, x, b) jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg (a, y, b) jest ciągiem geometrycznym i $a, b\in \boldsymbol{R}_+$, to $x-a=b-x$ i $\frac{y}{a}=\frac{b}{y}$, czyli $x=\frac{a+b}{2}$ i $y^2=ab$.

Ale $a, b\in \boldsymbol{R}_+$, więc $x>0$. Wystarczy więc udowodnić, że $y^2\leqslant x^2$. Tak jest, ponieważ: $y^2\leqslant x^2 \Leftrightarrow ab\leqslant\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\Leftrightarrow (a-b)^2\geqslant 0$, i ostatnia nierówność jest zawsze prawdziwa.

886. Niech r oznacza szukaną różnicę. Ze wzoru $a_n=a_1+(n-1)r$ i faktu, że $a_1=24$ wynika, iż $a_5=24+4r$ i $a_{11}=24+10r$. Ponieważ ciąg $(24, 24+4r, 24+10r)$ jest ciągiem geometrycznym, więc $\frac{24+4r}{24}=\frac{24+10r}{24+4r}$. Stąd $r=0$ lub $r=3$.

887. Niech a_1 i r oznaczają odpowiednio wyraz pierwszy i różnicę rozważanego ciągu arytmetycznego. Przy tych oznaczeniach wyrazem trzecim tego ciągu jest a_1+2r, a wyrazem trzynastym a_1+12r. Ponieważ ciąg (a_1, a_1+2r, a_1+12r) jest ciągiem geometrycznym, więc $\frac{a_1+2r}{a_1}=\frac{a_1+12r}{a_1+2r}$, czyli $r(r-2a_1)=0$.

Ponieważ piątym wyrazem rozważanego ciągu arytmetycznego jest 18, więc $a_1+4r=18$.
Rozwiązując układ równań $r(r-2a_1)=0$ i $a_1+4r=18$ stwierdzamy, że $r=0$ i $a_1=18$ lub $r=4$ i $a_1=2$. W przypadku pierwszym $a_n=18$, w przypadku drugim $a_n=2+(n-1)=4n-2$.

888. 10, 7, 4 lub 2, 7, 12.

889. 3, -6, 12.

890. $\frac{4}{9}, \frac{-20}{9}, \frac{100}{9}$ lub 4, 12, 36.

891. 7, 7, 7, lub 3, 6, 12.

892. 5, 10, 20, 40.

893. 2, 4, 8, 12 lub $\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}$.

894. Oznaczmy rozważne liczby: $x, x+r, x+2r$ gdzie $x\neq 0$ i $x+r\neq 0$ i $x+2r\neq 0$. Ponieważ ciąg $(x^2, (x+r)^2, (x+2r)^2)$ jest ciągiem geometrycznym, więc iloraz q tego ciągu jest równy $q=\frac{(x+r)^2}{x^2}=\left(1+\frac{r}{x}\right)^2$. Z definicji ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie $\frac{(x+r)^2}{x^2}=\frac{(x+2r)^2}{(x+r)^2}$, skąd $r=0$ lub $\left(\frac{r}{x}\right)^2+4\left(\frac{r}{x}\right)+2=0$. Stąd $q=1$ lub $\frac{r}{x}=-2\pm\sqrt{2}$ czyli $q=(-1\pm\sqrt{2})^2$.

895. Z treści zadania wynika, że $1\cdot x^2\cdot\ldots\cdot x^{2n-2}\cdot x^{2n}=64$ i $x\cdot x^3\cdot x^5\cdot\ldots\cdot x^{2n-3}, x^{2n-1}=32$, czyli $x^{0+2+4+\ldots+(2n-2)+2n}=64$ i $x^{1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1)}=32$. (1)
Ponieważ składniki sumy $0+2+4+\ldots+(2n-2)+2n$ tworzą $n+1$-wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym 0 i wyrazie ostatnim $2n$, a składniki sumy $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ tworzą n-wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym 1 i wyrazie ostatnim $2n-1$, więc mamy: $0+2+4+\ldots+2n=\frac{(0+2n)(n+1)}{2}=n^2+n$

i $1+3+\ldots+(2n-1)=\frac{[1+(2n-1)]}{2}=n^2$. (2)

Z (1) i (2) stwierdzamy, że $x^{n^2+n}=64$ i $x^{n^2}=32$. Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy: $n=5$ i $x=\sqrt[5]{2}$.

896. Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Wtedy $(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)^2=$
$=[a_1(a_1q)(a_1q^2)\cdot\ldots\cdot(a_1q^{n-1})]^2=[a_1^n(q^1q^2\cdot\ldots\cdot q^{n-1})]^2=$
$=[a_1^nq^{1+2+\ldots+(n-1)}]^2$.
Ponieważ składniki sumy $1+2+\ldots+(n-1)$ tworzą $n-1$ wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym 1 i wyrazie ostatnim $n-1$, więc

$$1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Otrzymujemy więc równości:

$$(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^2=\left[a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^2=a_1^{2n}q^{n(n-1)}.$$

Ponieważ $(a_1a_n)^n=(a_1a_1q^{n-1})^n=a_1^{2n}q^{n(n-1)}$, więc $(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^2=(a_1a_n)^n$.

897. Mnożąc obie strony równości $S_n=1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+na^{n-1}$ przez a otrzymujemy $aS_n=a+2a^2+3a^3+4a^4+\ldots+na^n$. Odejmując stronami od równości drugiej równości pierwszą stwierdzamy, że $aS_n-S_n=na^n-(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1})$. Łatwo zauważyć, że wyrażenie w nawiasie jest sumą n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym 1 i ilorazie a.
Jeżeli więc $a\neq 1$, to $S_n(a-1)=na^n-\frac{1(a^n-1)}{a-1}$, stąd $S_n=\frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2}$.
Jeżeli $a=1$, to równość $S_n=1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+na^{n-1}$ przybiera postać $S_n=1+2+3+4+\ldots+n$ i składniki sumy po prawej stronie równości tworzą ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym 1 i różnicy 1. Wobec tego $S_n=\frac{(n+1)n}{2}$.

898. Oznaczmy:

$$\begin{aligned}
a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n&=s_1\\
a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n&=s_2\\
a_3+a_4+\ldots+a_n&=s_3\\
a_4+\ldots+a_n&=s_4\\
&\ldots\ldots\\
a_{n-1}+a_n&=s_{n-1}\\
a_n&=s_n.
\end{aligned}$$

wtedy $S_n=s_1+s_2+s_3+s_4+\ldots+s_{n-1}+s_n$.
Jeśli $q\neq 1$, to

$$s_1=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1},\ s_2=\frac{a_2(q^{n-1}-1)}{q-1}=\frac{a_1q(q^{n-1}-1)}{q-1},\ s_3=\frac{a_3(q^{n-2}-1)}{q-1}=\frac{a_1q^2(q^{n-2}-1)}{q-1}$$

$$s_4=\frac{a_4(q^{n-3}-1)}{q-1}=\frac{a_1q^3(q^{n-3}-1)}{q-1},\ \ldots,\ s_{n-1}=\frac{a_{n-1}(q^2-1)}{q-1}=\frac{a_1q^{n-2}(q-1)}{q-1},$$

$$s_n=a_n=a_1q^{n-1}=\frac{a_1q^{n-1}(q-1)}{q-1}.$$

Wobec tego:

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}+\frac{a_1q(q^{n-1}-1)}{q-1}+\frac{a_1q^2(q^{n-2}-1)}{q-1}+\frac{a_1q^3(q^{n-3}-1)}{q-1}+\ldots+$$

$$+\frac{a_1q^{n-2}(q^2-1)}{q-1}+\frac{a_1q^{n-1}(q-1)}{q-1}=$$

$$=\frac{a_1}{q-1}(q^n-1+q^n-q+q^n-q^2+q^n-q^3+\ldots+q^n-q^{n-2}+q^n-q^{n-1})=$$

$$=\frac{a_1}{q-1}[nq^n-(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1})]. \quad (1)$$

Ponieważ składniki sumy $1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}$ tworzą n-wyrazowy ciąg geometryczny o wyrazie i ilorazie pierwszym 1 i ilorazie q, więc przy założeniu $q\neq 1$ mamy:

$$1+q+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}. \quad (2)$$

Z (1) i (2) otrzymujemy $S_n=\frac{a_1}{q-1}\left(nq^n-\frac{q^n-1}{q-1}\right)$, gdzie $q\neq 1$.

Jeśli $q=1$, to $a_1=a_2=\ldots=a_n$. Zatem
$S_n=a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n=a_1+2a_1+3a_1+\ldots+na_1=a_1(1+2+3+\ldots+n)$.
Ponieważ składniki sumy i $1+2+3+\ldots+n$ tworzą n-wyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym 1 i różnicy 1, więc $1+2+3+\ldots+n=\frac{(n+1)n}{2}$. Oznacza to, że w przypadku, gdy $q=1$ interesująca nas suma S_n wyraża się wzorem
$S_n=\frac{a_1n(n+1)}{2}$.

899. Niech ciąg (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q i ciągiem arytmetycznym. Wtedy dla dowolnego n naturalnego $a_{n+1}+a_{n+3}=2a_{n+2}$, czyli $a_1q^n+a_1q^{n+2}=$ $=2a_1q^{n+1}$.
Stąd $1+q^2=2q$, czyli $q=1$. Ciągami spełniającymi warunki zadania są zatem wszystkie ciągi stałe oprócz ciągu (0, 0, ... , 0).

900. Niech $a_1=b_1=a$ i $a_2=b_2=a+r$, gdzie $a>0$ i $r>0$. Wtedy iloraz q ciągu geometrycznego (b_n) jest równy $q=\frac{a+r}{a}=1+\frac{r}{a}$. Mamy wykazać, że dla $n>1$ prawdziwa jest nierówność $a+(n-1)r<a\left(1+\frac{r}{a}\right)^{n-1}$, czyli nierówność

$a^2\left(1+\frac{r}{a}\right)^n>a^2+anr+nr^2-r^2$. Z zadania 734 wiadomo, że prawdziwa jest nierówność $\left(1+\frac{r}{a}\right)^n\geqslant 1+\frac{nr}{a}+\frac{1}{2}n(n-1)\cdot\frac{r^2}{a^2}$, czyli nierówność

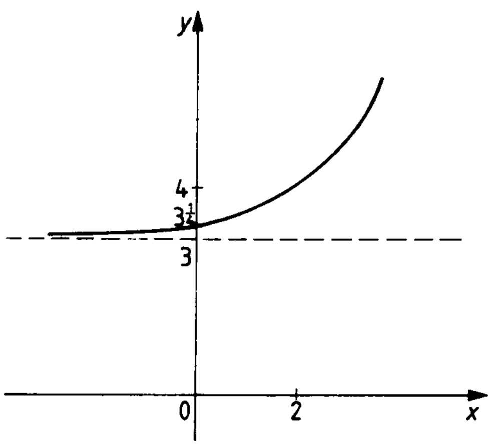
$a^2\left(1+\frac{r}{a}\right)^n\geqslant a^2+anr+\frac{1}{2}n(n-1)r^2$.

Wystarczy więc udowodnić, że $\frac{1}{2}n(n-1)r^2>nr^2-r^2$, czyli że $\frac{1}{2}n(n-1)>n-1$.

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż $n>1$.

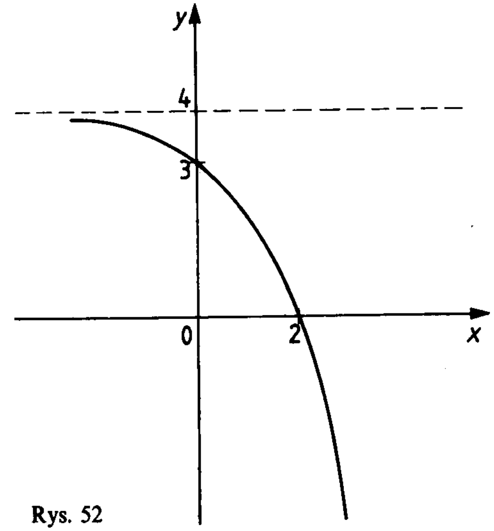
§ 9. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna. Równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne

901. Rys. 51.



Rys. 51

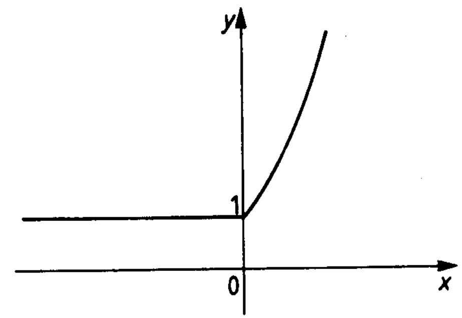
902. Rys. 52.



Rys. 52

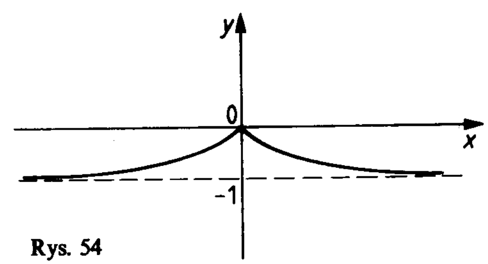
903. Jeżeli $x\geqslant 0$, to $y=2^x\cdot 2^x=4^x$. Jeżeli $x<0$, to $y=2^x\cdot 2^{-x}=2^0=1$.
Zatem:

$$f\colon y=\begin{cases}4^x & \text{dla } x\geqslant 0\\ 1 & \text{dla } x<0\end{cases}\text{ (rys. 53).}$$



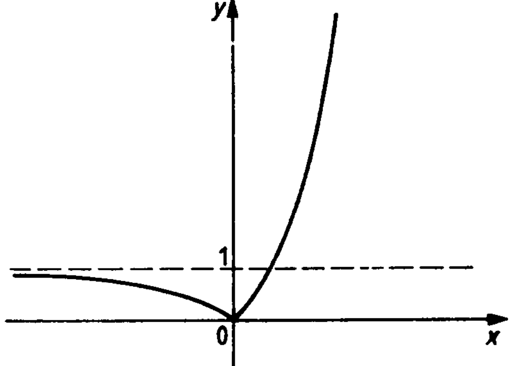
Rys. 53

904. $$f\colon y=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x-1 & \text{dla } x\geqslant 0\\ 2^x-1 & \text{dla } x<0\end{cases}\text{ (rys. 54).}$$



Rys. 54

905. Rys. 55.



Rys. 55

906. Jeżeli $4^x+4^{-x}=23$, to $(2^x)^2+(-2^{-x})^2=23$, czyli $(2^x)^2+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+(2^{-x})^2=25$, zatem $(2^x+2^{-x})^2=25$. Stąd i z faktu, że $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} 2^x+2^{-x}>0$ otrzymujemy równość $2^x+2^{-x}=5$.

907. Ponieważ $(4^{x_1}, 4^{x_2}, 4^{x_3}, ...)$ jest ciągiem geometrycznym, więc $(x_1, x_2, x_3, ...)$ jest ciągiem arytmetycznym. Oznaczmy różnicę ciągu arytmetycznego $(x_1, x_2, x_3, ...)$ przez r.
Stąd i z faktu, że $x_5=10$ otrzymujemy $10=x_1+4r$. (1)
Stosując wzór na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i wykorzystując równość $x_1+x_2+ ... +x_{12}=174$, mamy $\dfrac{(x_1+x_1+11r)12}{2}=174.$ (2)
Rozwiązując układ równań (1) i (2) otrzymujemy: $x_1=-2$ i $r=3$.
Stąd $x_2=1$, a więc $4^{x_2}=4^1=4$.

908. 32.

909. $-\dfrac{1}{9}$.

910. $\log 5\cdot\log 20+(\log 2)^2=\log 5\cdot\log(2\cdot 10)+(\log 2)^2=\log 5(\log 2+\log 10)+(\log 2)^2=$
$=\log 5(\log 2+1)+(\log 2)^2=\log 5\cdot\log 2+\log 5+(\log 2)^2=\log 2(\log 5+\log 2)+\log 5=$
$=\log 2\cdot\log(5\cdot 2)+\log 5=\log 2\cdot\log 10+\log 5=\log 2+\log 5=\log 10=1.$

911. $\dfrac{15}{2}$.

912. 12.

913. $\log_{\sqrt{7}}3\log_3 49=\dfrac{1}{\log_3\sqrt{7}}\cdot\log_3 7^2=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\log_3 7}\cdot 2\log_3 7=4.$

914. $$\frac{\log_6^2 3+\log_6 16}{\log_6 3\cdot\log_6 48+\log_6^2 4}=\frac{\log_6^2 3+4\log_6 2}{\log_6 3\cdot\log_6(3\cdot 16)+\log_6^2 4}=$$
$$=\frac{\log_6^2 3+4(\log_6 6-\log_6 3)}{\log_6 3(\log_6 3+\log_6 16)+\log_6^2 4}=\frac{\log_6^2 3-4\log_6 3+4}{\log_6^2 3+\log_6 3\cdot\log_6 16+\log_6^2 4}=$$
$$=\frac{(\log_6 3-2)^2}{\log_6^2 3+2\log_6 3\cdot\log_6 4+\log_6^2 4}=\frac{(\log_6 3-\log_6 36)^2}{(\log_6 3+\log_6 4)^2}=\frac{\log_6^2\frac{1}{12}}{\log_6^2 12}=1.$$

915. Zauważmy, że: $2^{\log_{\sqrt[3]{25}}\sqrt{25}}=\sqrt[4]{8}\Leftrightarrow 2^{\log_{\sqrt[3]{25}}\sqrt{5}}=2^{\frac{3}{4}}\Leftrightarrow\log_{\sqrt[3]{25}}\sqrt{5}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(\sqrt[3]{25})^{\frac{3}{4}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow(5^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}=5^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{2}}$
Ostatnia równość jest oczywista.

916. Wskazówka: $\log_{12}18=\dfrac{\log_2 18}{\log_2 12}=\dfrac{1+2\log_2 3}{2+\log_2 3}$, $\log_{24}54=\dfrac{\log_2 54}{\log_2 24}=\dfrac{1+3\log_2 3}{3+\log_2 3}$.

917. $1+\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4=1+\log_3 7\cdot\dfrac{\log_3 5}{\log_3 7}\cdot\dfrac{\log_3 4}{\log_3 5}=$
$=1+\log_3 4=\log_3 3+\log_3 4=\log_3(3\cdot 4)=\log_3 12.$

918. $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5=\log_3 2\cdot\dfrac{1}{\log_3 4}\cdot\dfrac{\log_3 4}{\log_3 5}\cdot\dfrac{\log_3 5}{\log_3 6}=\dfrac{\log_3 2}{\log_3 6}=\log_6 2.$

919. 1.

920. $\log_9 20=\dfrac{\log 20}{\log 9}=\dfrac{\log(10\cdot 2)}{\log 3^2}=\dfrac{1+\log 2}{2\log 3}=\dfrac{1+a}{2b}.$

921. Zauważmy, że $\log_7 12=\dfrac{1}{\log_{12}7}$ i $\log_{12}24=1+\log_{12}2.$

Zatem $\dfrac{1}{\log_{12}7}=a$ i $1+\log_{12}2=b$, skąd $\log_{12}7=\dfrac{1}{a}$ i $\log_{12}2=b-1$. Wobec tego:

$$\log_{54}168=\frac{\log_{12}168}{\log_{12}54}=\frac{\log_{12}(24\cdot 7)}{\log_{12}(3^3\cdot 2)}=\frac{\log_{12}24+\log_{12}7}{3\log_{12}3+\log_{12}2}=\frac{b+\frac{1}{a}}{3\log_{12}3+b-1}. \quad (1)$$

Ale $\log_{12}3=\log_{12}\dfrac{24}{8}=\log_{12}24-\log_{12}8=b-3\log_{12}2=b-3(b-1)=3-2b$ (2)

Z (1) i (2) otrzymujemy: $\log_{54}168=\dfrac{b+\frac{1}{a}}{3(3-2b)+b-1}=\dfrac{ab+1}{a(8-5b)}.$

922. $\log_{30}8=\log_{30}2^3=3\log_{30}2=3\log_{30}\dfrac{30}{15}=3(\log_{30}30-\log_{30}15)=$
$=3[1-\log_{30}(3\cdot 5)]=3-3\log_{30}(3\cdot 5)=3-3(\log_{30}3+\log_{30}5)=$
$=3-3(a+b)=3-3a-3b.$

923. $\log_{12}2=\log_{12}\dfrac{24}{12}=\log_{12}24-1=\log_{12}(3\cdot 2^3)-1==\log_{12}3+3\log_{12}2-1=$
$=r-1+3\log_{12}2$. Stąd $\log_{12}2=\dfrac{1-r}{2}.$

924. $\log_{24}54=\dfrac{\log_2 54}{\log_2 24}=\dfrac{\log_2(2\cdot 3^3)}{\log_2(2^3\cdot 3)}=\dfrac{\log_2 2+3\log_2 3}{3\log_2 2+\log_2 3}=\dfrac{1+3a}{3+a}=\dfrac{3a+1}{a+3}.$

925. Przypuśćmy, że $\log_2 5$ jest liczbą wymierną czyli, że istnieją liczby naturalne a i b takie, że $\log_2 5=\frac{a}{b}$ i a, b są względnie pierwsze (łatwo zauważyć, że $\log_2 5>0$). Wtedy $b\log_2 5=a$, czyli $\log_2 5^b=a$. Stąd $5^b=2^a$, więc sprzeczność, gdyż lewa strona ostatniej równości jest podzielna przez 5, a prawa nie.

926. $D_f=(0;\ 1)\cup(1;\ 4)$.

927. $D_f=\langle 0;\ 2)\cup(2;\ 4\rangle$.

928. $D_f=(-\infty;\ -3)\cup(2;\ 3)$.

929. $a\in\left(-\frac{1}{2};\ \infty\right)$.

930. Dziedziną D_f funkcji f jest zbiór rozwiązań nierówności $\frac{x+2}{x-2}>0$, czyli zbiór $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ \infty)$. Widać, że $\bigwedge_{x\in D_f} -x\in D_f$. Niech $x\in D_f$. Wtedy: $f(-x)=$

$$=-x\log\frac{-x+2}{-x-2}=-x\log\frac{x-2}{x+2}=-x\log\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{-1}=x\log\frac{x+2}{x-2}=f(x).$$

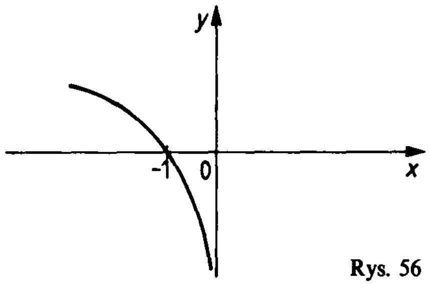
Zatem funkcja f jest parzysta.

931. Ponieważ $\bigwedge_{x\in R} x+\sqrt{1+x^2}>0$, więc $D_f=R$. Niech $x\in D_f$.

Wtedy: $f(-x)=\log\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\log\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}=$

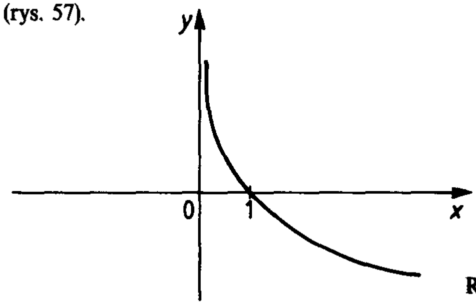
$=-\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)$. Zatem funkcja f jest nieparzysta.

932. Rys. 56.



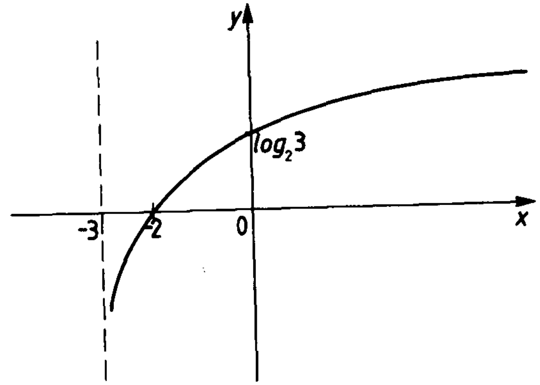
Rys. 56

933. $y=\log_2\frac{1}{x}=\log_2 x^{-1}=-\log_2 x$.
(rys. 57).



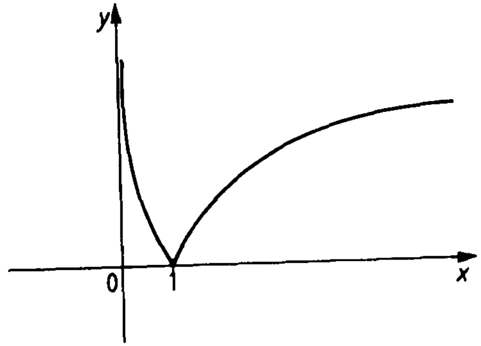
Rys. 57

934. Rys. 58.



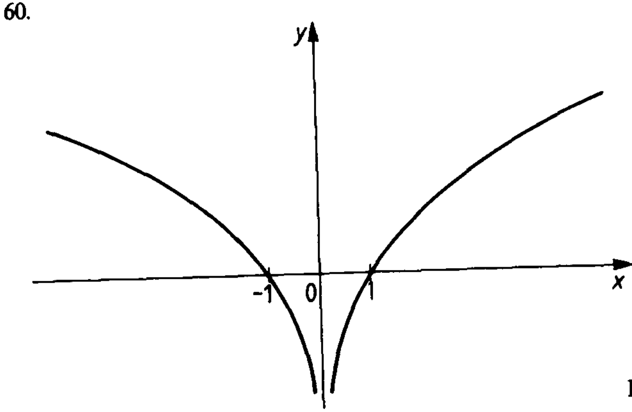
Rys. 58

935. Rys. 59.



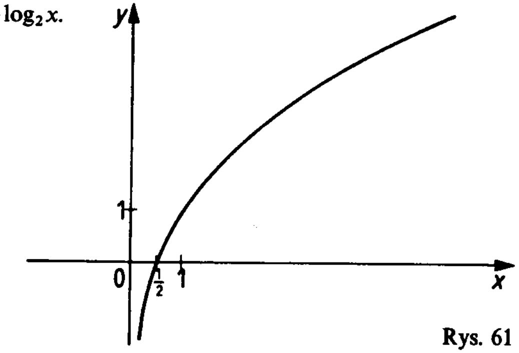
Rys. 59

936. Rys. 60.



Rys. 60

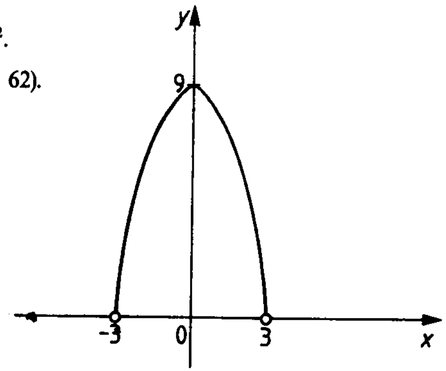
937. $\log_2(2x)=\log_2 2+\log_2 x=1+\log_2 x$. (rys. 61).



Rys. 61

938. Gdy $x\in(-3;\ 3)$, to $2^{\log_2(9-x^2)}=9-x^2$.

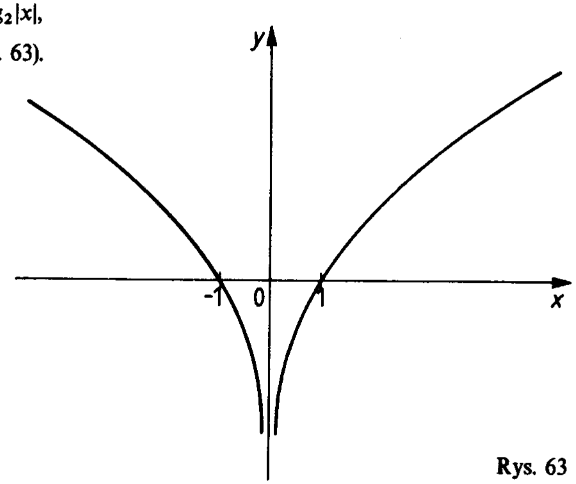
Zatem $f\colon (-3;\ 3)\ni x\to y=9-x^2$. (rys. 62).



Rys. 62

939. Ponieważ $\log_2 x^2=2\log_2|x|$,

więc $f\colon\ y=2\log_2|x|$ (rys. 63).

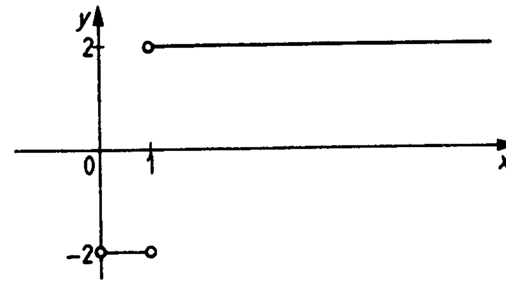


Rys. 63

940. $D_f=(0;\ 1)\cup(1;\ \infty)$.

Mamy: $\dfrac{\log_2 x^2}{|\log_2 x|}=\dfrac{2\log_2 x}{|\log_2 x|}$.

Jeżeli $\log_2 x>0$, czyli $x\in(1;\ +\infty)$, to $y=\dfrac{2\log_2 x}{\log_2 x}=2$.



Rys. 64

Jeżeli $\log_2 x<0$, czyli $x\in(0;\ 1)$, to $y=\dfrac{2\log_2 x}{-\log_2 x}=-2$.

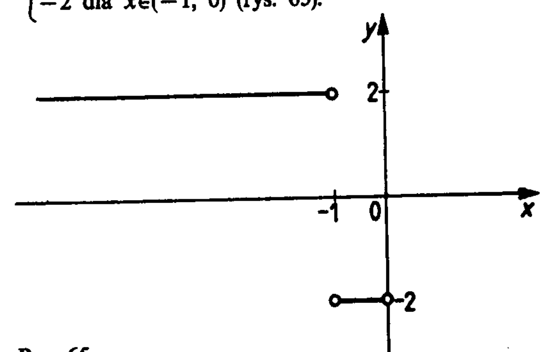
Zatem: $f\colon\ y=\begin{cases} 2 & \text{dla } x\in(1;\ \infty) \\ -2 & \text{dla } x\in(0;\ 1) \end{cases}$ (rys. 64).

941. $D_f=(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 0)$.

Mamy: $\dfrac{\log_2 x^2}{|\log_2(-x)|}=\dfrac{2\log_2(-x)}{|\log_2(-x)|}$.

Jeżeli $\log_2(-x)>0$, czyli $x\in(-\infty;\ -1)$, to $y=2$.
Jeżeli $\log_2(-x)<0$, czyli $x\in(-1;\ 0)$, to $y=-2$.

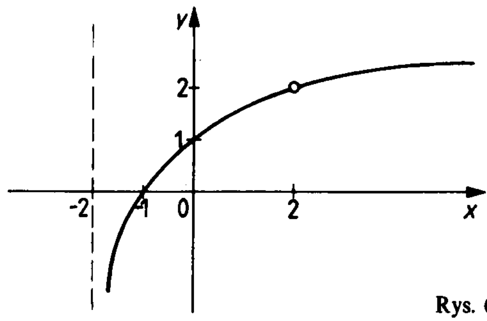
Zatem: $f\colon\ y=\begin{cases} 2 & \text{dla } x\in(-\infty;\ -1) \\ -2 & \text{dla } x\in(-1;\ 0) \end{cases}$ (rys. 65).



Rys. 65

942. Dziedziną D_f funkcji f jest zbiór rozwiązań nierówności $\frac{x^2-4}{x-2}>0$, czyli zbiór $(-2;\ 2)\cup+(2;\ \infty)$. Gdy $x\in D_f$, to: $\log_2\frac{x^2-4}{x-2}=\log_2\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\log_2(x+2)$.

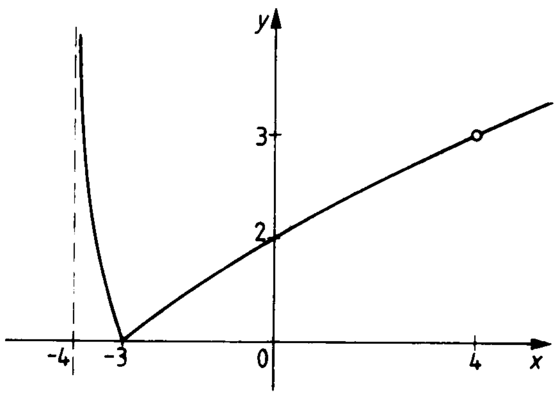
Zatem f: $y=\log_2(x+2)$, gdzie $D_f=(-2;\ 2)\cup(2;\ \infty)$ (rys. 66).



Rys. 66

943. $D_f=(-4;\ 4)\cup(4;\ \infty)$.

Gdy $x\in D_f$, to $f\colon y=|\log_2(x+4)|$ (rys. 67).



Rys. 67

944. $D_f=\left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$.

Gdy $x\in D_f$, to: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}=\frac{\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\log_2\frac{1}{2}}+\log_2\sqrt{(2x-1)^2}=$

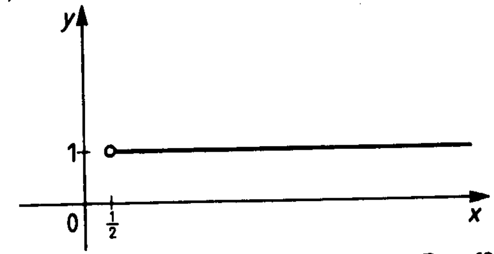
$=-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log_2(2x-1)=\log_2\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)=$

$\log_2 2+\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)=\log_2 2=1.$

Zatem

f: $y=1$, $D_f=\left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$

(rys. 68).



Rys. 68

945. Ponieważ $\log_a x=2$, $\log_b x=3$, $\log_c x=6$, więc $a^2=x$, $b^3=x$, $c^6=x$, $x>0$, $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $c>0$, $c\neq1$. Stąd $a=x^{\frac{1}{2}}$, $b=x^{\frac{1}{3}}$, $c=x^{\frac{1}{6}}$.
Mnożąc powyższe równości stronami otrzymujemy $abc=x$.
Wobec tego $\log_{abc}x=1$.

946. Przy podanych założeniach mamy: $\log_{bc}(ab)=\frac{\log_b(ab)}{\log_b(bc)}=\frac{\log_b a+\log_b b}{\log_b b+\log_b c}=$

$=\frac{m+1}{1+\frac{\log_c c}{\log_c b}}=\frac{m+1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{n(m+1)}{n+1}.$

947. Wskazówka: $\log_a x=\frac{\log_{ab}x}{\log_{ab}a}$ i $\log_b x=\frac{\log_{ab}x}{\log_{ab}b}$.

948. Przy podanych założeniach: $\frac{\log_a x}{\log_{ab}x}=\frac{\log_a x}{\frac{\log_a x}{\log_a(ab)}}=\log_a(ab)=\log_a a+\log_a b=1+\log_a b.$

949. $\log_a N\cdot\log_b N+\log_b N\cdot\log_c N+\log_c N\cdot\log_a N=$

$=\frac{1}{\log_N a}\cdot\frac{1}{\log_N b}+\frac{1}{\log_N b}\cdot\frac{1}{\log_N c}+\frac{1}{\log_N c}\cdot\frac{1}{\log_N a}=$

$=\frac{\log_N c+\log_N a+\log_N b}{\log_N a\cdot\log_N b\cdot\log_N c}=\frac{\log_N(abc)}{\log_N a\cdot\log_N b\cdot\log_N c}=\frac{\frac{1}{\log_{abc}N}}{\frac{1}{\log_a N}\cdot\frac{1}{\log_b N}\cdot\frac{1}{\log_c N}}=$

$=\frac{\log_a N\cdot\log_b N\cdot\log_c N}{\log_{abc}N}.$

950. $(\log_2 x)^{-1}+(\log_3 x)^{-1}+\ldots+(\log_{1993} x)^{-1}=\log_x 2+\log_x 3+\ldots+\log_x 1993=$

$=\log_x(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1993)=\log_x 1993!=\frac{\log_{1993!}1993!}{\log_{1993!}x}=\frac{1}{\log_{1993!}x}=(\log_{1993!}x)^{-1}$.

951. $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\ldots\cdot\log_{n+1} n=\frac{\log_{n+1}2}{\log_{n+1}3}\cdot\frac{\log_{n+1}3}{\log_{n+1}4}\cdot\ldots\cdot\frac{\log_{n+1}n}{\log_{n+1}(n+1)}=\log_{n+1}2$.

952. Z podanych założeń i definicji logarytmu wynika, że $\log_8 b=\frac{1}{1-\log_8 a}$

i $\log_8 c=\frac{1}{1-\log_8 b}$. Stąd $\log_8 b=\frac{1}{1-\log_8 a}$ i $\log_8 b=\frac{-1+\log_8 c}{\log_8 c}$.

Zatem $\frac{1}{1-\log_8 a}=\frac{-1+\log_8 c}{\log_8 c}$.

Przekształcając ostatnią równość otrzymujemy $\log_8 a=\frac{1}{1-\log_8 c}$.

Stąd $a=8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

953. Równość $a^2+b^2=9ab$ przekształcamy do postaci $\frac{(a+b)^2}{9}=ab$.

Stąd i z założeń mamy: $\log_k\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=\log_k a+\log_k b$. Zatem $\log_k\frac{a+b}{3}=$

$=\frac{1}{2}(\log_k a+\log_k b)$.

954. Mamy wykazać, że jeżeli $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $x\neq 0$, to $\log_a b=\log_{a^x}b^x$.

$\log_{a^x}b^x=\frac{\log_a b^x}{\log_a a^x}=\frac{x\log_a b}{x\log_a a}=\frac{\log_a b}{1}=\log_a b$.

955. Zauważmy, że $\frac{1}{\log_3 5}+\frac{1}{\log_8 5}=\log_5 3+\log_5 8=\log_5 24$, oraz $2=\log_5 25$. Ponieważ $24<25$, więc $\log_5 24<\log_5 25$, co oznacza, że podana nierówność jest prawdziwa.

956. $(\log_2\pi)^{-1}+(\log_\pi 2)^{-1}=\frac{1}{\log_2\pi}+\log_2\pi=\frac{1+\log_2^2\pi}{\log_2\pi}$.

Wystarczy więc pokazać, że $\frac{1+\log_2^2\pi}{\log_2\pi}>2$. Ostatnią nierówność przekształcamy do postaci $(1-\log_2\pi)^2>0$, a jest ona prawdziwa, gdyż $1\neq\log_2\pi$.

957. Stosując nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dwóch liczb łatwo dowodzimy, że dla $x\in\boldsymbol{R}_+$, $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$.

Ponieważ $a>1$ i $c>1$, więc $\log_c a>0$ i $\log_c a^2>0$.

Z powyższych warunków wynika, że $\log_c a+\frac{1}{\log_c a}\geqslant 2$ i $\log_c a^2+\frac{1}{\log_c a^2}\geqslant 2$.

Stosując twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu otrzymamy: $\log_c a+\log_a c\geqslant 2$ i $2\log_c a+\log_{a^2}c\geqslant 2$. Po dodaniu ostatnich nierówności stronami otrzymujemy: $3\log_c a+\log_a c+\log_{a^2}c\geqslant 4$.

958. Wskazówka: Zauważ, że $\log_a b>0$ i wykorzystaj nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną.

959. Ponieważ a, $b\in(0;1)$, więc $\log_{\frac{1}{2}}a>0$ i $\log_{\frac{1}{2}}b>0$.

Wykorzystując nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb $\log_{\frac{1}{2}}a$ i $\log_{\frac{1}{2}}b$ czyli $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}a\cdot\log_{\frac{1}{2}}b}\leqslant\frac{\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b}{2}$, i z założenia otrzymujemy $\log_{\frac{1}{2}}(ab)\geqslant 2$.

Stąd i z faktu, że funkcja $f\colon y=\log_{\frac{1}{2}}x$ jest funkcją malejącą wynika, $ab\leqslant\frac{1}{4}$.

960. Wykażemy, że $f(\log_5 6)<f(\log_5 4)$.

$f(\log_5 6)<f(\log_5 4)\Leftrightarrow\log_5 6+\frac{1}{\log_5 6}<\log_5 4+\frac{1}{\log_5 4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_6^5 6\cdot\log_5 4+\log_5 4<\log_5 6\cdot\log_5^2 4+\log_5 6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_5^2 6\cdot\log_5 4-\log_5 6\cdot\log_5^2 4<\log_5 6-\log_5 4\Leftrightarrow\log_5 6\cdot\log_5 4<1$.

Wykorzystując nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb $\log_5 6$ i $\log_5 4$ mamy:

$\sqrt{\log_5 6\cdot\log_5 4}<\frac{\log_5 6+\log_5 4}{2}$, skąd $\sqrt{\log_5 6\cdot\log_5 4}<\frac{\log_5 24}{2}$.

Ale $\log_5 24<\log_5 25=2$, zatem $\sqrt{\log_5 6\log_5 4}<1$, czyli $\log_5 6\cdot\log_5 4<1$.

961. Korzystając z nierówności Schwarza:

$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\geqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$ dla liczb: $a_1=\log_{\frac{1}{2}}x$, $a_2=\log_{\frac{1}{2}}y$, $a_3=\log_{\frac{1}{2}}z$, $b_1=b_2=b_3=1$,

otrzymujemy:

$|\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y+\log_{\frac{1}{2}}z|\leqslant\sqrt{(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+(\log_{\frac{1}{2}}y)^2+(\log_{\frac{1}{2}}z)^2}\cdot\sqrt{3}$.

Stąd: $|\log_{\frac{1}{2}}(xyz)|\leqslant\sqrt{(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+(\log_{\frac{1}{2}}y)^2+(\log_{\frac{1}{2}}z)^2}\cdot\sqrt{3}$.

Wykorzystując założenie $xyz=\frac{1}{64}$ mamy: $\log_{\frac{1}{2}}z=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{64}=6$.

Wobec tego $6\leqslant\sqrt{(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+(\log_{\frac{1}{2}}y)^2+(\log_{\frac{1}{2}}z)^2}\cdot\sqrt{3}$, stąd po podniesieniu obu stron ostatniej nierówności do kwadratu otrzymujemy

$36\leqslant[(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+(\log_{\frac{1}{2}}y)^2+(\log_{\frac{1}{2}}z)^2]\cdot 3$, czyli $12\leqslant(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+(\log_{\frac{1}{2}}y)^2+\log_{\frac{1}{2}}z)^2$.

962. Wskazówka: Porównaj rozwiązanie zadania 961.

963. Z założenia mamy $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$. Ponieważ $\frac{b}{a}>0$ i $\frac{c}{b}>0$, więc $\log\frac{b}{a}=\log\frac{c}{b}$, czyli $\log b-\log a=\log c-\log b$. Ostatnia równość oznacza, że ciąg $(\log a, \log b, \log c)$ jest ciągiem arytmetycznym.

964. Ponieważ $(\log_a x, \log_b x, \log_c x)$ jest ciągiem geometrycznym, więc $\frac{\log_b x}{\log_a x}=\frac{\log_c x}{\log_b x}$. Stąd i z twierdzenia o zmianie podstawy logarytmu otrzymujemy

$$\frac{\dfrac{\log_a x}{\log_a b}}{\log_a x}=\frac{\dfrac{\log_b x}{\log_b c}}{\log_b x}.$$ Zatem $\log_a b=\log_b c$.

965. Warunki opisujące ciąg (x_n) są równoważne warunkom: $x_1=\frac{1}{4}$ i dla $n\geqslant 2$, $\frac{x^n}{x_{n-1}}=\frac{1}{4}$. Wobec tego ciąg (x^n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q=\frac{1}{4}$ i wyrazie pierwszym $x_1=\frac{1}{4}$.

Stąd $x_1+x_2+...+x_n=\dfrac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$.

966. Ciąg $(\log_k x, \log_m x, \log_n x)$ będzie ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy $\log_m x-\log_k x=\log_n x-\log_m x$.
Ponieważ $x\in \boldsymbol{R}_+\setminus\{1\}$, więc: $\log_m x-\log_k x=\log_n x-\log_m x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_n x+\log_k x=2\log_m x \Leftrightarrow \frac{\log_k x}{\log_k n}+\log_k x=2\frac{\log_k x}{\log_k m}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\log_k n}+1=\frac{2}{\log_k m}\Leftrightarrow \log_k m(1+\log_k n)=2\log_k n\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_k m\cdot\log_k(kn)=\log_k n^2\Leftrightarrow \log_k(kn)^{\log_k m}=\log_k n^2\Leftrightarrow n^2=(kn)^{\log_k m}.$$

967. Mamy wykazać, że dla $x, y, z\in\boldsymbol{R}$ prawdziwe są warunki:
1. $d(x, y)\geqslant 0$,
2. $d(x, y)=0\Leftrightarrow x=y$,
3. $d(x, y)=d(y, x)$,
4. $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$.

Warunki 1, 2 i 3 wynikają łatwo z określenia funkcji d. Wykażemy warunek 4.
Mamy udowodnić, że $\log_2(1+|x-z|)\leqslant\log_2(1+|x-y|)+\log_2(1+|y-z|)$.
Powyższą nierówność można zapisać w postaci
$1+|x-z|\leqslant(1+|x-y|)\cdot(1+|y-z|)$, czyli $|x-z|\leqslant|x-y|+|y-z|+|x-y|\cdot|y-z|$.
Ostatnia nierówność jest jest prawdziwa gdyż:
$|x-z|=|(x-y)+(y-z)|\leqslant|x-y|+|y-z|\leqslant|x-y|+|y-z|+|x-y|\cdot|y-z|$.

968. $x=6$.

969. $x=2$.

970. $x=\frac{1}{2}$. Wskazówka: $6^x\cdot 8^x=4\cdot 3^x\Leftrightarrow 2^x\cdot 3^x\cdot 2^{3x}=4\cdot 3^x$.

971. $2^{3x}\cdot 7^{x-2}=4^{x+1}\Leftrightarrow 7^{x-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

972. $x=3$ lub $x=-\frac{1}{5}$.

973. Wykorzystując wzór na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie $5^{\frac{(2+2x)x}{2}}=5^{56}$.
Stąd $x(x+1)=56$, a więc $x=7$.

974. $x=5$.

975. $x=-\frac{1}{2}$.

976. $x=2$.

977. $x=1$.

978. $x=\log_3 2$.

979. $x=2$. Wskazówka: Oznacz $3^x=t$.

980. $x=1$.

981. $x=1$.

982. $x=1$ lub $x=2$.

983. $x=3$.

984. $x=1$ lub $x=0$. Wskazówka: $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x\Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{3}\right)^x+2\left(\frac{3}{2}\right)^x=5$.

985. $x=0$.

986. $3\cdot 4^x-7\cdot 10^x+2\cdot 25^x=0\Leftrightarrow 3\cdot 2^x\cdot 2^x-7\cdot 5^x\cdot 2^x+2\cdot 5^x\cdot 5^x=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{5}\right)^x-7+2\left(\frac{5}{2}\right)^x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{5}\right)^x-7+\frac{2}{\left(\frac{2}{5}\right)^x}=0.$$ Otrzymujemy: $x=\log_{2/5}\frac{1}{3}$ lub $x=\log_{2/5}2$.

987. $x=1$. Wskazówka. Podstawiając $2^{\sqrt{x}}=t$ otrzymujemy równanie $t=\sqrt{t^4}-2$, czyli równanie $t=t^2-2$.

988. $x=1$ lub $x=\left(\log_3\frac{3}{2}\right)^2$. Wskazówka: Podstawiając $3^{\sqrt{x}}=t$ otrzymujemy równanie $\frac{9}{t}=\frac{9}{\sqrt{t^4}}+2$, czyli równanie $\frac{9}{t}=\frac{9}{t^2}+2$.

989. $x=2$ lub $x=-2$. Wskazówka: $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

990. Podanemu równaniu równoważna jest alternatywa:
$$\begin{cases} x<-2 \\ 2^{-x-2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} -2\leqslant x-1 \\ 2^{x+2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1 \end{cases}$$
$$\text{lub } \begin{cases} x\geqslant -1 \\ 2^{x+2}-2^{x+1}+1=2^{x+1}+1. \end{cases}$$
Stąd otrzymujemy:
$$\begin{cases} x<-2 \\ 2^{-x-2}=2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} -2\leqslant x<-1 \\ 2^{x+2}=2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x\geqslant -1 \\ 2^{x+2}=2^{x+2}. \end{cases}$$
Wobec tego $x=-3$ lub $x\in\langle -1;\ \infty)$.

991. Rozważmy funkcję $f(x)=2^x+3^x+4^x$. Ponieważ funkcje $y=2^x$, $y=3^x$, $y=4^x$ są rosnące w zbiorze $\boldsymbol{R}$, więc funkcja $f(x)$ jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$.
Ale $f(2)=29$, zatem liczba 2 jest rozwiązaniem podanego równania.
Z powyższego wynika, że jeśli $x<2$, to $2^x+3^x+4^x<29$, jeśli $x>2$, to $2^x+3^x+4^x>29$.
Wobec tego jeśli $x\neq 2$, to $2^x+3^x+4^x\neq 29$. Oznacza to, że jedynym rozwiązaniem podanego równania jest liczba 2.

992. Sprawdzamy, że $3^3+4^3+5^3=6^3$.
Jeżeli $x>3$, to $6^x=6^3\cdot 6^{x-3}=(3^3+4^3+5^3)6^{x-3}=3^3\cdot 6^{x-3}+4^3\cdot 6^{x-3}+5^3\cdot 6^{x-3}>$
$>3^3\cdot 3^{x-3}+4^3\cdot 4^{x-3}+5^3\cdot 5^{x-3}=3^x+4^x+5^x$.
Podobnie dowodzimy, że jeśli $x<3$, to $6^x<3^x+4^x+5^x$.
Zatem jedynym rozwiązaniem rzeczywistym podanego równania jest liczba 3.

993. Podstawmy $3^x=t$. Otrzymujemy wtedy równanie $t^2-4t+p=0$ z niewiadomą t. Powyższe równanie kwadratowe musi mieć dwa różne rozwiązania dodatnie. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy $16-4p>0$ i $p>0$, czyli gdy $p\in(0;\ 4)$. Ponieważ p jest liczbą całkowitą, więc $p=1$ lub $p=2$, lub $p=3$. Łatwo sprawdzić, że warunki zadania spełnia tylko $p=3$.

994. $x\in\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$.

995. $x\in(-\infty;\ 1\rangle\cup\langle 6;\ \infty)$.

996. $x\in(-1;\ 5\rangle$.

997. $x\in\langle 4;\ \infty)$.

998. $x\in(-\infty;\ -2)\cup(2;\ \infty)$.

999. $x\in(-\infty;\ -\sqrt{3}\rangle\cup\langle\sqrt{3};\ \infty)$.

1000. $x\in(-\infty;\ -\sqrt{6}\rangle\cup\langle 0;\ \sqrt{6}\rangle$.

1001. $x\in(-\infty;\ -\sqrt{2}\rangle\cup\langle 0;\ \sqrt{2}\rangle$.

1002. $x\in(-\sqrt{3};\ 0)\cup(\sqrt{3};\ \infty)$.

1003. $x\in\langle -1;\ 4\rangle$.

1004. $x\in\langle 2;\ \infty)$.

1005. $x\in\left\langle -\infty;\ \frac{1}{5}\right)$.

1006. $x\in(-\infty;\ \log_2 3)$.

1007. $x\in\langle -2;\ \infty)$.

1008. $x\in\langle 1;\ \infty)$.

1009. $4^x+2^{x+1}\leqslant 8^x \Leftrightarrow 2^x\cdot 2^x+2^x 2\leqslant 2^x\cdot x^x\cdot 2^x \Leftrightarrow 2^x+2\leqslant(2^x)^2 \Leftrightarrow (2^x=t \text{ i } t^2-t-2\geqslant 0)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow[2^x=t \text{ i } (t\leqslant -1 \text{ lub } t\geqslant 2)]\Leftrightarrow(2^x\leqslant -1 \text{ lub } 2^x\geqslant 2)\Leftrightarrow 2^x\geqslant 2\Leftrightarrow x\in\langle 1;\ \infty)$.

1010. $x\in(-\infty;\ -1\rangle\cup\langle\log_2 5;\ \infty)$.

1011. $x\in(-\infty;\ 3)$.

1012. $x\in(0;\ 1)$. Wskazówka: $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x<5\cdot 6^x \Leftrightarrow 3+2\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}<5\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

1013. $x\in(-\infty;\ -2)\cup\left(\log_2\frac{4}{3};\ \infty\right)$.

1014. $x\in\{0\}\cup\langle 1;\ \infty)$. Wskazówka: Oznacz $2^x=t$.

1015. $x\in(-2;\ 2\rangle$.

1016. $x\in(0;\ \infty)$. Wskazówka: $3^{\frac{1}{x}}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{9x}\Leftrightarrow\log_3 3^{\frac{1}{x}}\geqslant\log_3\left(\frac{1}{2}\right)^{9x}$.

1017. $x\in(\log_a 4;\ \log_a 2)\cup(0;\ \infty)$.

1018. $8^x>6\cdot 9^{|x-1|}\Leftrightarrow 2^{3x}>2\cdot 3\cdot 3^{2|x-1|}\Leftrightarrow 2^{3x-1}>3^{2|x-1|+1}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\log_2 2^{3x-1}>\log_2 3^{2|x-1|+1}\Leftrightarrow 3x-1>(2|x-1|+1)\log_2 3$.
Rozwiązując ostatnią nierówność otrzymujemy:
$x\in\left(\frac{3\log_2 3+1}{3+2\log_2 3};\ \frac{\log_2 3-1}{2\log_2 3-3}\right)$.

1019. $x=2$.

1020. $x=\frac{3}{5}$.

1021. $x=4$ lub $x=\frac{8}{7}$.

1022. $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1023. $x=\frac{1}{6}$.

1024. $x=3$.

1025. $x=\frac{9}{2}$.

1026. Dziedziną równania jest zbiór rozwiązań układu nierówności: $x>0$ i $x^2>0$ i $\log x>0$ i $\log x^2-1>0$. Stąd otrzymujemy: $x\in(\sqrt{10};\ \infty)$, więc:
$\log(\log x)+\log(\log x^2-1)=1\Leftrightarrow 1;\ \log[\log x(\log x^2-1)]=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\log x(\log x^2-1)=10\Leftrightarrow\log x(2\log x-1)=10\Leftrightarrow(\log x=z \text{ i } 2z^2-z-10=0)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left[\log x=z \text{ i }\left(z=-2 \text{ lub } z=\frac{5}{2}\right)\right]\Leftrightarrow\left(\log x=-2 \text{ lub } \log x=\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x=10^{-2} \text{ lub } x=100\sqrt{10})\Leftrightarrow x=100\sqrt{10}$.

1027. $x=\sqrt{10}$ lub $x=100$.

1028. Dziedziną równania jest przedział $(0;\ \infty)$.
$x^{\log x}=100\Leftrightarrow\log x^{\log x}=\log(100x)\Leftrightarrow\log^2 x=\log 100+\log x\Leftrightarrow\log^2 x=2+\log x\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(\log x=t \text{ i } t^2-t-2=0)\Leftrightarrow[\log x=t \text{ i } (t=2 \text{ lub } t=-1)]\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(\log x=2 \text{ lub } \log x=-1)\Leftrightarrow\left(x=100 \text{ lub } x=\frac{1}{10}\right)$.

1029. Prawdziwe są implikacje:

$$\log_4[2\log_3(1+\log_2 x)]=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\log_3(1+\log_2 x)=4^{\frac{1}{2}}\Rightarrow \log_3(1+\log_2 x)=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+\log_2 x=3\Rightarrow \log_2 x=2\Rightarrow x=4.$$

Łatwo sprawdzić, że liczba 4 spełnia pierwsze równanie. Zatem jedynym rozwiązaniem podanego równania jest liczba 4.

1030. $x=64$.

1031. Dziedziną równania jest zbiór $(0;\ 1)\cup(1;\ \infty)$.
$$x^{2\log_x 10}=10x\Leftrightarrow x^{\log_x 100}=10x\Leftrightarrow 100=10x\Leftrightarrow x=10.$$

1032. $x=0$.

1033. $x=0$ lub $x=3$.

1034. Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R}$.
$$x+\log(1+2^x)=x\log 5+\log 6\Leftrightarrow \log 10^x+\log(1+2^x)=\log 5^x+\log 6\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log[10^x(1+2^x)]=\log(5^x\cdot 6)\Leftrightarrow 10^x(1+2^x)=5^x\cdot 6\Leftrightarrow 2^x(1+2^x)=6\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2^x=t \text{ i } t^2+t-6=0)\Leftrightarrow[2^x=t \text{ i } (t=-3 \text{ lub } t=2)]\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2^x=-3 \text{ lub } 2^x=2)\Leftrightarrow x=1.$$

1035. Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R}_+$.
$$2x^{\log x}+3x^{-\log x}=5\Leftrightarrow\left(x^{\log x}=t \text{ i } 2t+\frac{3}{t}=5\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[x^{\log x}=t \text{ i }\left(t=1 \text{ lub } t=\frac{3}{2}\right)\right]\Leftrightarrow\left(x^{\log x}=1 \text{ lub } x^{\log x}=\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\log x^{\log x}=0 \text{ lub } \log x^{\log x}=\log\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\log^2 x=0 \text{ lub } \log^2 x=\log\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\log x=0 \text{ lub } \log x=\sqrt{\log\frac{3}{2}} \text{ lub } \log x=-\sqrt{\log\frac{3}{2}}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(x=1 \text{ lub } x=10^{\sqrt{\log\frac{3}{2}}} \text{ lub } x=10^{-\sqrt{\log\frac{3}{2}}}\right).$$

1036. Dziedziną równania jest zbiór rozwiązań układu: $-x>0$ i $\log_2(-x)\geqslant 0$ i $x^2>0$, czyli przedział $(-\infty;\ -1\rangle$.
$$\sqrt{5\log_2(-x)}=\log_2\sqrt{x^2}\Leftrightarrow\sqrt{5\log_2(-x)}=\log_2|x|\Leftrightarrow 5\log_2(-x)=[\log_2(-x)]^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow[\log_2(-x)=t \text{ i } 5t=t^2]\Leftrightarrow[\log_2(-x)=t \text{ i } (t=0 \text{ lub } t=5)]\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow[\log_2(-x)=0 \text{ lub } \log_2(-x)=5]\Leftrightarrow(x=-1 \text{ lub } x=-32).$$

1037. $x=\log_2 3$.

1038. $x=\log_3\frac{28}{27}$ lub $x=\log_3 10$.

Wskazówka: $\log_3(3^{x+1}-3)=\log_3(3^x 3-3)=\log_3[3(3^x-1)]=$
$=\log_3+\log_3(3^x-1)=1+\log_3(3^x-1)$.

1039. $x=4\sqrt[3]{4}$ lub $x=4$.

Wskazówka: Łatwo sprawdzić, że liczba 1 nie jest rozwiązaniem równania. Niech $x\neq 1$. Wtedy:

$$\log_{16x}x^3=\frac{\log_x x^3}{\log_x(16x)}=\frac{3}{1+\log_x 16} \text{ oraz } \log_{\frac{x}{2}}\sqrt{x}=\frac{\log_x\sqrt{x}}{\log_x\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\log_x 2}.$$

1040. $x=2$.

1041. Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R}_+\setminus\{1\}$.
$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1\Leftrightarrow\log_4(x+12)\cdot\frac{\log_4 2}{\log_4 x}=1\Leftrightarrow\frac{\log_4(x+12)}{2\log_4 x}=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_4(x+12)=\log_4 x^2\Leftrightarrow x+12=x^2\Leftrightarrow x=4.$$

1042. $x=2$ lub $x=\frac{1}{2}$.

1043. Dziedziną równania jest przedział $(-\infty;\ -1)$.
$$\log_2(\log_3 x^2)-\log_2[\log_3(1-x)]=1\Leftrightarrow\log_2\frac{\log_3 x^2}{\log_3(1-x)}=1\Leftrightarrow\frac{\log_3 x^2}{\log_3(1-x)}=2\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\log_3 x^2=2\log_3(1-x)\Leftrightarrow x^2=(1-x)^2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, co oznacza, że równanie jest sprzeczne, gdyż $\frac{1}{2}\notin(-\infty;\ -1)$.

1044. $x=\frac{39}{10}$.

1045. $x=14$.

1046. Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R}_+-\{1\}$.
$$\log_{\frac{1}{x}}\frac{2}{x}=\left(\log_x\frac{x}{2}\right)^3\Leftrightarrow\frac{\log_x\frac{2}{x}}{\log_x\frac{1}{x}}=\left(\log_x\frac{x}{2}\right)^3\Leftrightarrow\frac{\log_x\left(\frac{x}{2}\right)^{-1}}{-1}=\left(\log_x\frac{x}{2}\right)^3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_x\frac{x}{2}=\left(\log_x\frac{x}{2}\right)^3\Leftrightarrow\log_x\frac{x}{2}\left(\log_x\frac{x}{2}-1\right)\left(\log_x\frac{x}{2}+1\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\log_x\frac{x}{2}=0 \text{ lub } \log_x\frac{x}{2}=1, \text{ lub } \log_x\frac{x}{2}=-1\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{2}=1 \text{ lub } \frac{x}{2}=x \text{ lub } \frac{x}{2}=\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow(x=2 \text{ lub } x=\sqrt{2}).$$

1047. $x=3$.

1048. $x=9$.

1049. $x=4$ lub $x=\frac{1}{2}$.

1050. Przy założeniach $x>0$ i $x\neq 1$:
$$x^{\log x}=\frac{x^{10}}{10^{9\log_x 10}}\Leftrightarrow\log x^{\log^2 x}=\log\frac{x^{10}}{10^{9\log_x 10}}\Leftrightarrow\log^3 x=10\log x-9\log_x 10\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log^3 x=10\log x-\frac{9}{\log x}\Leftrightarrow\log^4 x-10\log^2 x+9=0$$

Rozwiązując ostatnie równanie otrzymujemy: $x=\frac{1}{1000}$ lub $x=\frac{1}{10}$, lub $x=10$, lub $x=1000$.

1051. Przy założeniu $x \geqslant 10$ podane równanie można przekształcić do postaci $(x-10)(\log_2(x-3)=2(x-10)$. Stąd $x=10$. Przy założeniu $x \in (3;\ 10)$ otrzymujemy równanie

$$-(x-10)\log_2(x-3)=2(x-10),\ \text{skąd}\ x=\frac{13}{4}.$$

1052. $x=2^{\log_{108}9}$. Wskazówka: $\log_3 x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}$ oraz $\log_4 x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 x}{2}$.

1053. Dziedziną równania jest przedział $(3;\ \infty)$. Mamy

$$\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=-1,\ \text{stąd}\ x=\frac{5+\sqrt{3}}{2}.$$

1054. Łatwo zauważyć, że spośród liczb całkowitych tylko liczba 0 jest rozwiązaniem podanego równania (przyjmujemy, że $0^0=1$). Niech $x>0$, wtedy otrzymujemy $\log x^x=\log(7x)^{7x} \Leftrightarrow x\log x=7x(\log 7+\log x) \Leftrightarrow \log x=7(\log 7+\log x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log x=-\frac{7}{6}\log 7 \Leftrightarrow x=7^{-\frac{7}{6}}$$

Ostatecznie więc rozwiązaniami równania są liczby 0 i $7^{-\frac{7}{6}}$.

1055. $x \in \langle -4;\ 0)\cup(0;\ 5)$.

1056. $x \in \langle -1;\ 0)\cup(8;\ 9\rangle$.

1057. $x \in (-\infty;\ -13)\cup(19;\ \infty)$.

1058. $x \in \left(-\frac{3}{2};\ -\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

1059. $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2-5)] \geqslant 0 \Leftrightarrow [\log_4(x^2-5) \leqslant 1\ \text{i}\ \log_4(x^2-5)>0] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-5 \leqslant 4\ \text{i}\ x^2-5>1) \Leftrightarrow x \in \langle -3;\ -\sqrt{6})\cup(\sqrt{6};\ 3\rangle$.

1060. $x \in (1;\ \sqrt{2})$.

1061. $x \in \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2};\ -2\right)\cup\left(2;\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

1062. $x \in (-4;\ -3\rangle\cup\langle 8;\ \infty)$.

1063. $x \in (-\infty;\ 2)\cup(3;\ \infty)$.

1064. $x \in (1;\ 2)$.

1065. $x \in \left\langle \frac{-3+\sqrt{89}}{4};\ \infty\right)$.

1066. $x \in (-2;\ -1)$.

1067. $x \in (0;\ 1)\cup(2;\ 5)$.

1068. $x \in (\sqrt{5};\ 3\rangle$.

1069. $x \in (4;\ \infty)$.

1070. Nierówność sprzeczna.

1071. $x \in \left(0;\ \frac{1}{9}\right\rangle\cup\langle 9;\ \infty)$.

1072. $x \in \left\langle \frac{1}{2};\ 2\right\rangle$.

1073. $x \in \left(\frac{1}{8};\ 4\right)$.

1074. $x \in \left(\frac{1}{2};\ 4\right)$.

1075. $x \in (1;\ 10)$.

1076. $x \in \left(\frac{1}{16};\ \frac{1}{4}\right)$.

1077. $x \in (-3;\ -2)\cup(0;\ 1)$.

1078. $x \in (1;\ 2)$.

1079. $x \in \langle 1;\ 10\rangle\cup\langle 10000;\ \infty)$.

Wskazówka: $\log\sqrt{\frac{1}{x}}=\log x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\log x$. Podstaw: $\sqrt{\log x}=t$.

1080. Dziedziną nierówności jest zbiór $\boldsymbol{R}_+$.

$$5^{\log x}-3^{\log x-1}<3^{\log x+1}-5^{\log x-1} \Leftrightarrow 5^{\log x}-\frac{1}{3}\cdot 3^{\log x}<3\cdot 3^{\log x}-\frac{1}{5}\cdot 5^{\log x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{\log x}+\frac{1}{5}\cdot 5^{\log x}<3\cdot 3^{\log x}+\frac{1}{3}\cdot 3^{\log x} \Leftrightarrow \frac{6}{5}\cdot 5^{\log x}<\frac{10}{3}\cdot 3^{\log x} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\log x}<\left(\frac{5}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log x<2 \Leftrightarrow \log x<\log 100 \Leftrightarrow x \in (0;\ 100).$$

1081. Oznaczamy $x^{\log_3 x}=t$. Wtedy $t+t^2>12$, stąd $t<-1$ lub $t>3$. Zatem $x^{\log_3 x}<-4$ lub $x^{\log_3 x}>3$, czyli $x^{\log_3 x}>3$.

$$x^{\log_3 x}>3 \Leftrightarrow \left(\log_3^2 x<1 \Leftrightarrow (\log_3 x<-1\ \text{lub}\ \log_3 x>1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x<\frac{1}{3}\ \text{i}\ x>0\ \text{lub}\ x>3\right) \Leftrightarrow x \in \left(0;\ \frac{1}{3}\right)\cup(3;\ \infty).$$

1082. $\log_{2x-3} x<1 \Leftrightarrow \log_{2x-3} x<\log_{2x-3}(2x-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(2x-3>1\ \text{i}\ x<2x-3)\ \text{lub}\ (2x-3<1\ \text{i}\ 2x-3>0,\ \text{i}\ x>2x-3)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{2};\ 2\right)\cup(3;\ \infty)$.

1083. $x \in \left(\frac{1}{5};\ \frac{2}{5}\right)$.

1084. $x \in \left\langle \frac{1}{3};\ \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

1085. $x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

1086. $x \in (-2;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup\langle 2;\ \infty)$.

1087. $x \in (1;\ \infty)$.

1088. $x \in \left(\frac{1}{2};\ 1\right)\cup(6;\ \infty)$.

1089. $x \in (-\infty;\ 0)\cup(5;\ \infty)$.

1090. $x \in \left\langle \frac{1}{2};\ 1\right)$.

1091. $x \in (-4;\ -2-\sqrt{3})\cup(-2+\sqrt{3};\ 0)$.

1092. $x \in \langle -1;\ 1\rangle$.

1093. $x \in \left(0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle\cup\langle 2;\ \infty)$.

1094. $x \in (0;\ \sqrt{2}-1\rangle\cup\langle 3;\ \infty)$. Wskazówka: $\log_{x+1}2=\dfrac{1}{\log_2(x+1)}$.

1095. Ponieważ nierówność ma sens tylko dla $x>0$ więc:

$x^{2+\log_2^2 x-\log_2 x^2}-\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow x^{2+\log_2^2 x-2\log_2 x}>x^{-1} \Leftrightarrow \log_2 x^{2+\log_2^2 x-2\log_2 x}>$

$>\log_2 x^{-1} \Leftrightarrow (2+\log_2^2 x-2\log_2 x)\log_2 x>-\log_2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2+\log_2^2 x-2\log_2 x)\log_2 x+\log_2 x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 x(3+\log_2^2 x-2\log_2 x)>0 \Leftrightarrow \log_2 x>0 \Leftrightarrow x \in (1;\ \infty)$.

1096. Wiadomo, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ (równość wtedy i tylko wtedy, gdy $a \geqslant 0$ lub $b \geqslant 0$ lub $a \leqslant 0$ i $b \leqslant 0$. Ponieważ w naszej nierówności $x>0$, więc będzie ona prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\log x<0$, czyli gdy $x \in (0;\ 1)$.

1097. $x \in (0;\ 10\rangle$. Wskazówka: Nierówność jest równoważna alternatywnie: $(2-\log x \geqslant 0$ i $\log x<0)$ lub $(2-\log x \geqslant 0$ i $\log x \geqslant 0$ i $2-\log x \geqslant \log^2 x)$.

1098. Dziedziną nierówności jest przedział $\langle 0;\ \infty)$.
Jeżeli $x=0$ lub $x=1$, to nierówność jest sprzeczna.
Niech $x>0$ i $x \neq 1$. Wtedy:

$$x^{\frac{3}{4}x} < \sqrt{x}^{x^2-x+1} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x\log x < \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\log x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[x \in (0;\ 1) \text{ i } \frac{3}{4}x > \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \text{ lub } x \in (1;\ \infty) \text{ i } \frac{3}{4}x < \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right].$$

Stąd: $x \in \left(\frac{1}{2};\ 1\right) \cup (2;\ \infty)$.

1099. Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera. Jeżeli $x=-1$ lub $x=1$, to nierówność jest sprzeczna.
Niech $x \neq -1$ i $x \neq 0$, i $x \neq 1$. Wtedy:
$|x|^{x^2-x-2}<1 \Leftrightarrow (x^2-x-2)\log|x|<0$.
Rozwiązując ostatnią nierówność otrzymujemy $x \in (1;\ 2)$.

1100. $x \in (-1;\ 0)$.

1101. $D_f = -\left\langle \frac{1}{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

1102. $D_f = \left\langle \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ 0\right) \cup \left\langle \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \infty\right)$.

1103. $D_f = \left(1;\ \frac{3}{2}\right\rangle$.

1104. $D_f = \langle 2;\ 4)$.

1105. $D_f = \left\langle \frac{7}{3};\ \infty\right)$.

1106. $D_f = (-\infty;\ 1\rangle \cup \langle 3;\ \infty)$.

1107. $D_f = \langle -\sqrt{3};\ -1) \cup (-1;\ \sqrt{3}\rangle$.

1108. $D_f = \left(\frac{1}{2};\ \frac{6}{5}\right\rangle$.

1109. $D_f = \left\langle \frac{1}{9};\ 1\right\rangle$.

1110. $D_f = (0;\ 2) \cup (2;\ 8\rangle$.

1111. $D_f = \langle -\sqrt{8};\ 0) \cup (0;\ \sqrt{8}\rangle$.

1112. $D_f = \left(-\infty;\ \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{3}}{2};\ \infty\right)$.

1113. $D_f = (1;\ 2)$.

1114. $D_f = (0;\ 1) \cup (2;\ \infty)$.

1115. $D_f = \langle 4+\sqrt{2};\ \infty)$.

1116. $D_f = (10^{-6};\ 10^3)$.

1117. $x=2$ i $y=3$ lub $x=3$ i $y=2$.

1118. $x=1$ i $y=2$ lub $x=2$ i $y=1$.

1119. Jeżeli $y=-1$, to $x=7$ i jak łatwo sprawdzić jest to rozwiązanie układu. Innym rozwiązaniem układu będzie para liczb spełniających układ równań $3x+2y-1=0$ i $x+y=6$, czyli $x=-11$ i $y=17$.

1120. $x=4$ i $y=25$ lub $x=25$ i $y=4$.

1121. Przy założeniach $x>0$ i $x \neq 1$ mamy:

$$(\log_x 8 = y+1 \text{ i } x^y = 6-x) \Leftrightarrow (y=\log_x 8-1 \text{ i } x^{\log_x 8-1}=6-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y=\log_x 8-1 \text{ i } \frac{x^{\log_x 8}}{x}=6-x\right) \Leftrightarrow \left(y=\log_x 8-1 \text{ i } \frac{8}{x}=6-x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y=\log_x 8-1 \text{ i } x^2-6x+8=0).$$

Stąd otrzymujemy: $x=2$ i $y=2$ lub $x=4$ i $y=\frac{1}{2}$.

1122. $x=9$ i $y=7$.

1123. $x=\frac{3}{2}$ i $y=\frac{1}{2}$.

1124. $A \cap B = \langle -4;\ 1)$.

1125. $A \setminus B = (-\infty;\ 0\rangle \cup \langle 100\,000;\ \infty)$.
Wskazówka: $A = \left\{x \in \boldsymbol{R}:\ \bigvee_{s \in \boldsymbol{R}} s^2-xs+x \leqslant 0\right\} = \{x \in \boldsymbol{R}: x^2-4x \geqslant 0\}$.

1126. $A \cap B = \left\langle 1;\ \frac{3}{2}\right)$.

1127. Wykorzystując nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb 2^x i 2^{-x} otrzymujemy $\frac{2^x+2^{-x}}{2} \geqslant \sqrt{2^x 2^{-x}}$, czyli $2^x+2^{-x}-2 \geqslant 0$.

Stąd $2^x+2^{-x}-1 \geqslant 1$, a więc $\frac{1}{2^x+2^{-x}-1} \leqslant 1$.

1128. Zadanie sprowadza się do zbadania, dla jakich a, b równanie $a2^x+b=b2^{-x}+a$ z niewiadomą x ma dokładnie jedno rozwiązanie. Przekształcając to równanie otrzymujemy: $a2^{2x}+(b-a)2^x-b=0$. Oznaczając $2^x=t$ otrzymujemy równanie kwadratowe $at^2+(b-a)t-b=0$.
Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy powyższe równanie będzie mieć jedno rozwiązanie dodatnie lub dwa rozwiązania różnych znaków (jedno dodatnie i drugie ujemne). Rozwiązując zagadnienie otrzymujemy: $ab>0$.

1129. $a \in (2;\ \infty)$. Wskazówka: Zauważmy, że $4-\sqrt{15}=\frac{1}{4+\sqrt{15}}$.

Podstawiając $(4+\sqrt{15})^x=t$ otrzymujemy równanie $\frac{1}{t}+t=a$, czyli $t^2-at+1=0$.

1130. Dla $x=\log_2 5$. Różnica ciągu jest równa 1.

1131. Z treści zadania otrzymujemy układ nierówności:
$(2^a-1)^2+12(4^{a-1}-2^{a-2})>0$ i $-3(4^{a-1}-2^{a-2})<0$. Stąd $a \in (0;\ \infty)$.

1132. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $(2^{a+2})^2-4(2^{a+3}-12)<0$. Rozwiązując powyższą nierówność otrzymujemy $a\in(-\infty;\ 0)$.

1133. $m=1$ lub $m=2$.

1134. $x\in(-\infty;\ -1\rangle\cup\langle 1;\ \infty)$.

1135. Zauważmy, że: $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}-\left(\frac{3}{4}\right)^{y-x}=\frac{7}{12}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}-\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}}=\frac{7}{12}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}=t \text{ i } t-\frac{1}{t}=\frac{7}{12}\right]\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\Leftrightarrow y=x+1.$

Zatem podanemu układowi równoważny jest układ warunków $y=x+1$ i $xy+y\leqslant 9$, czyli układ $y=x+1$ i $x^2+2x-8\leqslant 0$. Stąd $x\in\langle -4;\ 2\rangle$. Wobec tego największą liczbą x spełniającą układ jest liczba 2.

1136. Jedynym punktem wspólnym wykresów funkcji f i g jest punkt $A=(2;\ 4)$.

1137. Z twierdzenia Bezoute'a wynika, że wielomian $W(x)$ będzie podzielny przez dwumian $x+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(-1)=0$. W naszym przypadku $W(-1)=\log^2 m+\log m-6$. Wobec tego rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania równania $\log^2 m+\log m-6=0$. Stąd $m=0{,}001$ lub $m=100$.

1138. Rozwiązując równanie otrzymujemy układ warunków:

$x^2+(2-k)x+1=0$ i $x>-1$, i $kx>0$. (1)

Oznaczmy przez Δ wyróżnik trójmianu kwadratowego $x^2+(2-k)x+1$, przez x_1 i x_2 jego pierwiastki w przypadku, gdy $\Delta>0$, a przez x_0 jedyny pierwiastek trójmianu, gdy $\Delta=0$. Załóżmy, że $x_1<x_2$. Układ (1) będzie miał dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy: $\Delta=0$ i $k>0$ i $x_0>0$ lub $\Delta=0$ i $k<0$, i $x_0>-1$, i $x_0<0$, lub $\Delta>0$ i $x_1\geqslant -1$, i $x_2>-1$, i $x_2<0$, i $k<0$.

Powyższa alternatywa będzie prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $k=4$ lub $k<0$.

1139. Wskazówka: Porównaj rozwiązanie zadania 1138.

1140. Rozwiązując równanie otrzymujemy układ warunków: $x^2-(a+2)x+1=0$ i $x>0$, i $x\neq 1$. Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta\geqslant 0$ i $x_1^2+x_2^2=34$ i $x_1,\ x_2\in(0;\ 1)\cup(1;\ \infty)$.

Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy $a=-2+4\sqrt{2}$.

1141. Liczby $\log_2(x-4)$, $\log_2(2x)$, $\log_2 x^2$ będą kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego wtedy i tylko wtedy, gdy $\log_2(2x)-\log_2(x-4)=\log_2 x^2 \log_2(2x)$. Stąd $x=8$. Różnica r rozważanego ciągu będzie równa $r=\log_2(2\cdot 8)-\log_2(8-4)=2$.

1142. Oznaczmy przez (a_n) rozważany ciąg geometryczny, a przez q jego iloraz. Wtedy $a_1+a_1q+a_1q^2=62$ i $\log a_1+\log(a_1q)+\log(a_1q^2)=3$ i $q>1$. Stąd $a_1=2$ i $q=5$.

1143. Z treści zadania otrzymujemy układ: $x_1+x_2+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$ i $\log_2 x_2-\log_2 x_1=$

$=\log_2\frac{1}{2}-\log_2 x_2$. Stąd $x_1=\frac{1}{8}$ i $x_2=\frac{1}{4}$.

Różnica r rozważanego ciągu arytmetycznego jest równa $r=\log_2\frac{1}{4}-\log_2\frac{1}{8}=1$.

Zatem wyraz piąty tego ciągu jest równy $\log_2\frac{1}{8}+4\cdot 1=1$.

1144. Wstawiając do nierówności $x=3\frac{3}{4}$ otrzymujemy $\log_a\frac{45}{16}>\log_a\frac{15}{16}$. Z treści zadania wiadomo, że powyższa nierówność jest prawdziwa. Stąd i z faktu, że $\frac{45}{16}>\frac{15}{16}$ wynika, że $a>1$. Przy założeniu, że $a>1$: $\log_a(x^2-3x)>\log_a(4x-x^2)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x^2-3x>4x-x^2$ i $4x-x^2>0)$. Rozwiązując ostatni układ nierówności otrzymujemy $x\in\left(3\frac{1}{2};\ 4\right)$.

1145. $D_f=\boldsymbol{R}_+$. $f(x^2)<2\Leftrightarrow(\log_3 x^2<2$ i $x\in\boldsymbol{R}_+)\Leftrightarrow(x^2<9$ i $x\in\boldsymbol{R}_+)\Leftrightarrow x\in(0;\ 3)$.

1146. $x\in\left(0;\ \frac{1}{9}\right\rangle\cup\langle 9;\ \infty)$. **1147.** $x\in(27;\ \infty)$. **1148.** $x\in\left(\frac{1}{3};\ 9\right)$.

1149. $x\in(-\infty;\ -\sqrt{17})\cup(\sqrt{17};\ \infty)$.

Wskazówka: Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-16)+\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-16)}\leqslant -2$.

1150. $a\in\left\langle\frac{1}{16};\ 1\right\rangle$.

1151. $m\in\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 2\right)$. **1152.** $a\in\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{\sqrt[5]{16}}\right)\cup(1;\ 2)$.

1153. Rozwiązując równanie otrzymujemy układ $x^2-(a+3)x+4=0$ i $x>a$ i $x>\frac{4}{3}$.

Załóżmy, że $x_1<x_2$. Warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta>0$ i $x_1>a$, i $x_1>\frac{4}{3}$, czyli gdy $a^2+6a-7>0$ i $\frac{a+3-\sqrt{a^2+6a-7}}{2}>a$ i $\frac{a+3-\sqrt{a^2+6a-7}}{2}>\frac{4}{3}$. Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy $a\in\left(1;\ \frac{4}{3}\right)$.

1154. $a\in\left(\frac{1}{10};\ 1\right)$.

1155. Podane równanie przekształcamy następująco:

$\frac{\log(-x)+\log t}{\log(3-x)}=2\Leftrightarrow[\log(-tx)=\log(3-x)^2$ i $x<0$ i $t>0]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[x^2+(t-6)x+9=0$ i $x<0$ i $t>0]$.

Zauważmy, że równanie $x^2+(t-6)x+9=0$ może mieć tylko rozwiązania jednakowych znaków. Warunki zadania będą więc spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta=0$ i $x_0<0$ i $t>0$. Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy $t=12$, wtedy $x_0=-3$.

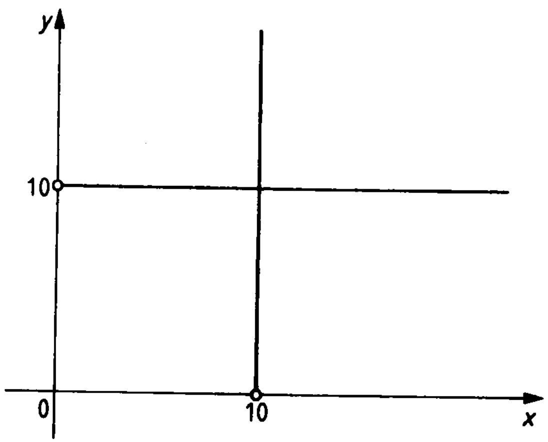
1156. $m\in(1;\infty)$. **1157.** $m=10^{\sqrt{15}}$ lub $m=10^{-\sqrt{15}}$.

1158. Dziedziną równania jest przedział $(0;\infty)$. Zakładając, że $x\in(0,\infty)$ i $a\neq 0$ mamy:
$\log_2(x+3)-2\log_4 x=a \Leftrightarrow \log_2(x+3)-\log_2 x=a \Leftrightarrow \log_2\frac{x+3}{x}=a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x}=2^a \Leftrightarrow x=\frac{3}{2^a-1}$. Wystarczy zbadać, dla jakiego a jest prawdą, że
$3\leqslant\frac{3}{2^a-1}<4$. Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy $a\in\left(\log_2\frac{7}{4};\,1\right\rangle$.

1159. Rozwiązując w zbiorze liczb naturalnych nierówność podaną w zadaniu otrzymujemy $n\in\{1,2,3,\dots,63\}$. W zbiorze tym, liczbami podzielnymi przez 3 są liczby: 3, 6, 9, ..., 63. Ciąg (3, 6, 9, ..., 63) jest ciągiem arytmetycznym o wyrazie pierwszym 3, różnicy 3 i liczbie wyrazów 21.
Stąd $3+6+9+\dots+63=\frac{(3+63)\,21}{2}=693$.

1160. $m\in\left(0;\frac{\sqrt{10}}{10\,000}\right)\cup(\sqrt[3]{100};\infty)$.

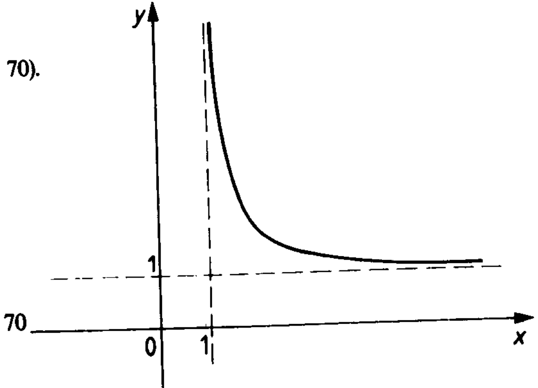
1161. Przy założeniach $x>0$ i $y>0$ mamy: $\log\frac{xy}{10}=\log x\cdot\log y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log x+\log y-1=\log x\cdot\log y \Leftrightarrow (\log x-1)(1-\log y)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x=10$ lub $y=10)$ (rys. 69).



Rys. 69

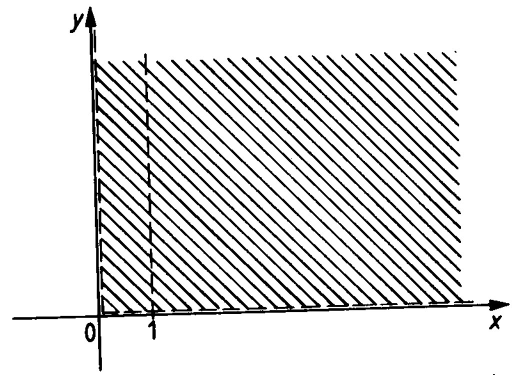
1162. $\log x+\log y=\log(x+y) \Leftrightarrow [\log(xy)=\log(x+y)$ i $x>0$, i $y>0] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (xy=x+y$ i $x>0,\ y>0) \Leftrightarrow [y(x-1)=x$ i $x>0$, i $y>0]$.
Jeżeli $x=1$, to układ powyższy jest sprzeczny. Jeżeli $x\neq 1$, to otrzymujemy:

$y=\frac{x}{x-1}$ i $x>0$ i $y>0$ (rys. 70).



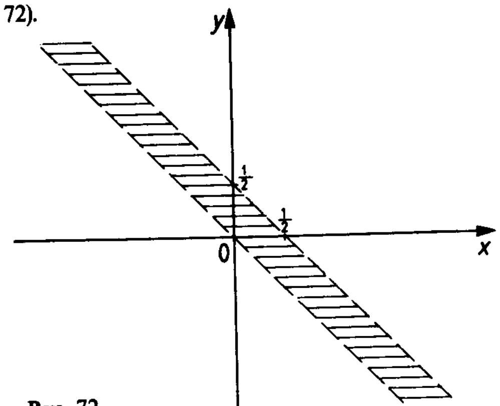
Rys. 70

1163. $1+\log_x y=\log_x(xy) \Leftrightarrow 1+\log_x y=\log_x x+\log_x y \Leftrightarrow 1+\log_x y=1+\log_x y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x>0$ i $x\neq 1$, i $y>0)$ (rys. 71).



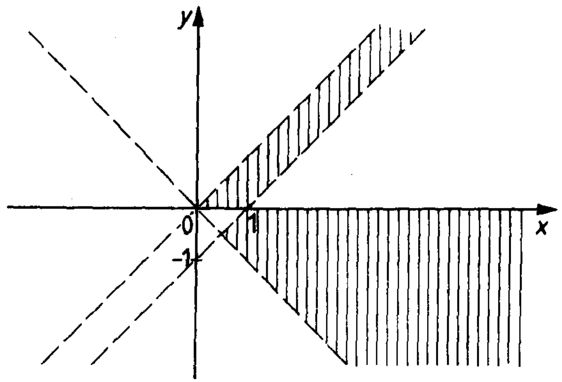
Rys. 71

1164. $\log_{\frac{1}{2}}(x+y)>1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+y)>\log_{1/2}\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x+y<\frac{1}{2}\text{ i } x+y>0\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(y<-x+\frac{1}{2}\text{ i } y>-x\right)$ (rys. 72).



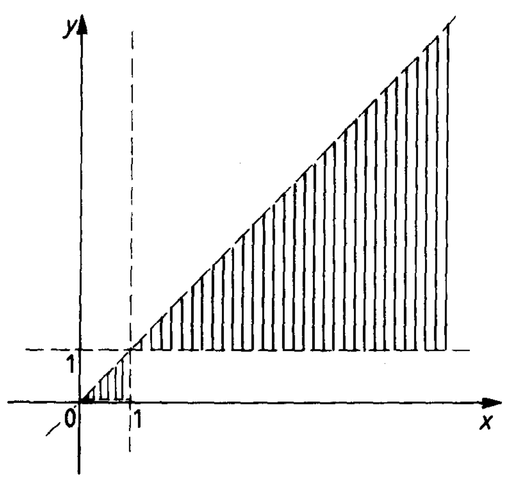
Rys. 72

1165. $\log_{x-y}(x+y)\leqslant 1\Leftrightarrow \log_{x-y}(x+y)\leqslant \log_{x-y}(x-y)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow[(x-y>1$ i $x+y>0,\ x+y\leqslant x-y)$ lub $(x-y>0$ i $x-y<1$, i $x+y\geqslant x-y)]\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow[(y<x-1$ i $y>-x$, i $y\leqslant 0)$ lub $(y<x$ i $y>x-1$, i $y\geqslant 0)]$ (rys. 73).



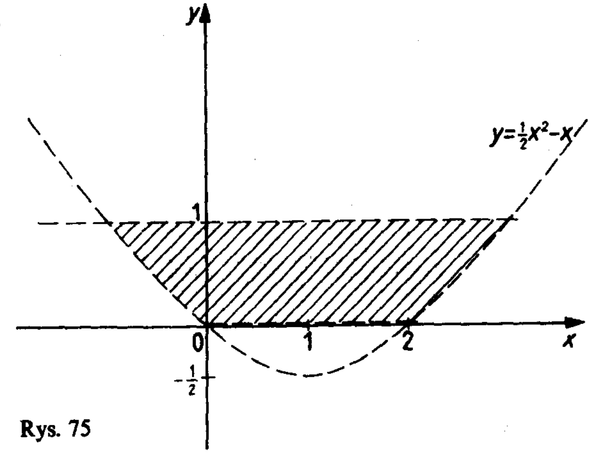
Rys. 73

1166. $\log_x(\log_y x)>0\Leftrightarrow \log_x(\log_y x)>\log_x 1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow[(x>1$ i $\log_y x>1)$ lub $(x>0$ i $x<1$, i $\log_y x>0$, i $\log_y x<1)]\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow[(x>1$ i $\log_y x>\log_y y)$ lub $(x>0$ i $x<1$, i $\log_y x>\log_y 1$, i $\log_y x<\log_y y)]\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow[(x>1$ i $y>1,\ x>y$, lub $(x>0$ i $x<1,\ y>0$, i $y<1)]$ (rys. 74).



Rys. 74

1167. Rys. 75.



Rys. 75

§ 10. Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne. Równania i nierówności trygonometryczne.

1168. 1.

1169. $\frac{1}{2}$.

1170. $-\frac{3}{2}$. Wskazówka: $\operatorname{tg}89^\circ=\operatorname{ctg}1^\circ$.

1171. $3\operatorname{tg}41^\circ\cdot\operatorname{tg}43^\circ\cdot\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}47^\circ\cdot\operatorname{tg}49^\circ=3\operatorname{tg}41^\circ\cdot\operatorname{tg}43^\circ\cdot\operatorname{ctg}43^\circ\cdot\operatorname{ctg}41^\circ=$
$=3(\operatorname{tg}41^\circ\cdot\operatorname{ctg}41^\circ)(\operatorname{tg}43^\circ\cdot\operatorname{ctg}43^\circ)=3\cdot1\cdot1=3.$

1172. $3-\operatorname{tg}18^\circ\cdot\operatorname{tg}288^\circ+\sin32^\circ\cdot\sin148^\circ-\sin302^\circ\cdot\sin122^\circ=$
$=3-\operatorname{tg}18^\circ\cdot\operatorname{tg}(270^\circ+18^\circ)+\sin32^\circ\cdot\sin(180^\circ-32^\circ)-\sin(270^\circ+32^\circ)\sin(90^\circ+32^\circ)=$
$=3+\operatorname{tg}18^\circ\cdot\operatorname{ctg}18^\circ+\sin^2 32^\circ+\cos^2 32^\circ=5.$

1173. $\frac{1}{4}$.

1175. $-\frac{3}{4}$.

1174. $-\frac{3}{2}$.

1176. 0.

1177. $\sin75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin45^\circ\cdot\cos30^\circ+\cos45^\circ\cdot\sin30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=$
$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

1178. $2-\sqrt{3}$.

1179. $\cos27^\circ\cdot\cos18^\circ-\sin27^\circ\cdot\sin18^\circ=\cos(27^\circ+18^\circ)=\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

1180. $\dfrac{\sin 52^\circ\cdot\cos 7^\circ-\cos 128^\circ\cdot\cos 97^\circ}{\cos 53^\circ\cdot\cos 7^\circ-\cos 37^\circ\cdot\cos 83^\circ}=\dfrac{\sin 52^\circ\cdot\cos 7^\circ-\cos 52^\circ\cdot\sin 7^\circ}{\cos 53^\circ\cdot\cos 7^\circ-\sin 53^\circ\cdot\sin 7^\circ}=\dfrac{\sin(52^\circ-7^\circ)}{\cos(53^\circ+7^\circ)}=$
$=\sqrt{2}.$

1181. 1.

1182. 1.

1183. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

1184. 2.

1185. $\dfrac{7}{4}.$

1186. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

1187. 12.

1188. 4.

1189. $\sqrt{2}.$

1190. $\cos 36^\circ\cdot\cos 72^\circ=\dfrac{2\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ\cdot\cos 72^\circ}{2\sin 36^\circ}=\dfrac{\sin 72^\circ\cdot\cos 72^\circ}{2\sin 36^\circ}=\dfrac{\sin 144^\circ}{4\sin 36^\circ}=\dfrac{1}{4}.$

1191. $8\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=\dfrac{8\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=$
$=\dfrac{4\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\dfrac{2\sin 80^\circ\cdot\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\dfrac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=1.$

1192. $(\sin 10^\circ)^{-1}-\sqrt{3}(\cos 10^\circ)^{-1}=\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=\dfrac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}=$
$=\dfrac{2(\cos 10^\circ-\operatorname{tg}60^\circ\cdot\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ}=\dfrac{2(\cos 60^\circ\cdot\cos 10^\circ-\sin 60^\circ\cdot\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ\cdot\cos 60^\circ}=$
$=\dfrac{2\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ\cdot\cos 60^\circ}=\dfrac{2\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ\cdot\cos 60^\circ}=4.$

1193. $\sin 35^\circ+\sin 25^\circ-\sin 95^\circ=\sin 35^\circ-(\sin 95^\circ-\sin 25^\circ)=\sin 35^\circ-2\cos 60^\circ\cdot\sin 35^\circ=0.$

1194. $\dfrac{1-4\sin 10^\circ\cdot\sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}=\dfrac{1-4\sin 10^\circ\cdot\cos 20^\circ}{2\sin 10^\circ}=\dfrac{\cos 10^\circ-4\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ\cdot\cos 20^\circ}{2\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}=$
$=\dfrac{\cos 10^\circ-2\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\dfrac{\cos 10^\circ-\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}=\dfrac{\sin 80^\circ-\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}=$
$=\dfrac{2\cos 60^\circ\cdot\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=1.$

1195. $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ=\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ=$
$=\dfrac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ}+\dfrac{\cos 9^\circ}{\sin 9^\circ}-\dfrac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ}-\dfrac{\cos 27^\circ}{\sin 27^\circ}=\dfrac{\sin^2 9^\circ+\cos^2 9^\circ}{\sin 9^\circ\cdot\cos 9^\circ}-\dfrac{\sin^2 27^\circ+\cos^2 27^\circ}{\sin 27^\circ\cdot\cos 27^\circ}=$
$=\dfrac{2}{\sin 18^\circ}-\dfrac{2}{\sin 54^\circ}=\dfrac{2\sin 54^\circ-2\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ}=\dfrac{4\cos 36^\circ\cdot\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ}=\dfrac{4\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ}=$
$=\dfrac{4\cos 36^\circ}{\sin(90^\circ-36^\circ)}=4.$

1196. $\cos 36^\circ-\cos 72^\circ=2\sin 54^\circ\cdot\sin 18^\circ=\dfrac{2\sin 54^\circ\cdot\cos 54^\circ\cdot 2\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ}{2\cos 54^\circ\cdot\cos 18^\circ}=$
$\dfrac{\sin 108^\circ\cdot\sin 36^\circ}{2\cos 54^\circ\cdot\cos 18^\circ}=\dfrac{\cos 18^\circ\cdot\cos 54^\circ}{2\cos 54^\circ\cdot\cos 18^\circ}=\dfrac{1}{2}.$

1197. $\cos 24^\circ+\cos 48^\circ-\cos 84^\circ-\cos 12^\circ=2\cos 36^\circ\cdot\cos 12^\circ-2\cos 48^\circ\cdot\cos 36^\circ=$
$=2\cos 36^\circ(\cos 12^\circ-\cos 48^\circ)=4\cos 36^\circ\cdot\sin 18^\circ\cdot\sin 30^\circ=2\cos 36^\circ\cdot\sin 18^\circ=$
$=\dfrac{2\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ\cdot\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}=\dfrac{2\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ}=\dfrac{\sin 72^\circ}{2\sin 72^\circ}=\dfrac{1}{2}.$

1198. 8.

1199. $\sqrt{3}\operatorname{ctg}20^\circ-4\cos 20^\circ=\dfrac{\sqrt{3}\cos 20^\circ-4\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\dfrac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ-\sin 40^\circ\right)}{\sin 20^\circ}=$
$=\dfrac{2\sin 60^\circ\cdot\cos 20^\circ-2\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}=\dfrac{\sin 80^\circ-\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}=\dfrac{2\cos 60^\circ\cdot\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=1.$

1200. $\operatorname{ctg}10^\circ\cdot\operatorname{ctg}50^\circ\cdot\operatorname{ctg}70^\circ=\dfrac{\cos 10^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ}{\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ}=\dfrac{(\cos 60^\circ+\cos 40^\circ)\cos 70^\circ}{-(\cos 60^\circ-\cos 40^\circ)\sin 70^\circ}=$
$=\dfrac{\frac{1}{2}\cos 70^\circ+\cos 40^\circ\cdot\cos 70^\circ}{-\frac{1}{2}\sin 70^\circ+\cos 40^\circ\cdot\sin 70^\circ}=\dfrac{\frac{1}{2}\cos 70^\circ+\frac{1}{2}(\cos 110^\circ+\cos 30^\circ)}{-\frac{1}{2}\sin 70^\circ+\frac{1}{2}(\sin 110^\circ+\sin 30^\circ)}=$
$=\dfrac{\frac{1}{2}\cos 70^\circ+\frac{1}{2}(-\cos 70^\circ+\cos 30^\circ)}{-\frac{1}{2}\sin 70^\circ+\frac{1}{2}(\sin 70^\circ+\sin 30^\circ)}=\operatorname{ctg}30^\circ=\sqrt{3}.$

1201. $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\cdot 1+\cos^2\alpha=$
$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

1202. $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$
$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$
$=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1.$

1203. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin^2\alpha.$

1204. $\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha(1+\sin\alpha)+\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=$
$=\dfrac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}=\dfrac{1}{\cos\alpha}.$

1205. $$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}=\frac{2+2\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}=$$
$$=\frac{2(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}.$$

1206. $$\frac{\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha(\sin^2\alpha-1)}=\frac{\sin^4\alpha(-\sin^2\alpha)}{\cos^4\alpha(-\cos^2\alpha)}=\frac{\sin^6\alpha}{\cos^6\alpha}=\mathrm{tg}^6\alpha.$$

1207. $$\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}=\frac{1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}=$$
$$=\frac{2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}=\frac{2}{3}.$$

1208. $$2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)+1=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)+1=$$
$$=2(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)+1=$$
$$=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+1=$$
$$=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-(\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)+1=$$
$$=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2+1=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-1+1=$$
$$=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha).$$

1209. $$\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}+\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)}=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}}+\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}}=1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta+1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=2.$$

1210. $$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\cdot\sin\beta(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)=$$
$$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta=$$
$$=(\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta)+(\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta)+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta=$$
$$=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta+\sin^2\beta\cdot\cos^2\alpha=$$
$$=(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)^2=\sin^2(\alpha+\beta).$$

1211. $$\cos(4\alpha)+8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-2\sin^2(2\alpha)+2\sin^2(2\alpha)=1.$$

1212. $$3+4\cos(2\alpha)+\cos(4\alpha)=3+4\cos(2\alpha)+2\cos^2(2\alpha)-1=$$
$$=2[1+2\cos(2\alpha)+\cos^2(2\alpha)]=2[1+\cos(2\alpha)]^2=2(1+2\cos^2\alpha-1)^2=8\cos^4\alpha.$$

1213. $$[1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}(2\alpha)]^{-1}=\frac{1}{1+\mathrm{tg}\alpha\dfrac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos(2\alpha).$$

1214. $$\frac{\cos^2(2\alpha)-4\cos^2\alpha+3}{\cos^2(2\alpha)+4\cos^2\alpha-1}=\frac{(2\cos^2\alpha-1)^2-4\cos^2\alpha+3}{(2\cos^2\alpha-1)^2+4\cos^2\alpha-1}=\frac{(1-\cos^2\alpha)^2}{\cos^4\alpha}=$$
$$=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\mathrm{tg}^4\alpha.$$

1215. $$\frac{1+\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=\frac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$
$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}.$$

1216. $$\frac{1+\cos(4\alpha)}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\sin^2(2\alpha)+\cos^2(2\alpha)+\cos^2(2\alpha)-\sin^2(2\alpha)}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{2\cos^2(2\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos(2\alpha)}=$$
$$=\cos(2\alpha)\cdot\sin(2\alpha)=\frac{\sin(4\alpha)}{2}.$$

1217. $$\frac{\mathrm{ctg}(2\alpha)+\mathrm{tg}(2\alpha)}{1+\mathrm{tg}(2\alpha)\cdot\mathrm{tg}(4\alpha)}=\frac{\dfrac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}+\dfrac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}}{1+\dfrac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}\cdot\dfrac{\sin(4\alpha)}{\cos(4\alpha)}}=$$
$$=\frac{1}{\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\alpha)}\cdot\frac{\cos(2\alpha)\cdot\cos(4\alpha)}{\cos(2\alpha)\cdot\cos(4\alpha)+\sin(2\alpha)\cdot\sin(4\alpha)}=\frac{1}{\sin(2\alpha)}\cdot\frac{\cos(4\alpha)}{\cos(4\alpha-2\alpha)}=$$
$$=\frac{2\cos(4\alpha)}{2\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\alpha)}=\frac{2\cos(4\alpha)}{\sin(4\alpha)}=2\,\mathrm{ctg}(4\alpha).$$

1218. $$\cos(4\alpha)\cdot\mathrm{tg}(2\alpha)-\sin(4\alpha)=\frac{(2\cos^2(2\alpha)-1)\sin(2\alpha)-\sin(4\alpha)\cdot\cos(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=$$
$$=\frac{2\cos^2(2\alpha)\cdot\sin(2\alpha)-2\sin(2\alpha)\cdot\cos^2(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=-\mathrm{tg}(2\alpha)=\frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}.$$

1219. $$\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\cos\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2}=\frac{1-\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

1220. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1219.

1221. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1219.

1222. $$\sin\alpha=\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

1223. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1222.

1224. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\cos\alpha}.$

1225. $\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=$
$=\frac{1-\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}.$

1226. $\frac{2\sin\alpha-\sin(2\alpha)}{2\sin\alpha+\sin(2\alpha)}=\frac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$

1227. $\frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$

1228. $\sin(3\alpha)=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin(2\alpha)\cdot\cos\alpha+\cos(2\alpha)\cdot\sin\alpha=$
$=2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha=$
$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$

1229. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1228.

1230. $1+\cos(2\alpha)+\cos(4\alpha)+\cos(6\alpha)=[1+\cos(2\alpha)]+[\cos(6\alpha)+\cos(4\alpha))]=$
$=2\cos^2\alpha+2\cos(5\alpha)\cdot\cos\alpha=2\cos\alpha[\cos(5\alpha)+\cos\alpha]=$
$=2\cos\alpha\cdot2\cos(3\alpha)\cdot\cos(2\alpha)=4\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos(3\alpha).$

1231. Wskazówka: $\sin(2\alpha)+\sin(4\alpha)-\sin(6\alpha)=[\sin(4\alpha)+\sin(2\alpha)]-\sin[2\cdot(3\alpha)].$

1232. Wskazówka: Zamień sumę $\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\alpha$ na iloczyn.

1233. $\sin(250°+\alpha)\cdot\cos(200°-\alpha)-\cos240°\cdot\cos(220°-2\alpha)=$
$=\frac{1}{2}[\sin450°+\sin(50°+2\alpha)]+\frac{1}{2}\cos[270°-(50°+2\alpha)]=$
$=\frac{1}{2}[1+\sin(50°+2\alpha)-\sin(50°+2\alpha)]=\frac{1}{2}.$

1234. Wskazówka: Zamień na iloczyny sumy: $\sin(4\alpha)+\sin(2\alpha)$ i $\cos(4\alpha)+\cos(2\alpha)$.

1235. $\frac{\sin(2\alpha)-\sin(3\alpha)+\sin(5\alpha)}{1+\cos\alpha-2\sin^2(2\alpha)}=\frac{\sin(2\alpha)+2\cos(4\alpha)\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos(4\alpha)}=$
$=\frac{2\sin\alpha(\cos\alpha+\cos(4\alpha))}{\cos\alpha+\cos(4\alpha)}=2\sin\alpha.$

1236. Wskazówka: Zamień sumę po prawej stronie tożsamości na iloczyn.

1237. Wskazówka: Zamień różnicę po prawej stronie tożsamości na iloczyn.

1238. Wskazówka: Zamień sumę po prawej stronie tożsamości na iloczyn.

1239. Wskazówka: Zamień różnicę po prawej stronie tożsamości na iloczyn.

1240. $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}\cdot2\cos\frac{2\alpha+2\beta}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha-2\beta}{2}=\frac{1}{2}[\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)]=$
$\frac{1}{2}(2\cos^2\alpha-1+1-2\sin^2\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$

1241. $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)=[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)]+\sin(\alpha-\gamma)=$
$=2\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-2\beta+\gamma}{2}+2\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=$
$=2\sin\frac{x-\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-2\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\right]=4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$

1242. $\sin^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-\sin^2(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=$
$=[\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta)][\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta)]=$
$=2\sin(\alpha+\gamma)\cdot\cos(\beta+\delta)\cdot2\cos(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\delta)=\sin(2\alpha+2\gamma)\cdot\sin(2\beta+2\delta).$

1243. $\operatorname{tg}(3\alpha)-\operatorname{tg}(2\alpha)-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(3\alpha)}{\cos(3\alpha)}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=$
$=\frac{\sin(3\alpha)\cdot\cos\alpha-\cos(3\alpha)\cdot\sin\alpha}{\cos(3\alpha)\cdot\cos\alpha}-\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=\frac{\sin(3\alpha-\alpha)}{\cos(3\alpha)\cdot\cos\alpha}-\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=$
$=\frac{\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\alpha)-\sin(2\alpha)\cdot\cos(3\alpha)\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos(3\alpha)}=\frac{\sin(2\alpha)[\cos(2\alpha)-\cos(3\alpha)\cdot\cos\alpha]}{\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos(3\alpha)}=$
$=\operatorname{tg}(2\alpha)\cdot\frac{\cos(2\alpha)-\frac{1}{2}[\cos(4\alpha)+\cos(2\alpha)]}{\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)}=\operatorname{tg}(2\alpha)\cdot\frac{\frac{1}{2}[\cos(2\alpha)-\cos(4\alpha)]}{\cos\alpha\cdot\cos(3\alpha)}=$
$=\operatorname{tg}(2\alpha)\cdot\frac{\frac{1}{2}2\sin(3\alpha)\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos(3\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(2\alpha)\cdot\operatorname{tg}(3\alpha).$

1244. $\frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}=\frac{1-1+2\sin^2\alpha}{1+2\cos^2\alpha-1}=\operatorname{tg}^2\alpha.$

$\operatorname{tg}^2 75°=\frac{1-\cos150°}{1+\cos150°}=7+4\sqrt{3}$. Wobec tego $\operatorname{tg}75°=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

1245. Ponieważ $\sin36°=\cos54°$, więc $\sin(2\cdot18°)=\cos(3\cdot18°)$
a tym samym $2\sin18°\cdot\cos18°=4\cos^3 18°-3\cos18°$.
Stąd i z nierówności $\cos18°>0$ wynika, że $2\sin18°=4\cos^2 18°-3$,
czyli $4\sin^2 18°+2\sin18°-1=0$.

Wykorzystując tę równość i fakt, że $\sin18°>0$ otrzymujemy $\sin18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1246. $\dfrac{2\sin 6^\circ+\sin 12^\circ}{2\sin 6^\circ-\sin 12^\circ}=\dfrac{2\sin 6^\circ+2\sin 6^\circ\cdot\cos 6^\circ}{2\sin 6^\circ-2\sin 6^\circ\cdot\cos 6^\circ}=\dfrac{1+\cos 6^\circ}{1-\cos 6^\circ}=\dfrac{1+\cos^2 3^\circ-\sin^2 3^\circ}{1-\cos^2 3^\circ+\sin^2 3^\circ}=$

$=\dfrac{2\cos^2 3^\circ}{2\sin^2 3^\circ}=\mathrm{ctg}^2 3^\circ.$

1247. $\dfrac{1+\sin 8^\circ-\cos 8^\circ}{1+\sin 8^\circ+\cos 8^\circ}=\dfrac{1+2\sin 4^\circ\cdot\cos 4^\circ-1+2\sin^2 4^\circ}{1+2\sin 4^\circ\cdot\cos 4^\circ+2\cos^2 4^\circ-1}=\dfrac{2\sin 4^\circ(\cos 4^\circ+\sin 4^\circ)}{2\cos 4^\circ(\sin 4^\circ+\cos 4^\circ)}=\mathrm{tg}\,4^\circ.$

1248. Wiadomo, że $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Zatem $\mathrm{tg}\,37^\circ30'=\dfrac{1-\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ}=\dfrac{1-\cos(45^\circ+30^\circ)}{\sin(45^\circ+30^\circ)}=$

$=\dfrac{1-(\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ)}{\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ}=\dfrac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2.$

1249. $\sin 70^\circ-\cos 40^\circ=\sin 70^\circ-\sin 50^\circ=2\cos 60^\circ\cdot\sin 10^\circ=\sin 10^\circ.$

1250. $\dfrac{\cos 1^\circ-\cos 3^\circ}{\sin 3^\circ-\sin 1^\circ}=\dfrac{-2\sin 2^\circ\cdot\sin(-1)^\circ}{2\cos 2^\circ\cdot\sin 1^\circ}=\mathrm{tg}\,2^\circ.$

1251. $\dfrac{\sin 2^\circ+\sin 4^\circ+\sin 6^\circ+\sin 8^\circ}{\cos 2^\circ+\cos 4^\circ+\cos 6^\circ+\cos 8^\circ}=\dfrac{(\sin 8^\circ+\sin 2^\circ)+(\sin 6^\circ+\sin 4^\circ)}{(\cos 6^\circ+\cos 2^\circ)+(\cos 6^\circ+\cos 4^\circ)}=$

$=\dfrac{2\sin 5^\circ\cdot\cos 3^\circ+2\sin 5^\circ\cdot\cos 1^\circ}{2\cos 5^\circ\cdot\cos 3^\circ+2\cos 5^\circ\cdot\cos 1^\circ}=\dfrac{2\sin 5^\circ(\cos 3^\circ+\cos 1^\circ)}{2\cos 5^\circ(\cos 3^\circ+\cos 1^\circ)}=\mathrm{tg}\,5^\circ.$

1252. $\sin 87^\circ-\sin 59^\circ-\sin 93^\circ+\sin 61^\circ=\sin 61^\circ-\sin 59^\circ-(\sin 93^\circ-\sin 87^\circ)=$
$=2\cos 60^\circ\cdot\sin 1^\circ-2\cos 90^\circ\cdot\sin 3^\circ=\sin 1^\circ.$

1253. $\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ=2\sin 54^\circ\cdot\cos 7^\circ-2\sin 18^\circ\cdot\cos 7^\circ=$
$=2\cos 7^\circ(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)=4\cos 7^\circ\cdot\cos 36^\circ\cdot\sin 18^\circ=$

$=\dfrac{4\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ\cdot\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}\cos 7^\circ=\dfrac{2\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}\cdot\cos 7^\circ=\dfrac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}\cdot\cos 7^\circ=\cos 7^\circ.$

1254. $\cos^2 10^\circ-\cos^2 50^\circ-\cos^2 70^\circ=2\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\cos^2 10^\circ-(\cos 70^\circ+\cos 50^\circ)^2=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\cos^2 10^\circ-(2\cos 60^\circ+\cos 10^\circ)^2=0\Leftrightarrow 0=0.$

1255. Łatwo sprawdzić, że $2\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.
Wobec tego: $\sin\dfrac{\pi}{14}+2\cos\dfrac{2\pi}{7}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{14}=\sin\dfrac{\pi}{14}+\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{\pi}{14}=1.$

1256. $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{7}\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}=$

$=\dfrac{2\cos\dfrac{2\pi}{7}\cdot\sin\dfrac{\pi}{7}+2\cos\dfrac{4\pi}{7}\cdot\sin\dfrac{\pi}{7}+2\cos\dfrac{6\pi}{7}\cdot\sin\dfrac{\pi}{7}}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}=$

$=\dfrac{\sin\dfrac{3\pi}{7}-\sin\dfrac{\pi}{7}+\sin\dfrac{5\pi}{7}-\sin\dfrac{3\pi}{7}+\sin\dfrac{7\pi}{7}-\sin\dfrac{5\pi}{7}}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}=\dfrac{\sin\pi-\sin\dfrac{\pi}{7}}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}=-\dfrac{1}{2}.$

1257. Wskazówka: Wykaż, że obie strony równości są równe 0.

1258. Ponieważ $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=2$, więc $\mathrm{tg}\alpha+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=2$. Stąd $\mathrm{tg}\alpha=1$.

Wobec tego $\mathrm{tg}^4\alpha+\mathrm{ctg}^4\alpha=\mathrm{tg}^4\alpha+\dfrac{1}{\mathrm{tg}^4\alpha}=1+1=2.$

1259. $x^2+y^2+z^2=r^2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta+r^2\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+r^2\cos^2\alpha=r^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=r^2.$

1260. Jeśli $270^\circ<\alpha<360^\circ$, to $1+\sin\alpha>0$ i $1-\sin\alpha>0$.

Wobec tego: $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\dfrac{1+\sin\alpha-1+\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha}}.$ (1)

Ponieważ $270^\circ<\alpha<360^\circ$, więc $\cos\alpha>0$.
Stąd $\sqrt{\cos^2\alpha}=\cos\alpha$. (2)
Z (1) i (2) i równości $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\mathrm{tg}\alpha$ wynika, że $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin}}=2\,\mathrm{tg}\alpha.$

1261. Ponieważ równość $\sin^n x+\cos^n x=1$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x, to i dla $x=\dfrac{\pi}{4}$. Zatem $\sin^n\dfrac{\pi}{4}+\cos^n\dfrac{\pi}{4}=1$, czyli $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=1$. Stąd $n=2$.

1262. Podstawiając $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$ i $x=\dfrac{\pi}{3}$ otrzymujemy:

$a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=0$ i $b=0$ i $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}c=0$. Stąd $a=b=c=0$.

1263. $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma\Rightarrow\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}+\dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}\Rightarrow$
$\Rightarrow\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=0\Rightarrow$
$\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\gamma=0\Rightarrow\sin(\alpha+\beta+\gamma)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=k180^\circ$ i $k\in C$.

1264. Ponieważ $\alpha+\beta+\gamma=180°$, więc $\alpha+\beta=180°-\gamma$.
Stąd, wobec założenia $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\neq 0$, mamy $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{tg}\gamma$,
czyli $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=-\operatorname{tg}\gamma$. Zatem $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.

1265. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1264.

1266. Ponieważ $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, więc $\gamma=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$.
Założenie $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\neq 0$ gwarantuje istnienie występujących w podanej równości tangensów. Wobec tego:
$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=$
$=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\cdot(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}\cdot(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=1.$

1267. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(2\alpha)=\operatorname{tg}(3\alpha)\Rightarrow\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=\dfrac{\sin(3\alpha)}{\cos(3\alpha)}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{\sin\alpha\cdot\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)}=\frac{\sin(3\alpha)}{\cos(3\alpha)}\Rightarrow\frac{\sin(3\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)}=\frac{\sin(3\alpha)}{\cos(3\alpha)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(3\alpha)\,[\cos(3\alpha)-\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)]}{\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos(3\alpha)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(3\alpha)\,[\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)+\sin\alpha\cdot\sin(2\alpha)-\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)]}{\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos(3\alpha)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\sin\alpha\cdot\sin(2\alpha)\cdot\sin(3\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos(3\alpha)}=0\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(2\alpha)\cdot\operatorname{tg}(3\alpha)=0.$$

1268. Zauważmy, że:
$\cos(y+z)+\cos(z+x)+\cos(x+y)=\cos(x+y+z-x)+\cos(x+y+z-y)+$
$+\cos(x+y+z-z)=\cos(x+y+z)\cdot\cos x+\sin(x+y+z)\cdot\sin x+$
$+\cos(x+y+z)\cdot\cos y+\sin(x+y+z)\cdot\sin y+\cos(x+y+z)\cdot\cos z+$
$+\sin(x+y+z)\cdot\sin z=$
$=(\sin x+\sin y+\sin z)\cdot\sin(x+y+z)+(\cos x+\cos y+\cos z)\cdot\cos(x+y+z).$ (1)
Ponieważ $\dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$ i $\dfrac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=a$, więc
$\sin x+\sin y+\sin z=a\sin(x+y+z)$ i $\cos x+\cos y+\cos z=a\cos(x+y+z)$. (2)
Z (1) i (2) otrzymujemy: $\cos(y+z)+\cos(z+x)+\cos(x+y)=$
$=a\sin^2(x+y+z)+a\cos^2(x+y+z)=a[\sin^2(x+y+z)+\cos^2(x+y+z)]=$
$=a\cdot 1=a.$

1269. Wskazówka: Wykaż, że $\operatorname{tg}(x+2y)=1$.

1270. $\dfrac{\sin(3x)}{\sin x}-\dfrac{\cos(3x)}{\cos x}=\dfrac{\sin(3x)\cdot\cos x-\cos(3x)\cdot\sin x}{\sin x\cdot\cos x}=\dfrac{\sin(3x-x)}{\sin x\cdot\cos x}=\dfrac{\sin(2x)}{\sin x\cdot\cos x}=2.$

1271. $\dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}=\dfrac{(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha})^2}{(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha})(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha})}=$

$$=\frac{2+2\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2\sin\alpha}=\frac{1+\sqrt{\cos^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{1+|\cos\alpha|}{\sin\alpha}.$$

Ale skoro $90°<\alpha<180°$, to $\cos\alpha<0$. Zatem:

$$\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

1272. Wystarczy pokazać, że przy podanych założeniach $2\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\alpha)=\cos(2\beta)$, czyli $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)=1-2\sin^2\beta$.
Ponieważ $\operatorname{ctg}\alpha=3$, więc $\cos\alpha=3\sin\alpha$. (1)
Stąd i ze wzoru $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, otrzymujemy $\sin^2\alpha=0{,}1$. (2)
Wykorzystując założenie $\operatorname{ctg}\beta=7$ i rozumując podobnie stwierdzamy, że $\sin^2\beta=0{,}02$. (3)
Z (1), (2) i (3) wynika, że $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)=0{,}96$ i $1-2\sin^2\beta=0{,}96$.

1273. $\sin^{-2}\alpha+\cos^{-2}\alpha+\operatorname{tg}^{-2}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$

$$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$=\dfrac{8-8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\dfrac{8-2\sin^2(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)}$. Zatem $\dfrac{8-2\sin^2(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)}=7$. Stąd $\sin^2(2\alpha)=\dfrac{8}{9}$.

1274. Prawdziwe są implikacje: $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)\Rightarrow$
$\Rightarrow 3\sin\beta=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta+(1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\beta\Rightarrow$
$\Rightarrow\sin\beta=\sin\alpha\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)\Rightarrow\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=\sin\beta\cdot(1+\sin^2\alpha)\Rightarrow$
$\Rightarrow\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=\sin\beta\cdot(2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta-2\sin^2\alpha\cdot\sin\beta=$
$=\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos^2\alpha\cdot\sin\beta\Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)$.
Stąd i z założeń $\cos\alpha\neq 0$ i $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$ wynika, że $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha$.

1275. Dowód przeprowadzimy za pomocą zasady indukcji matematycznej, oznaczając przez L lewą, a przez P prawą stronę dowodzonej równości.

Jeżeli $n=1$, to $L=\cos\frac{x}{2}$, $P=\dfrac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\cos\frac{x}{2}$. Zatem $L=P$.

Zakładamy, że dla $n\in N$: $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$.

Wykażemy, że: $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=\frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}}$.

Zauważmy, że: $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=$

$$=\frac{\sin x}{2^n\cdot 2\sin\frac{x}{2\cdot 2^n}\cdot\cos\frac{x}{2\cdot 2^n}}\cdot\cos\frac{x}{2\cdot 2^n}=\frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}}.$$

1276. Dowód przeprowadzimy za pomocą zasady indukcji matematycznej, oznaczając przez L lewą, a przez P prawą stronę dowodzonej równości.

Jeśli $n=1$, to $L=\sin x$, $P=\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin x}{\sin\frac{x}{2}}=\sin x$. Zatem $L=P$.

Zakładamy, że $\sin x+\sin(2x)+\ldots+\sin(nx)=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

Wykażemy, że $\sin x+\sin(2x)+\ldots+\sin(nx)+\sin[(n+1)x]=$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\frac{(n+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Zauważmy, że: $\sin x+\sin(2x)+\ldots+\sin(nx)+\sin[(n+1)x]=$

$$=\sin\frac{nx}{2}\cdot\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\sin[(n+1)x]=$$

$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\frac{2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\left[\sin\frac{nx}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\left(\frac{nx}{2}+\frac{x}{2}\right)\right]}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\left(\sin\frac{nx}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\left[\sin\frac{nx}{2}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)+\sin x\cos\frac{nx}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\left(\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}+x\right)}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\frac{(n+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

1277. Zauważmy, że: $\sin(2\alpha)=\sin(2\beta)\Leftrightarrow\sin(2\alpha)-\sin(2\beta)=0\Leftrightarrow\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=0$. Ostatnia równość jest prawdziwa, gdyż z założenia $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=1$ wynika, że $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos\alpha\cdot\cos\beta$, skąd $\cos(\alpha+\beta)=0$.

1278. Wskazówka: $18\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=-9\left(-2\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)=-9[\cos(2\alpha)-\cos\alpha]$.

1279. Zauważmy, że: $\frac{\sin(10\alpha)+\sin(4\alpha)-\sin(6\alpha)}{1+\cos(2\alpha)-2\sin^2(4\alpha)}=$

$$=\frac{2\sin(7\alpha)\cdot\cos(3\alpha)-2\sin(3\alpha)\cdot\cos(3\alpha)}{\cos(2\alpha)+\cos(8\alpha)}=\frac{2\cos(3\alpha)[\sin(7\alpha)-\sin(3\alpha)]}{\cos(8\alpha)+\cos(2\alpha)}=$$

$$=\frac{2\cos(3\alpha)\cdot 2\cos(5\alpha)\cdot\sin(2\alpha)}{2\cos(5\alpha)\cdot\cos(3\alpha)}=2\sin(2\alpha)=4\sin\alpha\cos\alpha=2[1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2].$$

Stąd i z założenia $\sin\alpha-\cos\alpha=a$ wynika prawdziwość podanego twierdzenia.

1280. Ponieważ $\operatorname{tg}x=2\operatorname{tg}y$, więc $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2\sin y}{\cos y}$, a tym samym $\sin x\cos y=2\cos x\sin y$.

Zatem $\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]=\sin(x+y)-\sin(x-y)$.

Stąd $\sin(x+y)=3\sin(x-y)$.

1281. Ponieważ $\sin\alpha+\sin\beta=a$ i $\cos\alpha+\cos\beta=b$, więc $(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)=ab$.
Stąd $\sin\alpha\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta\cos\beta=ab$,
czyli $\sin(2\alpha)+2\sin(\alpha+\beta)+\sin(2\beta)=2ab$,
a tym samym $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\sin(\alpha+\beta)=2ab$. (1)

Wykorzystując ponownie założenie stwierdzamy, że
$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\sin\beta+\sin^2\beta=a^2$ i $\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos^2\beta=b^2$.

Zatem $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{a^2+b^2-2}{2}$ (2)

Z (1) i (2) wynika, że $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{ab}{a^2+b^2}$.

1282. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\dfrac{(\alpha+\beta)}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma.$ (1)

Ponieważ $\alpha+\beta+\gamma=180°$, więc $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$. (2)

Z (1) i (2) wynika, że $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta)=$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=4\sin\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

1283. Przy założeniu, że $\alpha+\beta+\gamma=180°$ mamy:

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=-4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$=4\sin\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}. \quad (1)$$

Z zadania 1282 wiemy, że jeśli $\alpha+\beta+\gamma=180°$, to

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}. \quad (2)$$

Z (1) i (2) oraz z założenia $\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\neq0$ wynika prawdziwość dowodzonego twierdzenia.

1284. Przy założeniu, że $\alpha+\beta+\gamma=180°$ mamy:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2\sin^2\beta)+\frac{1}{2}+\sin^2(\alpha+\beta)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\alpha)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\beta)+1-\cos^2(\alpha+\beta)=$$

$$=2-\frac{1}{2}[\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)]-\cos^2(\alpha+\beta)=2-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=$$

$$=2-\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]=$$

$$=2-\cos(180°-\gamma)\,2\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)=2+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$$

1285. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1284.

1286. Dowód przeprowadzimy za pomocą zasady indukcji matematycznej, oznaczając przez L lewą, a przez P prawą stronę dowodzonej równości.

Jeśli $n=1$, to $L=\sin x$, $P=\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{2\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\sin x$. Zatem $L=P$.

Zakładamy, że $\sin x+\sin(2x)+\ldots+\sin(nx)=\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Wykażemy, że $\sin x+\sin(2x)+\ldots+\sin(nx)+\sin[(n+1)x]=\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Zauważmy, że: $\sin x+\sin(2x)+\ldots+\sin(nx)+\sin[(n+1)x]=$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}+\sin[(n+1)x]=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]+2\sin\frac{x}{2}\sin[(n+1)x]}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Wystarczy więc pokazać, że $\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]+2\sin\frac{x}{2}\sin[(n+1)x]}{2\sin\frac{x}{2}}=$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Przekształcamy równość przy założeniu, że $\sin\frac{x}{2}\neq0$:

$$\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]+2\sin\frac{x}{2}\sin[(n+1)x]}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}-\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)+2\sin\frac{x}{2}\sin(nx+x)=\cos\frac{x}{2}-\cos\left(nx+\frac{3}{2}x\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\sin(nx+x)=\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)-\cos\left(nx+\frac{3}{2}x\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\sin(nx+x)=2\sin\frac{x}{2}\sin(nx+x).$

1287. Łatwo sprawdzić prawdziwość podanego twierdzenia dla $n=1$.
Zakładamy, że $\cos x+\cos(3x)+\ldots+\cos[(2n-1)x]=\frac{\sin(2nx)}{2\sin x}$.
Wykażemy, że $\cos x+\cos(3x)+\ldots+\cos[(2n-1)x]+\cos[(2n+1)x]=$
$=\frac{\sin[2(n+1)x]}{2\sin x}$.
Zauważmy, że: $\cos x+\cos(3x)+\ldots+\cos[(2n-1)x]+\cos[(2n+1)x]=$
$=\frac{\sin(2nx)}{2\sin x}+\cos[(2n+1)x]=\frac{\sin(2nx)+2\sin x\cdot\cos[(2n+1)x]}{2\sin x}=$
$=\frac{\sin(2nx)+\sin[2(n+1)x]-\sin(2nx)}{2\sin x}=\frac{\sin[2(n+1)x]}{2\sin x}$.

1288. $\cos\alpha=0{,}8$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$.

1289. $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{12}{5}$.

1290. $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$.

1291. $-\frac{10}{11}$. Wskazówka: Podziel licznik i mianownik ułamka $\frac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}$ przez $\cos\alpha$.

1292. Z treści zadania wiemy, że $3\sin\alpha=(1-\cos\alpha)$.
Wiadomo także, że $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Rozwiązując układ powyższych równań otrzymujemy $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ i $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ lub $\sin\alpha=0$ i $\cos\alpha=1$.

Zatem $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{12}{5}$ lub $\mathrm{tg}\alpha=0$.

1293. 47.

1294. Ponieważ $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$, więc $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{9}$, a tym samym

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{9}$, czyli $1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{9}$.

Stąd $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{4}{9}$.

1295. $-\frac{9}{4}$

1296. Z rozwiązania zadania 1294 wiemy, że $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{4}{9}$.

Stąd $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{8}{9}$. Odejmując stronami powyższą równość od równości

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ stwierdzamy, że $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{17}{19}$ czyli

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{17}{19}$.

Stąd $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{17}}{3}$ lub $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{17}}{3}$.

1297. $\frac{13}{27}$. Wskazówka: $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha)=$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha)$.

1298. $\frac{49}{81}$. Wskazówka: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$
$=1-2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2$.

1299. $\frac{1}{2}$.

1300. $\mathrm{tg}\alpha=1$ i $\mathrm{tg}\beta=2$ lub $\mathrm{tg}\alpha=2$ i $\mathrm{tg}\beta=1$.

1301. 1.

1302. 1. Wskazówka: $\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)+\mathrm{tg}\gamma}{1-\mathrm{tg}(\alpha+\beta)\cdot\mathrm{tg}\gamma}$.

1303. $(1+\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{tg}\beta)=2\Leftrightarrow 1+\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=2\Leftrightarrow \mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$.
Pokażemy teraz, że jeżeli prawdziwa jest ostatnia równość, to $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\neq 1$. Gdyby $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=1$ i $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$, to $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=1$ i $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=0$. Otrzymana koniunkcja jest sprzeczna, gdyż równość $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=1$ świadczy o tym, że liczby $\mathrm{tg}\alpha$ i $\mathrm{tg}\beta$ są tego samego znaku, a suma takich liczb nie może być zerem. Możemy zatem obie strony równości $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$ podzielić przez $1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$ otrzymując równość $\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}=1$, czyli równość $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=1$, skąd $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}+k\pi$, gdzie $k\in C$.

1304. Ponieważ $(\mathrm{ctg}x, \mathrm{ctg}y, \mathrm{ctg}z)$ jest ciągiem arytmetycznym, więc $\mathrm{ctg}y-\mathrm{ctg}x=\mathrm{ctg}z-\mathrm{ctg}y$. Ale $x+y+z=\frac{\pi}{2}$, zatem $y=\frac{\pi}{2}-(x+z)$. W takim razie $\mathrm{tg}(x+z)-\mathrm{ctg}x=\mathrm{ctg}z-\mathrm{tg}(x+z)$, czyli

$$\frac{2\sin(x+z)}{\cos(x+z)}=\frac{\sin(x+z)}{\sin x\cdot\sin z}. \qquad (1)$$

Z założenia wynika, że $0<x+z<\frac{\pi}{2}$. Zatem $\sin(x+z)\neq 0$.

Stąd i z (1) otrzymujemy $\cos(x+z)=2\sin x\cdot\sin z$, czyli

$\cos x\cdot\cos z=3\sin x\cdot\sin z$. (2)

Ponieważ $x, z\in \mathbb{R}_+$ i $0<x+z<\frac{\pi}{2}$, więc $\sin x\cdot\sin z\neq 0$. (3)

Z (2) i (3) otrzymujemy $\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}z=3$.

1305. Ponieważ $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$, więc $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, czyli $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Stąd i z równości $3^x=\operatorname{tg}\alpha$ oraz $3^{-x}=\operatorname{tg}\beta$ wynika, że $\frac{3^x-3^{-x}}{1+3^x3^{-x}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rozwiązując ostatnie równanie otrzymujemy $x=\frac{1}{2}$.

1306. $\sin(2\alpha)=-0{,}96$, $\cos(2\alpha)=0{,}28$.

1307. Ponieważ $\frac{6\sin\alpha+5\cos\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha}=2$, więc $6\sin\alpha+5\cos\alpha=8\sin\alpha+2\cos\alpha$, czyli

$2\sin\alpha=3\cos\alpha$. Stąd $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$. Wobec tego $\cos(2\alpha)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{5}{13}$.

1308. Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha=3$, więc $\operatorname{tg}(2\alpha)=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{3}{4}$ i $\cos(2\alpha)\neq 0$. (1)

Dzieląc licznik i mianownik ułamka $\frac{2\sin(2\alpha)-3\cos(2\alpha)}{4\sin(2\alpha)+5\cos(2\alpha)}$ przez $\cos(2\alpha)$

stwierdzamy, że $\frac{2\sin(2\alpha)-3\cos(2\alpha)}{4\sin(2\alpha)+5\cos(2\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}(2\alpha)-3}{4\operatorname{tg}(2\alpha)+5}$. (2)

Z (1) i (2) wynika, że $\frac{2\sin(2\alpha)-3\cos(2\alpha)}{4\sin(2\alpha)+5\cos(2\alpha)}=-\frac{9}{4}$.

1309. $\frac{4}{5}$. Wskazówka: Oblicz $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, a następnie zastosuj wzór $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

1310. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$ lub $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$. Wskazówka: Wykorzystaj wzory udowodnione w zadaniach 1222 i 1223.

1311. Przypuśćmy, że $\operatorname{tg}27°<\cos 27°$, czyli, że $\frac{\sin 27°}{\cos 27°}<\cos 27°$.

Ponieważ $\cos 27°>0$, więc prawdą jest, że:

$\frac{\sin 27°}{\cos 27°}<\cos 27°\Leftrightarrow \sin 27°<\cos^2 27°\Leftrightarrow \sin 27°<1-\sin^2 27°\Leftrightarrow \sin^2 27°+\sin 27°<1$.

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż $\sin 27°<\sin 30°=\frac{1}{2}$,

zatem $\sin^2 27°+\sin 27°<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}<1$. Wobec tego $\operatorname{tg}27°<\cos 27°$.

1312. $4+4\sin x\geqslant\cos^2 x\Leftrightarrow \sin^2 x+4\sin x+3\geqslant 0\Leftrightarrow(\sin x=z$ i $z^2+4z+3\geqslant 0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\sin x\leqslant -3$ lub $\sin x\geqslant -1)$. Ostatnia alternatywa jest prawdziwa.

1313. Wykorzystując nierówność Schwarza dla liczb $a_1=\sin^2 x$, $a_2=\cos^2 x$, $b_1=\sin x$, $b_2=\cos x$ otrzymujemy

$|\sin^3 x+\cos^3 x|\leqslant\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}\cdot\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}$, czyli

$|\sin^3 x+\cos^3 x|\leqslant\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

1314. $(\sin^2 x+2\cos^2 x)^{-1}\leqslant 1=\Leftrightarrow\frac{1}{\sin^2 x+\cos^2 x+\cos^2 x}\leqslant 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1-1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\geqslant 0$.

Ostatnia nierówność jest prawdziwa.

1315. $x^2-4x\cos(xy)+4\geqslant 0\Leftrightarrow x^2-4x\cos(xy)+4\cos^2(xy)+4-4\cos^2(xy)\geqslant 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[x-2\cos(xy)]^2+4\sin^2(xy)\geqslant 0$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla $x, y\in\mathbb{R}$.

1316. Zauważmy, że: $\sin^2 x+\sin^2 y\geqslant\sin x\cdot\sin y+\sin x+\sin y-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\sin x-\sin y)^2\geqslant -\sin x\cdot\sin y+\sin x+\sin y-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\sin x-\sin y)^2\geqslant(1-\sin y)(\sin x-1)$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y: $(\sin x-\sin y)^2\geqslant 0$ i $1-\sin y\geqslant 0$, i $\sin x-1\leqslant 0$.

1317. Zakładając, że x jest dowolną liczbą rzeczywistą udowodnimy, że twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego naturalnego n, posługując się zasadą indukcji matematycznej. Łatwo sprawdzić prawdziwość podanej nierówności dla $n=1$.

Pokażemy, że jeśli $|\sin(nx)|\leqslant n|\sin x|$, to $|\sin[(n+1)x]|\leqslant(n+1)|\sin x|$.

Zauważmy, że: $|\sin[(n+1)x]|=|\sin(nx+x)|=$

$=|\sin(nx)\cdot\cos x+\cos(nx)\cdot\sin x|\leqslant$

$\leqslant|\sin(nx)|\cdot|\cos x|+|\cos(nx)|\cdot|\sin x|\leqslant|\sin(nx)|+|\sin x|\leqslant$

$\leqslant n|\sin x|+|\sin x|=(n+1)|\sin x|$.

1318. $\sin^3 x\cdot\cos x-\cos^3 x\cdot\sin x\leqslant\frac{1}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)\leqslant\frac{1}{4}\Leftrightarrow\sin(2x)\cdot\cos(2x)\geqslant-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin(4x)\geqslant -1$.

Nierówność $\sin(4x)\geqslant -1$ prawdziwa jest dla każdej liczby rzeczywistej, gdyż zbiorem wartości funkcji $y=\sin(4x)$ jest przedział $\langle -1; 1\rangle$.

1319. $-\frac{3}{2}<\sin x+\cos x<\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left|\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|<\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left|2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|<\frac{3}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|<\frac{2}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|<\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Ponieważ zbiorem wartości funkcji $y=\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$ jest przedział $\langle 0; 1\rangle$ i $\frac{3\sqrt{2}}{4}>1$, więc ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnego $x\in\mathbf{R}$.

1320. Aby udowodnić nierówność: $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha<1$ wystarczy wykazać, że: $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)<0$, czyli udowodnić, że: $\sin^2\alpha(\sin\alpha-1)+\cos^2\alpha(\cos\alpha-1)<0$.
Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż z założenia $0^0<\alpha<90^0$ wynika, że: $\sin^2\alpha(\sin\alpha-1)<0$ i $\cos^2\alpha(\cos\alpha-1)<0$.

1321. Jeśli $\alpha\in\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, to $\sin\alpha>0$ i $\cos\alpha>0$. Zatem:

$$\text{tg}\alpha>\sin\alpha \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}>\sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha>\sin\alpha\cdot\cos\alpha \Leftrightarrow 1>\cos\alpha.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla $\alpha\in\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

1322. Wykorzystując nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb tg^2x i ctg^2x mamy: $\frac{\text{tg}^2x+\text{ctg}^2x}{2}\geqslant\sqrt{\text{tg}^2x\cdot\text{ctg}^2x}$, czyli $\text{tg}^2x+\text{ctg}^2x\geqslant 2$.

1323. Z zadania 1266 wiemy, że przy podanych założeniach:
$\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta+\text{tg}\beta\cdot\text{tg}\gamma+\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\gamma=1$. (1)
Ponieważ $(\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta)^2+(\text{tg}\beta-\text{tg}\gamma)^2+(\text{tg}\alpha-\text{tg}\gamma)^2\geqslant 0$, więc
$2\,\text{tg}^2\alpha+2\,\text{tg}^2\beta+2\,\text{tg}^2\gamma-2\,\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta-2\,\text{tg}\beta\cdot\text{tg}\gamma-2\,\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\gamma\geqslant 0$,
a więc $\text{tg}^2\alpha+\text{tg}^2\beta+\text{tg}^2\gamma\geqslant\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta+\text{tg}\beta\cdot\text{tg}\gamma+\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\gamma$. (2)
Z (1) i (2) wynika, że $\text{tg}^2\alpha+\text{tg}^2\beta+\text{tg}^2\gamma\geqslant 1$.

1324. Łatwo sprawdzić, że prawdziwa jest tożsamość $\text{ctg}(2x)=\frac{\text{ctg}^2x-1}{2\,\text{ctg}x}$. Aby więc udowodnić podane twierdzenie wystarczy wykazać, że dla $x\in\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwa jest nierówność $\text{ctg}\frac{x}{2}>1+\frac{\text{ctg}^2\frac{x}{2}-1}{2\,\text{ctg}\frac{x}{2}}$, czyli nierówność $\frac{\left(\text{ctg}\frac{x}{2}-1\right)^2}{2\,\text{ctg}\frac{x}{2}}>0$.
Ostatnia nierówność jest prawdziwa w zadanym zbiorze.

1325. $\text{tg}(2\alpha)>2\,\text{tg}\alpha \Leftrightarrow \frac{2\,\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}>2\,\text{tg}\alpha$.
Jeżeli $\alpha\in\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, to $0<\text{tg}\alpha<1$, a tym samym $2\,\text{tg}\alpha>0$ i $1-\text{tg}^2\alpha>0$. Oznacza to, że:
$\text{tg}(2\alpha)>2\,\text{tg}\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{1-\text{tg}^2\alpha}>1 \Leftrightarrow 1>1-\text{tg}^2\alpha \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha>0$, co jest prawdą dla $x\in\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

1326. Przy podanych założeniach mamy: $\sin^{-4}x+\cos^{-4}x=\frac{1}{\sin^4x}+\frac{1}{\cos^4x}=$

$$=\frac{\cos^4x+\sin^4x}{\sin^4x\cdot\cos^4x}=\frac{(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cdot\cos^2x}{\sin^4x\cdot\cos^4x}=\frac{1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)}{\sin^4x\cdot\cos^4x}=$$
$$=\frac{16-8\sin^2(2x)}{\sin^4(2x)}=\frac{8[2-\sin^2(2x)]}{\sin^4(2x)}=\frac{8[1+\cos^2(2x)]}{\sin^4(2x)}\geqslant\frac{8}{\sin^4(2x)}\geqslant 8.$$

1327. Zauważmy, że: $|\text{tg}x+\text{ctg}x|>|\sin x+\cos x| \Leftrightarrow (\text{tg}x+\text{ctg}x)^2>(\sin x+\cos x)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2(2x)}>1+\sin(2x) \Leftrightarrow \frac{\sin^3(2x)+\sin^2(2x)-4}{\sin^2(2x)}<0$.
Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo największą wartością funkcji $y=\sin(2x)$ jest 1, więc $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} \sin^3(2x)+\sin^2(2x)-4<0$, a jeżeli $x\neq k\frac{\pi}{2}$ gdzie $k\in C$, to $\sin^2(2x)>0$.

1328. $\sin(\alpha+\beta+\gamma)<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin\gamma<\sin\alpha+\sin\beta \Leftrightarrow 2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}<2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot$
$\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
Ponieważ α, $\beta\in\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, więc $0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$, a tym samym $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}>0$. Zatem danej nierówności równoważna jest nierówność $\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}<\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, którą łatwo doprowadzić do postaci $\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}>0$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo jeżeli α, β, $\gamma\in\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, to $0<\frac{\alpha+\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}$ i $0<\frac{\beta+\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}$, a to oznacza, że $\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}>0$ i $\cos\frac{\beta+\gamma}{2}>0$.

1329. Wskazówka: Wykres funkcji $y=-\sin x$ jest obrazem wykresu funkcji $y=\sin x$ w symetrii osiowej, której osią jest oś x.

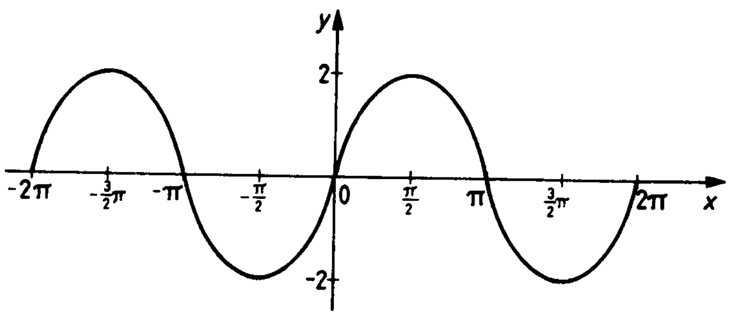
1330. Wskazówka: Wykres funkcji $y=\sin x+3$ jest obrazem wykresu funkcji $y=\sin x$ w translacji o wektor $\vec{w}=[0, 3]$.

1331. Wskazówka: wykres funkcji $y=\sin x-3$ jest obrazem wykresu funkcji $y=\sin x$ w translacji o wektor $\vec{w}=[0, -3]$.

1332. Wskazówka: Wykres funkcji $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ jest obrazem wykresu funkcji $y=\sin x$ w translacji o wektor $\vec{w}=\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$.

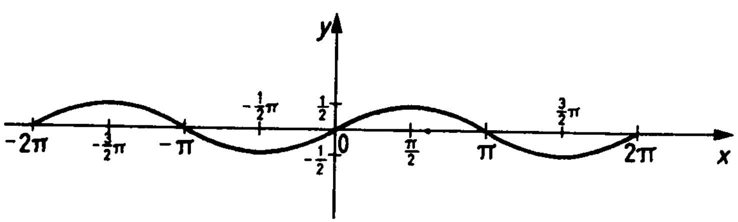
1333. Wskazówka: Wykres funkcji $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ jest obrazem wykresu funkcji $y=\sin x$ w translacji o wektor $\vec{w}=\left[\frac{\pi}{3}, 0\right]$.

1334. Rys. 76. Wskazówka: Wykres funkcji $y=2\sin x$ jest obrazem wykresu funkcji $y=\sin x$ w powinowactwie prostokątnym o osi x i skali 2.



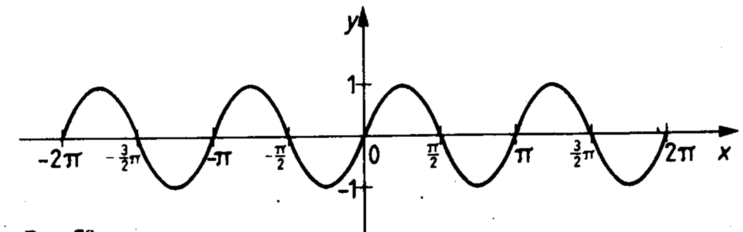
Rys. 76

1335. Rys. 77. Wskazówka: Wykres funkcji $y=\frac{1}{2}\sin x$ jest obrazem wykresu funkcji $y=\sin x$ w powinowactwie prostokątnym o osi x i skali $\frac{1}{2}$.



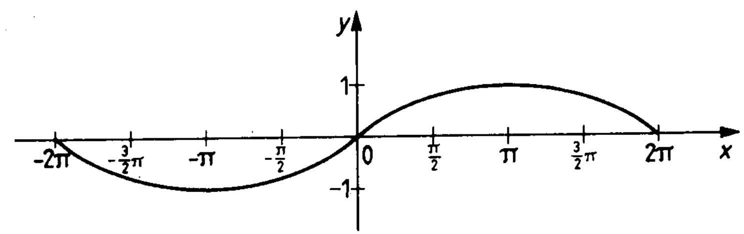
Rys. 77

1336. Rys. 78. Wskazówka: Wykres funkcji $y=\sin(2x)$ jest obrazem wykresu funkcji $y=\sin x$ w powinowactwie prostokątnym o osi y i skali $\frac{1}{2}$.



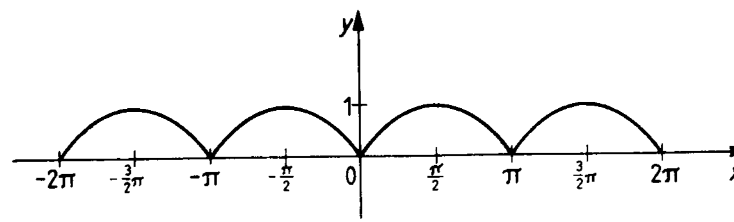
Rys. 78

1337. Rys. 79. Wskazówka: Wykres funkcji $y=\sin\frac{x}{2}$ jest obrazem wykresu funkcji $y=\sin x$ w powinowactwie prostokątnym o osi y i skali 2.



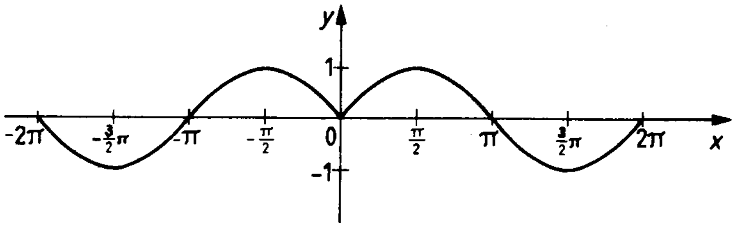
Rys. 79.

1338. Rys. 80.



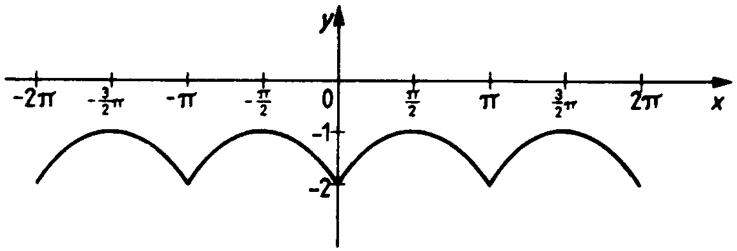
Rys. 80.

1339. Jeżeli $x \geqslant 0$, to $y = \sin x$, jeżeli $x < 0$, to $y = \sin(-x) = -\sin x$ (rys. 81).



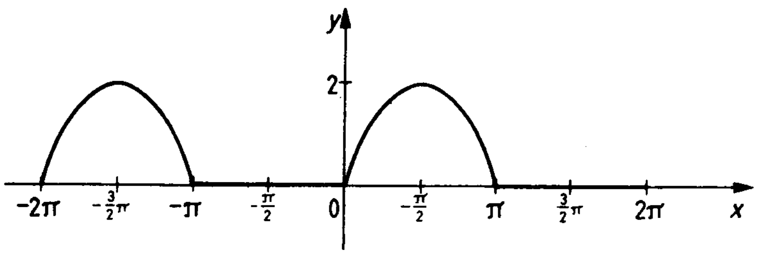
Rys. 81

1340. Rys. 82.



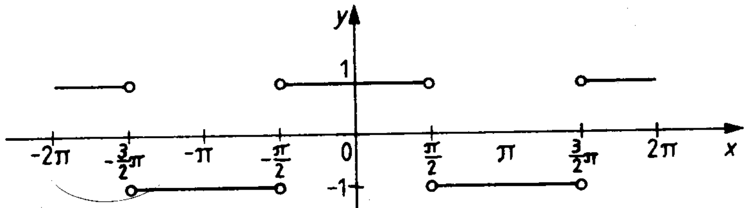
Rys. 82

1341. Jeżeli $\sin x \geqslant 0$, to $y = 2\sin x$, jeżeli $\sin x < 0$, to $y = 0$ (rys. 83).



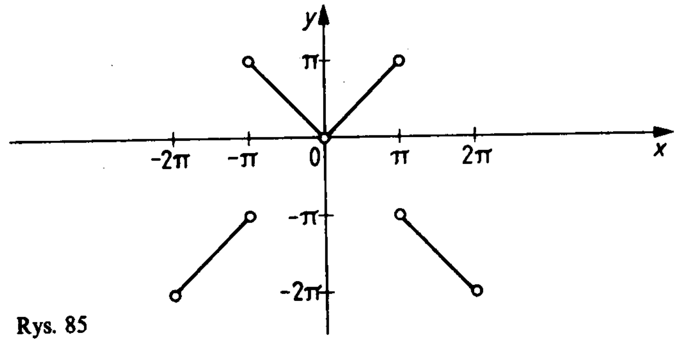
Rys. 83

1342. Jeżeli $\cos x > 0$, to $y = 1$, jeżeli $\cos x < 0$, to $y = -1$ (rys. 84).



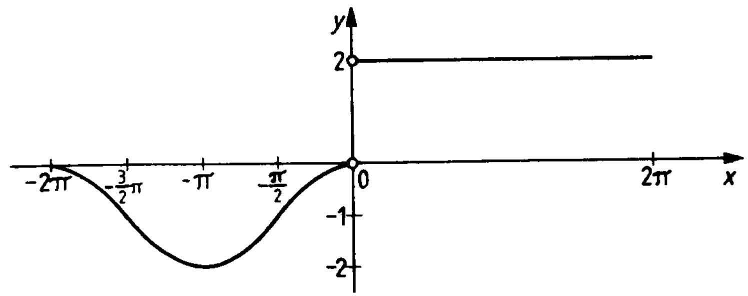
Rys. 84

1343. Jeżeli $\sin x > 0$, to $y = x$, jeżeli $\sin x < 0$, to $y = -x$ (rys. 85).



Rys. 85

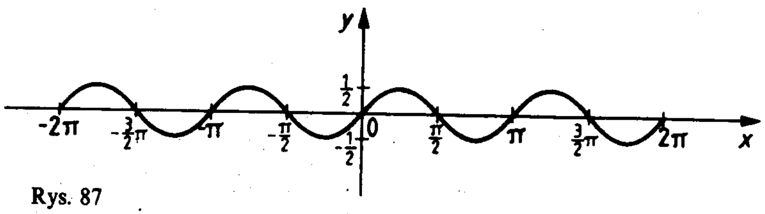
1344. Jeżeli $x > 0$, to $y = 2$, jeżeli $x < 0$, to $y = -1 + \cos x$ (rys. 86).



Rys. 86

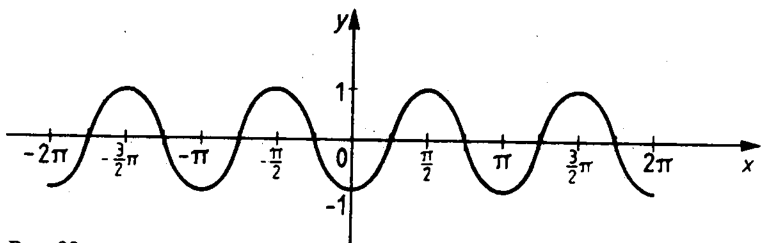
1345. Wskazówka: $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=$
$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

1346. $y=\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$ (rys. 87).



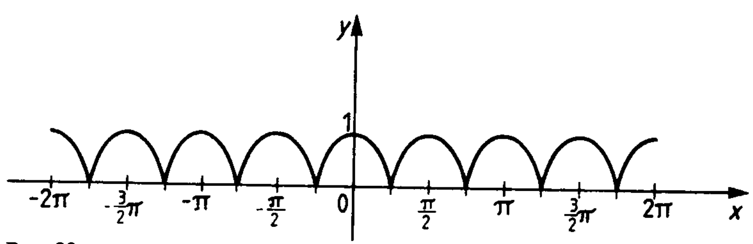
Rys. 87

1347. $y=\sin^2x-\cos^2x=-\cos(2x)$ (rys. 88).



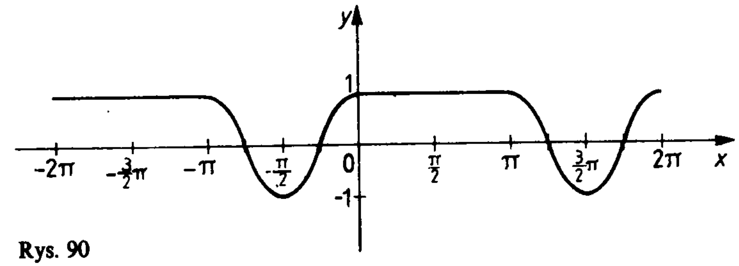
Rys. 88

1348. Zauważmy, że: $|\sin^4x-\cos^4x|=|(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^2x-\cos^2x)|=$
$=|\sin^2x-\cos^2x|=|\cos^2x-\sin^2x|=|\cos(2x)|$ (rys. 89).



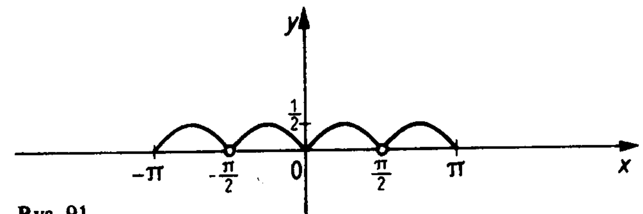
Rys. 89

1349. Jeżeli $\sin x\geqslant 0$, to $y=1$, a jeżeli $\sin x<0$, to $y=\cos(2x)$ (rys. 90).



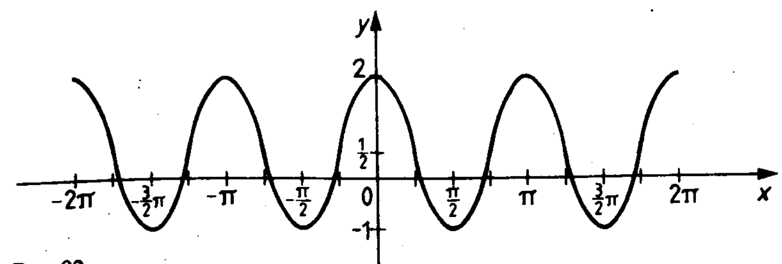
Rys. 90

1350. $D_f=\left\langle-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle$. Gdy $x\in D_f$, to $\operatorname{tg}x\geqslant 0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in\left\langle-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\operatorname{tg}x<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.
Wobec tego jeżeli $x\in\left\langle-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right)$, to $y=\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$, a jeżeli $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, to $y=-\frac{1}{2}\sin(2x)$ (rys. 91).



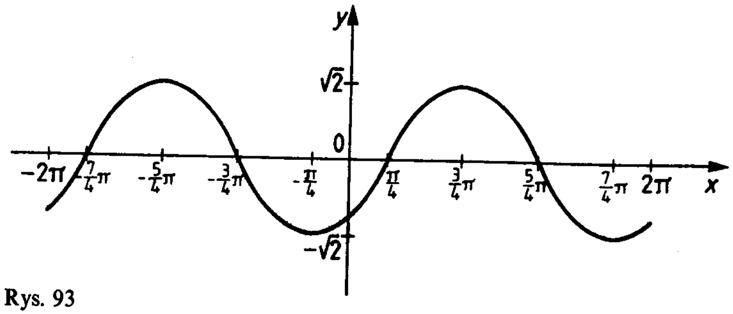
Rys. 91

1351. $y=2-3\sin^2x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-3\sin^2x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(1-2\sin^2x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos(2x)$ (rys. 92).



Rys. 92

1352. Rys. 93.

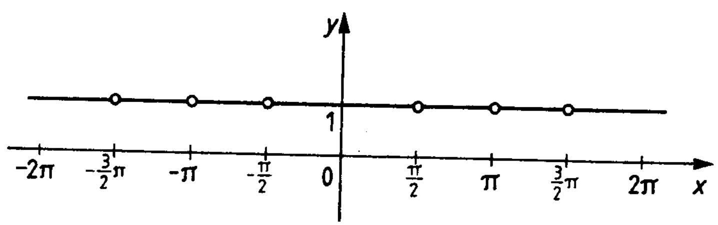


Rys. 93

1353. $D_f=\{x\in\mathbf{R};\ \cos x\neq 0$ i $\cos\frac{x}{2}\neq 0\}=\{x\in\mathbf{R}:\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ i $x\neq(2k+1)\pi$ i $k\in\mathbf{C}\}$.

Jeżeli $x\in D_f$ to:

$$y=\cos x\left(1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\left(1+\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=1 \text{ (rys. 94).}$$



Rys. 94

1354. Ponieważ zbiorem wartości funkcji $y=\sin(x-2)$ jest przedział $\langle -1;\ 1\rangle$, więc zbiorem wartości funkcji $y=3+\sin(x-2)$ jest przedział $\langle 2;\ 4\rangle$.

1355. $\langle 1;\ 7\rangle$.

1356. $\langle -1;\ 3\rangle$.

1357. $\langle -1;\ 5\rangle$.

1358. $\langle 3;\ 5\rangle$.

1359. $\langle\frac{1}{2};\ 2\rangle$.

1360. $\langle 4;\ 5\rangle$.

1361. $\langle 0;\ 2\rangle$.

1362. $\sin x\cdot\cos^3x-\sin^3x\cdot\cos x=\sin x\cdot\cos x(\cos^2x-\sin^2x)=\frac{1}{2}\sin(2x)\cdot\cos(2x)=$

$=\frac{1}{4}\sin(4x)$. Największą wartością podanej funkcji jest $\frac{1}{4}$, gdyż największą wartością funkcji $y=\sin(4x)$ jest 1.

1363. $$\frac{1+\cos(2x)}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{2\cos^2x}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}}=\frac{1}{2}\sin(2x).$$

Z powyższych równości i faktu, że największą wartością funkcji $y=\sin(2x)$ jest 1 wynika, że największą wartością danej funkcji jest $\frac{1}{2}$.

1364. $$2(\sin^6x+\cos^6x)^{-1}=\frac{2}{(\sin^2x)^3+(\cos^2x)^3}=$$
$$=\frac{2}{(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^4x-\sin^2x\cdot\cos^2x+\cos^4x)}=$$
$$=\frac{2}{(\sin^2x+\cos^2x)^2-3\sin^2x\cdot\cos^2x}=\frac{8}{4-3\sin^2(2x)}.$$

Ponieważ najmniejszą wartością różnicy $4-3\sin^2(2x)$ jest 1, więc największą wartością danej funkcji jest 8.

1365. Wykorzystując nierówność Schwarza dla liczb $a_1=a$, $a_2=b$, $b_1=\sin x$, $b_2=\cos x$, mamy: $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{\sin^2x+\cos^2x}$, czyli po uwzględnieniu założeń i „jedynki trygonometrycznej": $a\sin x+b\cos x\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

Wykażemy, że istnieje takie $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, że $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}$.

Przy założeniach $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $a>0$, $b>0$:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow(a\sin x+b\cos x)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2\sin^2x+2ab\sin x\cdot\cos x+b^2\cos^2x=(a^2+b^2)(\sin^2x+\cos^2x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2\cos^2x-2ab\sin x\cdot\cos x+b^2\sin^2x=\Leftrightarrow(a\cos x-b\sin x)^2=0\Leftrightarrow a\cos x=$$
$$=b\sin x\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=\frac{a}{b}.$$

Ponieważ funkcja tangens przyjmuje w przedziale $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ wszystkie wartości dodatnie oraz $\frac{a}{b}>0$, więc ostatnie równanie ma rozwiązanie. Zatem największą wartością funkcji f jest liczba $\sqrt{a^2+b^2}$.

1366. $\left[\dfrac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}{1+\cos(4x)}\right]^2=\left[\dfrac{\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\sin^2(2x)+\cos^2(2x)+\cos^2(2x)-\sin^2(2x)}\right]^2=$

$=\left[\dfrac{\dfrac{2\cos(2x))}{\sin(2x)}}{2\cos^2(2x)}\right]=\dfrac{4}{\sin^2(4x)}.$

Ponieważ największą wartością funkcji $y=\sin^2(4x)$ jest 1, więc najmniejszą wartością funkcji danej jest 4.

1367. $\sqrt{3}\cos(3x)-\sin(3x)=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(3x)-\dfrac{1}{2}\sin(3x)\right)=$

$=2\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cos(3x)-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin(3x)\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-3x\right).$

Ponieważ zbiorem wartości funkcji $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-3x\right)$ jest przedział$\langle -1;\ 1\rangle$, więc wartością najmniejszą funkcji rozważanej jest -2, a wartością największą 2.

1368. $\cos x+\dfrac{1}{2}\cos(2x)=\cos x+\dfrac{1}{2}(\cos^2x-\sin^2x)=\cos^2x+\cos x-\dfrac{1}{2}=$

$=\left(\dfrac{1}{2}+\cos x\right)^2-\dfrac{3}{2}.$ Stąd i z faktu, że zbiorem wartości funkcji $y=\cos x$ jest przedział $\langle -1;\ 1\rangle$ wynika, że najmniejszą wartością rozważanej funkcji jest $-\dfrac{3}{2}$, a wartością największą jest $\dfrac{3}{2}$.

1369. $|3\sin x+3\cos x|=3\left|\sin x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right|=3\left|2\sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=3\sqrt{2}\left|\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|.$

Ponieważ zbiorem wartości funkcji $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ jest przedział $\langle -1;\ 1\rangle$, więc zbiorem wartości funkcji $y=\left|\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$ jest przedział $\langle 0;1\rangle$. Wobec tego zbiorem wartości podanej funkcji jest przedział $\langle 0;\ 3\sqrt{2}\rangle$.
Oznacza to, że wartością najmniejszą tej funkcji jest 0, a wartością największą jest $3\sqrt{2}$.

1370. $D_f=\{x\in\boldsymbol{R};\ \sin x\neq 0\ \text{ i }\ \cos x\neq 0\}=\{x\in\boldsymbol{R}:\ x\neq k\dfrac{\pi}{2}\ \text{ i }\ k\in\boldsymbol{C}\}$. Aby ustalić zbiór Z_f wartości funkcji zauważmy, że $\sin^{-2}x+\cos^{-2}x=\dfrac{1}{\sin^2x}+\dfrac{1}{\cos^2x}=\dfrac{1}{\sin^2x\cos^2x}=$

$=\dfrac{4}{\sin^2(2x)}$. Ponieważ zbiorem wartości funkcji $y=\sin(2x)$ jest przedział $\langle -1;\ 1\rangle$, więc zbiorem wartości funkcji $y=\sin^2(2x)$ jest przedział $\langle 0;\ 1\rangle$. Zatem $Z_f=\langle 4;\ \infty)$.
Wartość najmniejsza funkcji równa 4 i jest osiągana dla $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$, gdzie $k\in\boldsymbol{C}$.

1371. $D_f=\boldsymbol{R}$. Aby rozwiązać zadanie zapytamy, dla jakich $T\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ prawdziwe jest zdanie: $\bigwedge\limits_{x\in\boldsymbol{R}}\cos[3(x+T)-5]=\cos(3x-5)$.

Zauważmy, że:

$\bigwedge\limits_{x\in\boldsymbol{R}}\cos[3(x+T)-5]=\cos(3x-5)\Leftrightarrow\bigwedge\limits_{x\in\boldsymbol{R}}\cos[(3x-5)+3T]=\cos(3x-5)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(3T=2k\pi\ \text{i}\ k\in\boldsymbol{C})\Leftrightarrow\left(T=\dfrac{2k\pi}{3}\ \text{i}\ k\in\boldsymbol{C}\right).$

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że okresem zasadniczym podanej funkcji jest liczba $T_0=\dfrac{2\pi}{3}$.

1372. $T_0=1$.

1373. $T_0=2\pi$. Wskazówka: $\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1374. $T_0=\pi$. Wskazówka: $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\dfrac{2}{\sin(2x)}$.

1375. $T_0=\pi$. Wskazówka: $\sin^2x=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

1376. $D_f=R$. Przypuśćmy, że istnieje okres zasadniczy funkcji $y=3\sin x+\sin(2x)$ i jest nim liczba T. Wtedy $\bigwedge\limits_{x\in\boldsymbol{R}}3\sin(x+T)+\sin[2(x+T)]=3\sin x+\sin(2x)$, czyli

$$\bigwedge_{x\in\boldsymbol{R}}3\sin(x+T)+\sin(2x+2T)=2\sin x+\sin(2x). \qquad (1)$$

Podstawiając do (1) $x=0$ otrzymujemy $3\sin T+\sin(2T)=0$, czyli $\sin T(3+2\cos T)=0$. Stąd i z faktu, że $\bigwedge\limits_{T\in\boldsymbol{R}}3+2\cos T\neq 0$ wynika, że $\sin T=0$, a więc $T=k\pi$ i $k\in\boldsymbol{C}$. Przeprowadzone rozumowanie upoważnia do stwierdzenia, że jeżeli rozważana funkcja ma okres zasadniczy, to jest nim liczba postaci $k\pi$, gdzie $k\in\boldsymbol{C}$. Łatwo sprawdzić, że $T=\pi$ nie spełnia warunki (1), natomiast warunek ten spełnia liczba 2π. Zatem $T_0=2\pi$.

1377. $D_f=\mathbf{R}$. Przypuśćmy, że podana funkcja jest okresowa. Przypuśćmy, że przy niewymiernym a istnieje takie $T\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, że $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} \cos[a(x+T)+\cos(x+T)=$ $=\cos(ax)+\cos x$. Wtedy dla $x=0$ mamy $\cos(aT)+\cos T=2$.
Stąd $\cos(aT)=1$ i $\cos T=1$, a więc $aT=2k\pi$ i $T=2l\pi$, gdzie $k,\ l\in C$.
Ponieważ $T\neq 0$, więc $l\neq 0$.

Z powyższych warunków otrzymujemy $a=\frac{k}{l}$, co jest sprzeczne z założeniem, że a jest liczbą niewymierną.

1378. $D_f=\langle 0;\ \infty)$. Przypuśćmy, że T jest okresem funkcji $y=\sin\sqrt{x}$. Wtedy $T>0$ i $\bigwedge_{x\in D_f} \sin\sqrt{x+T}=\sin\sqrt{x}$. Dla $x=0$ oraz $x=T$ otrzymujemy $\sin\sqrt{T}=0$ i $\sin\sqrt{2T}=\sin\sqrt{T}$. Stąd $\sin\sqrt{T}=0$ i $\sin\sqrt{2T}=0$, a tym samym $\sqrt{T}=k\pi$ i $\sqrt{2T}=l\pi$, gdzie $k,\ l\in N$, czyli $T=k^2\pi^2$ i $2T=l^2\pi^2$. Oznacza to, że $\left(\frac{l}{k}\right)^2=2$, co jest sprzeczne.

1379. Łatwo wykazać, że $\cos^2x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2x}$. Stąd i z faktu, że tg^2x jest liczbą niewymierną wynika, że $\cos^2x$ jest także liczbą niewymierną.

1380. $D_f=\langle -1;\ \frac{1}{3}\rangle$. 1381. 0. 1382. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1383. Przyjmijmy, że $\arccos\frac{3}{5}=x$. Wtedy $\cos x=\frac{3}{5}$ i $x\in(0;\ \pi)$.

Zatem $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)=\sin(2x)=2\sin x\cdot\cos c=2\sqrt{1-\frac{9}{25}}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$.

1384. Przyjmijmy, że $\arcsin\frac{12}{13}=x$. Wtedy $\sin x=\frac{12}{13}$ i $x\in(0;\ \frac{\pi}{2})$.

$$\text{Zatem } \mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)=\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1-\frac{144}{169}}}=\frac{12}{5}.$$

1385. Przyjmijmy, że $\arcsin\frac{3}{5}=x$ i $\arcsin\frac{8}{17}=y$. Wtedy $\sin x=\frac{3}{5}$ i $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, i $\sin y=\frac{8}{17}$, i $y\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Zatem $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)=\sin(x+y)=$
$=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y=\sin x\sqrt{1-\sin^2y}+\sqrt{1-\sin^2x}\cdot\sin y=$
$=\frac{3}{5}\cdot\sqrt{1-\frac{64}{289}}+\sqrt{1-\frac{9}{25}}\cdot\frac{8}{17}=\frac{77}{85}$.

1386. Przyjmijmy, że $\arcsin\frac{2}{3}=x$. Wtedy $\sin x=\frac{2}{3}$ i $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\mathrm{ctg}\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)=\mathrm{ctg}(2x)=\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}=\frac{1-2\sin^2x}{2\sin x\cdot\cos x}=\frac{1-2\sin^2x}{2\sin x\sqrt{1-\sin^2x}}=$$
$$=\frac{1-2\cdot\frac{4}{9}}{2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{4}{9}}}=\frac{1}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{20}.$$

1387. Niech $\arccos x=y$. Wtedy $\cos y=x$ i $y\in\langle 0;\ \pi\rangle$. Stąd i ze wzoru $\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cos y$ mamy: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=x$. (1)

Ponieważ $y\in\langle 0;\ \pi\rangle$, więc $\frac{\pi}{2}-y\in\left\langle -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$. (2)

Z (1) i (2) oraz definicji funkcji arcus sinus otrzymujemy $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-y$. Podstawiając $y=\arccos x$ mamy $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

1388. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1387.

1389. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1387.

1390. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1387

1391. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1387.

1392. Przyjmijmy, że $\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{2}=x$ i $\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{3}=y$. Wtedy $\mathrm{tg}x=\frac{1}{2}$ i $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ oraz $\mathrm{tg}y=\frac{1}{3}$ i $y\in\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$. Zatem, rozwiązanie zadania sprowadza się do udowodnienia, że $x+y=\frac{\pi}{4}$. Ponieważ $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ i $y\in\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$, więc $x+y\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Aby więc udowodnić, że $x+y=\frac{\pi}{4}$ wystarczy pokazać, że $\mathrm{tg}(x+y)=1$. Tak jest, bo jeżeli $\mathrm{tg}x=\frac{1}{2}$ i $\mathrm{tg}y=\frac{1}{3}$, to $\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y}=1$.

1393. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1392.

1394. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1392.

1395. Przyjmijmy, że $\mathrm{arctg}\frac{1}{5}=x$ i $\mathrm{arctg}\frac{1}{4}=y$. Wtedy $\mathrm{tg}x=\frac{1}{5}$ i $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{6}\right)$ i $\mathrm{tg}y=\frac{1}{4}$ i $y\in\left(0;\ \frac{\pi}{6}\right)$. Zatem rozwiązanie zadania sprowadza się do udowodnienia, że

$2x+y=\mathrm{arctg}\frac{32}{43}$. Wystarczy więc udowodnić, że $2x+y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ i $\mathrm{tg}(2x+y)=\frac{32}{43}$.

Ponieważ $x\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ i $y\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$, więc $2x\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$ i $y\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$, skąd $2x+y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Natomiast, ponieważ $\mathrm{tg}x=\frac{1}{5}$ i $\mathrm{tg}y=\frac{1}{4}$, to

$$\mathrm{tg}(2x+y)=\frac{\mathrm{tg}(2x)+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}(2x)\cdot\mathrm{tg}y}=\frac{\frac{2\,\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}+\mathrm{tg}y}{1-\frac{2\,\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}\cdot\mathrm{tg}y}=\frac{32}{43}.$$

1396. Wykorzystując tożsamość $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$ oraz równość $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x)=x$, dla $x\in\mathbf{R}-\{0\}$ mamy: $\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}x)=\frac{1}{\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x)}=\frac{1}{x}$.

1397. Wskazówka: Patrz zadanie 1396.

1398. Wiemy, że: $\bigwedge_{\alpha\in\mathbf{R}}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Podstawiając w tej tożsamości $\alpha=\arccos x$ otrzymujemy $\bigwedge_{x\in\langle-1;\,1\rangle}\sin^2(\arccos x)+\cos^2(\arccos x)=1$.

Zatem $\bigwedge_{x\in\langle-1;1\rangle}\sin^2(\arccos x)+x^2=1$, czyli $\sin^2(\arccos x)=1-x^2$, skąd

$$\bigwedge_{x\in\langle-1;\,1\rangle}|\sin(\arccos x)|=\sqrt{1-x^2}. \tag{1}$$

Z definicji funkcji arcus cosinus wynika, że

$$\bigwedge_{x\in\langle-1;\,1\rangle}0\leqslant\arccos x\leqslant\pi,\ \text{skąd}\ \bigwedge_{x\in\langle-1;\,1\rangle}\sin(\arccos x)\geqslant0 \tag{2}$$

Z (1) i (2): $\bigwedge_{x\in\langle-1;\,1\rangle}\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.

1399. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1398.

1400. Zauważmy, że jeśli $\cos\alpha\neq0$, to

$$\sin^2\alpha=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}. \tag{1}$$

Z definicji arcus tangens wynika, że:

$\bigwedge_{x\in\mathbf{R}}-\frac{\pi}{2}<\mathrm{arc\,tg}x<\frac{\pi}{2}$, skąd $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}}\cos(\mathrm{arc\,tg}x)\neq0$.

Ostatnie spostrzeżenie oznacza, że możemy w tożsamości (1) podstawić $\alpha=\mathrm{arc\,tg}x$. Po tym podstawieniu, dla dowolnego $x\in\mathbf{R}$ mamy:

$\sin^2(\mathrm{arc\,tg}x)=\frac{\mathrm{tg}^2(\mathrm{arc\,tg}x)}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arc\,tg}x)}$, skąd:

$$\bigwedge_{x\in\mathbf{R}}|\sin(\mathrm{arc\,tg}x)|=\frac{|\mathrm{tg}(\mathrm{arc\,tg}x)|}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arc\,tg}x)}}. \tag{2}$$

Ponieważ, jak już zauważyliśmy wcześniej, $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}}-\frac{\pi}{2}<\mathrm{arctg}x<\frac{\pi}{2}$, a dla dowolnego $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ liczby $\mathrm{tg}\alpha$ i $\sin\alpha$ są tego samego znaku, więc warunkowi (2) równoważny jest warunek $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}}\sin(\mathrm{arc\,tg}x)=$

$$=\frac{\mathrm{tg}(\mathrm{arc\,tg}x)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arc\,tg}x)}}.$$

Wobec tego $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}}\sin(\mathrm{arctg}x)=\frac{x}{1+x^2}$.

1401. Wskazówka: Wykorzystaj tożsamość $\cos^2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

1402. Wskazówka: Wykorzystaj tożsamość $\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

1403. Wskazówka: Wykorzystaj tożsamość $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$.

1404. Wskazówka: Wykorzystaj tożsamość $\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

1405. Wskazówka: Wykorzystaj tożsamość $\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$.

1406. Łatwo sprawdzić, że twierdzenie jest prawdziwe dla $x=1$ oraz $x=-1$. Jeżeli $x\in(-1;\,0)\cup(0;\,1)$, to wykorzystując tożsamość $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$ i równość podaną w zadaniu 1405 mamy:

$$\mathrm{tg}(\arccos x)=\frac{1}{\mathrm{ctg}(\mathrm{arc\,cos}x)}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

1407. Wskazówka: Patrz rozwiązanie zadania 1406.

1408. Wskazówka: Wykorzystaj tożsamość $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

1409. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ lub $x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1410. $x=\arcsin\frac{2}{3}+2k\pi$ lub $x=\pi-\arcsin\frac{2}{3}+2k\pi$ gdzie $k\in C$.

1411. $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi$, gdzie $k\in C$.

1412. $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}k\pi$, gdzie $k\in C$.

1413. $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ lub $x=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1414. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1415. $x=k\pi$, gdzie $k\in C$.

1416. $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1417. $x=2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1418. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in C$.

1419. $x=\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

$2t^2+t-3=0$ ≫

1420. $\cos x+\cos(2x)=2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-3=0 \Leftrightarrow (\cos x=-\frac{3}{2}$ lub $\cos x=1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=2k\pi$ i $k\in C)$.

1421. Dziedziną równania jest zbiór $D_r=\{x\in R;\ x\neq k\pi$ i $k\in C\}$.
Przy założeniu, że $x\in D_r$ mamy:

$2\sin x=3\mathrm{ctg}x \Leftrightarrow 2\sin^2 x=3\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi)$ i $k\in C]$.

1422. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, gdzie $k\in C$.

1423. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ lub $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1424. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ i $k\in C$.

1425. $x=k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1426. Nietrudno zauważyć, że liczy rzeczywiste x, dla których $\cos x=0$ nie spełniają równania. Możemy zatem obie strony podanego równania podzielić przez $\cos^2 x$. Otrzymujemy wtedy równanie $\mathrm{tg}^2 x-(\sqrt{3}+1)\mathrm{tg}x+\sqrt{3}=0$. Stąd
$x=\frac{\pi}{3}=k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, gdzie $k\in C$.

1427. Ponieważ $2=2\sin^2 x+2\cos^2 x$, więc dane równanie można przekształcić do postaci $2\sin^2 x-3\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=0$.
Postępując podobnie jak w zadaniu 1426 otrzymujemy:
$x=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, gdzie $k\in C$.

1428. $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, gdzie $k\in C$.

1429. $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1430. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$, lub $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$, gdzie $k\in C$.

1431. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}k\pi$, gdzie $k\in C$.

1432. $x=k\frac{\pi}{2}$ lub $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, lub $x=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1433. $x=k\frac{\pi}{3}$, gdzie $k\in C$.

1434. $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$ lub $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, lub $x=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, $k\in C$.

1435. $x=k\frac{\pi}{3}$ lub $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in C$.
Wskazówka: Lewą stronę równania przedstaw w postaci $[\sin(5x)+\sin x]+[\sin(4x)+\sin(2x)]+2\sin(3x)$.

1436. $\sin^2 x+\sin^2(2x)=\sin^2(3x) \Leftrightarrow \sin^2(3x)-\sin^2 x=\sin^2(2x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [\sin(3x)-\sin x][\sin(3x)+\sin x]=\sin^2(2x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\cos(2x)\cdot\sin x\cdot 2\sin(2x)\cdot\cos x=\sin^2(2x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\cos(2x)\cdot\sin^2(2x)-\sin^2(2x)=0 \Leftrightarrow \sin^2(2x)[2\cos(2x)-1]=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [\sin(2x)=0$ lub $\cos(2x)=\frac{1}{2}]$.

Stąd $x=k\frac{\pi}{2}$ lub $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, lub $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$, gdzie $k\in C$.

1437. $x=k\frac{\pi}{5}$ lub $x=k\frac{\pi}{2}$, lub $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in C$.

1438. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, lub $x=\frac{\pi}{10}=-+k\frac{\pi}{5}$, $k\in C$.

1439. $x=2k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{3}+4k\pi$, lub $x=\frac{5}{3}\pi+4k\pi$, gdzie $k\in C$.

1440. Dziedziną równania jest zbiór $D_r=\{x\in R;\ x\neq k\pi$ i $k\in C\}$.
Przy założeniu, że $x\in D_r$:
$\frac{1-\sin x}{2\sin x}=\mathrm{ctg}x-\cos x \Leftrightarrow 1-\sin x=2\cos x-2\sin x\cdot\cos x \Leftrightarrow (1-\sin x)(1-2\cos x)=$
$=0 \Leftrightarrow (\sin x=1$ lub $\cos x=\frac{1}{2})$.

Stąd: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1441. $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1442. $\sin x-\cos x=1\Leftrightarrow\sin x-1\cdot\cos x=1\Leftrightarrow\sin x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\cos x=1\Leftrightarrow$

$\sin x-\cos x=1/\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow\sin x-\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cdot\cos x=1\Leftrightarrow\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stąd: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ lub$x=\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1443. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ lub $x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1444. $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1445. Dziedziną równania jest zbiór $D_r=\{x\in R\colon x\neq k\frac{\pi}{2}$ i $k\in C\}$.

Przy założeniu, że $x\in D_r$:

$$tgx+\operatorname{ctg}x=4\sin(2x)\Leftrightarrow\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=8\sin x\cdot\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin^2x+\cos^2x=8\sin^2x\cdot\cos^2x\Leftrightarrow1=2\sin^2(2x)\Leftrightarrow\cos(4x)=0.$$

Stąd $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}$, gdzie $k\in C$.

1446. $\sin^4(2x)-\cos^4(2x)=\sin(4x)\Leftrightarrow[\cos^2(2x)+\sin^2(2x)][\cos^2(2x)-\sin^2(2x)]=$
$=-\sin(4x)\Leftrightarrow\cos(4x)+\sin(4x)=0.$

Rozwiązując ostatnie równanie otrzymujemy $x=\frac{3\pi}{16}+k\frac{\pi}{4}$, $k\in C$.

1447. $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}$ lub $x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}$, gdzie $k\in C$.

Wskazówka: $\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cdot\cos^2x$.

1448. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, gdzie $k\in C$.

1449. $x=k\pi$, gdzie $k\in C$.

1450. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, lub $x=k\pi$ lub $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1451. Zauważmy, że rozwiązania równania $\cos x=0$ nie są rozwiązaniami naszego równania. Zatem przy założeniu $\cos x\neq0$:

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}x-1}=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}.$$

$\operatorname{tg}x+1=(2-\sqrt{3})\operatorname{tg}x-2+\sqrt{3}$

$\operatorname{tg}x(1-2+\sqrt{3})=\sqrt{3}-3$

$\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-1}=\frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)}=-\sqrt{3}$

Stąd: $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$, gdzie $k\in C$.

1452. $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}$, gdzie $k\in C$.

1453. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ lub $x=2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1454. $2\sin x\cdot\sin(3x)=1\Leftrightarrow-2\sin(3x)\cdot\sin x=-1\Leftrightarrow\cos(3x+x)-\cos(3x-x)=-1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\cos(4x)-\cos(2x)=-1\Leftrightarrow2\cos^2(2x)-1-\cos(2x)=-1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow[\cos(2x)=0$ lub $\cos(2x)=\frac{1}{2}]$.

Stąd: $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ lub $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, lub $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$, gdzie $k\in C$.

1455. $x=k\frac{\pi}{6}$, gdzie $k\in C$.

1456. $x=k\frac{\pi}{2}$ lub $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}$, gdzie $k\in C$.

1457. $\sin^3x+\cos^3x=1\Leftrightarrow\sin^2x+\cos^2x-\sin^3x-\cos^3x=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\sin^2x(1-\sin x)+\cos^2x(1-\cos x)=0$. Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej x jest $\sin^2x(1-\sin x)\geqslant0$ i $\cos^2x(1-\cos x)\geqslant0$, więc rozważane równanie będzie prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin^2x(1-\sin x)=0$ i $\cos^2x(1-\cos x)=0$. Stąd ($\sin x=0$ lub $\sin x=1$) i ($\cos x=0$ lub $\cos x=1$).

Rozwiązując powyższą koniunkcję otrzymujemy $x=2k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1458. $x=2k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, lub $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1459. $x=k\frac{\pi}{2}$, gdzie $k\in C$.

1460. $x=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+k\pi$, gdzie $k\in C$.

1461. $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1462. Przy założeniach $\sin x+\cos x\geqslant0$ i $1+\operatorname{tg}x\geqslant0$ podane równanie przekształcamy do postaci $(\sin x+\cos x)^2=1+\operatorname{tg}x$, czyli $2\sin x\cdot\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$. Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy $x=2k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ i $x\neq\frac{5}{4}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1463. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1464. $x=2k+1$, $k\in C$.

1465. $x=\frac{\sqrt{2k+1}}{2}$ lub $x=-\frac{\sqrt{2k+1}}{2}$, gdzie $k\in N\cup\{0\}$.

1466. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1467. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1468. Przy założeniach $\sin x>0$ i $\sin x\neq 1$ oraz $\cos x>0$ i $\cos x\neq 1$ podane równanie przekształcimy do postaci

$\frac{1}{\log_{\cos x}\sin x}+\log_{\cos x}\sin x=2$, czyli $(\log_{\cos x}\sin x-1)^2=0$.

Stąd $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, gdzie $k\in C$.

1469. $2^{\sin^2x}+2^{\cos^2x}=3\Leftrightarrow\frac{2}{2^{\cos^2x}}+2^{\cos^2x}=3\Leftrightarrow(2^{\cos^2x})^2-3\cdot 2^{\cos^2x}+2=0\Leftrightarrow 2^{\cos^2x}=1$ lub $2^{\cos^2x}=2$).

Stąd $x=k\frac{\pi}{2}$, gdzie $k\notin C$. Mamy obliczyć sumę $1\cdot\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{2}+\ldots+200\cdot\frac{\pi}{2}$.

Powyższa suma jest równa: $\frac{\pi}{2}(1+2+\ldots+200)=\frac{\pi}{2}\frac{(1+200)\,200}{2}=$

$=\frac{\pi}{2}201\cdot 100=10\,050\pi$.

1470. Ponieważ $-1\leqslant\sin(\sqrt{2}x)\leqslant 1$, więc podanemu równaniu równoważna jest koniunkcja:

$[\sin(\sqrt{2}x)=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ lub $\sin(\sqrt{2}x)=-\frac{3}{4}\pi+2k\pi]$ i $k\in C$ i $-1\leqslant-\frac{3}{4}\pi+2k\pi\leqslant 1$,

i $-1\leqslant\frac{3}{4}\pi+2k\pi\leqslant 1$.

Łatwo sprawdzić, że powyższa koniunkcja jest fałszywa.

1471. $x=100^k$ lub $x=10^{\frac{4k+1}{2}}$, gdzie $k\in C$.
Wskazówka: Przyjmij: $\pi\log x=t$.

1472. $x=-\frac{3}{2}\pi$.

1473. Ponieważ zbiorem wartości funkcji $y=\sin(2x)$ jest przedział $\langle -1;1\rangle$, więc podane równanie będzie mieć rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy

$-1\leqslant\frac{2a-3}{4-a}\leqslant 1$.

Stąd $a\in\left\langle -1;\frac{7}{3}\right\rangle$.

1474. $a\in\langle-\sqrt{2};\sqrt{2}\rangle$. **1475.** $a\in\langle-\sqrt{2};\sqrt{2}\rangle$.

1476. Podane równanie przekształcamy do postaci $\sin^2(2x)=2-2a$.
Równanie to ma rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $0\leqslant 2-2a\leqslant 1$,

czyli gdy $a\in\langle\frac{1}{2};1\rangle$.

1477. Podane równanie przekształcamy do postaci $2\cos^2x+3\cos x-(a+1)=0$.
Równanie to ma rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $17+8a\geqslant 0$ i

$\left(\left|\frac{-3-\sqrt{17+8a}}{4}\right|\leqslant 1\right.$ lub $\left.\left|\frac{-3+\sqrt{17+8a}}{4}\right|\leqslant 1\right)$.

Rozwiązując powyższą koniunkcję otrzymujemy $a\in\left\langle-\frac{17}{8};4\right\rangle$.

1478. $3\sin(2x)-4\cos(2x)=a\Leftrightarrow 6\sin x\cdot\cos x-4(\cos^2x-\sin^2x)=a(\sin^2x+\cos^2x)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6\sin x\cdot\cos x-(a+4)\cos^2x-(a-4)\sin^2x=0$. Dzieląc teraz ostatnie równanie obustronnie przez $\cos^2x$ (możemy to zrobić, bo gdyby $\cos^2x=0$ i $6\sin x\cdot\cos x-(a+4)\cos^2x-(a-4)\sin^2x=0$, to $\cos x=0$ i $\sin x=0$, a to jest niemożliwe) otrzymujemy równanie $(a-4)\operatorname{tg}^2x-6\operatorname{tg}x+a+4=0$. Równanie to ma rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy: $(a-4=0$ i $-6\neq 0)$ lub $[a-4\neq 0$ i $36-4(a-4)(a+4)\geqslant 0]$.
Stąd $a\in\langle-5;5\rangle$.

1479. Dane równanie ma rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $z^2+az-2a^2=0$ z niewiadomą z ma przynajmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste należące do przedziału $\langle-1;1\rangle$.
Rozwiązując zadanie otrzymujemy $a\in\langle 0;1\rangle$.

1480. Wystarczy pokazać, że $2\sin 48^\circ\cdot\cos 42^\circ>1$. Zauważmy, że:
$2\sin 48^\circ\cdot\cos 42^\circ=2\cos(90^\circ-48^\circ)\cdot\cos 42^\circ=2\cos 42^\circ\cdot\cos 42^\circ=2\cos^2 42^\circ$.

Ale $\cos 42^\circ>\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Zatem, $2\sin 48^\circ\cdot\cos 42^\circ>2\cos^2 45^\circ=1$.

1481. Podane równanie przekształcamy do postaci

$\sin(3x)=\frac{5}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$. Ponieważ zbiorem wartości funkcji $y=\sin(3x)$ jest przedział $\langle-1;1\rangle$, więc wystarczy wykazać, że

$\bigwedge_{x\in R}\frac{5}{2}x^2-x+\frac{3}{2}>1$, czyli $\bigwedge_{x\in R}5x^2-2x+1>0$. Ostatnie zdanie jest zawsze prawdziwe.

1482. Łatwo wykazać, że dla $a>0$ i $a\neq 1$ prawdziwa jest alternatywa:

$\log a+\frac{1}{\log a}\leqslant-2$ lub $\log a+\frac{1}{\log a}\geqslant 2$. Stąd podane równanie jest sprzeczne.

1483. Podstawmy $2^{|\cos x|}=t$. Wtedy otrzymujemy nierówność
$t^2+2(2a+1)t+4a^2-5<0$.
Ponieważ $1\leqslant t\leqslant 2$, więc powyższa nierówność będzie prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy wartości wyrażenia po lewej stronie nierówności dla $t=1$ i $t=2$ będą ujemne. Stąd otrzymujemy:

$1+2(2a)+4a^2-5<0$ i $4+4(2a+1)+4a^2-5<0$.
Rozwiązując powyższy układ nierówności otrzymujemy
$a\in\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$.

1484. Ponieważ każda prosta równoległa do osi x ma z wykresem funkcji $y=\mathrm{tg}x$ o dziedzinie zawężnej do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ dokładnie jeden punkt wspólny, więc dla każdej liczby rzeczywistej z równanie $\mathrm{tg}x=z$ ma w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste. Stąd i z faktu, że danemu równaniu równoważna jest koniunkcja $\mathrm{tg}x=z$ i $1+z^3=a(z+z^2)$ wynika, że warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $1+z^3=a(z+z^2)$, czyli równanie $(z+1)[z^2-(a+1)z+1]=0$ będzie mieć dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $z^2-(a+1)z+1=0$ będzie równaniem sprzecznym.
Zatem $(a+1)^2-4<0$, skąd $a\in(-3;\ 1)$.

1485. Dziedziną równania jest zbiór $D_r=\boldsymbol{R}-\{0\}$. Przy założeniu, że $x\in D_r$ mamy:
$\sin\frac{\pi}{x}=1\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ i } k\in \boldsymbol{C}\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{2}{4k+1} \text{ i } k\in\boldsymbol{C}\right)$. Uzyskane rozwiązania będą należeć do przedziału $\left(\frac{1}{1000};\ \frac{1}{500}\right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$\frac{2}{4k+1}>\frac{1}{1000}$ i $\frac{2}{4k+1}<\frac{1}{500}$ i $k\in\boldsymbol{C}$. Łatwo sprawdzić, że ostatnią koniunkcję spełnia 300 liczb całkowitych. Oznacza to, że do przedziału $\left(\frac{1}{1000};\ \frac{1}{500}\right)$ należy 300 rozwiązań danego równania.

1486. $\sin x\cdot\sin(2x)\cdot\sin(3x)=\frac{1}{2}\sin(2x)[\cos(2x)-\cos(4x)]=$
$=\frac{1}{2}\sin(2x)\cdot\cos(2x)-\frac{1}{2}\sin(2x)\cdot\cos(4x)=\frac{1}{4}\sin(4x)-\frac{1}{4}[\sin(6x)-\sin(2x)]=$
$=\frac{1}{4}\sin(4x)-\frac{1}{4}\sin(6x)+\frac{1}{4}\sin(2x)\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.
Z przeprowadzonych rozważań wynika, że $\bigwedge_{x\in\boldsymbol{R}}\sin x\cdot\sin(2x)\cdot\sin(3x)\leqslant\frac{3}{4}$.
Oznacza to, że równanie $\sin x\cdot\sin(2x)\cdot\sin(3x)=1$ jest sprzeczne w zbiorze liczb rzeczywistych.

1487. $\cos^2(xy)+2x[1+\cos(xy)]+2x^2=-1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\cos^2(xy)+2x\cos(xy)+x^2+x^2+2x+1=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow[x+\cos(xy)]^2+(x+1)^2=0\Leftrightarrow[x+\cos(xy)=0 \text{ i } x+1=0]\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x=-1 \text{ i } \cos y=1)\Leftrightarrow(x=-1 \text{ i } y=2k\pi \text{ i } k\in\boldsymbol{C})$.

1488. Rozwiązując podany układ otrzymujemy $x=\sin\alpha$ i $y=-\cos\alpha$. Wobec tego warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy
$-\cos\alpha=1-\sin^2\alpha$, czyli gdy $\cos^2\alpha+\cos\alpha=0$. Stąd $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$ lub
$\alpha=-\pi+2k\pi$, gdzie $k\in\boldsymbol{C}$.

1489. Zastrzeżenia: $(\cos x\neq0$ i $\cos y\neq0$, i $\sin x\neq0$, i $\sin y\neq0)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(x\neq k\frac{\pi}{2} \text{ i } y\neq k\frac{\pi}{2} \text{ i } k\in\boldsymbol{C}\right)$.
Przy powyższych zastrzeżeniach możemy dany układ zapisać w postaci:
$\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y=2$ i $\frac{1}{\mathrm{tg}x}-\frac{1}{\mathrm{tg}y}=2$.
Przyjmując, że $\mathrm{tg}x=u$ i $\mathrm{tg}y=v$ mamy $u-v=2$ i $\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=2$. Stąd $u=1$ i $v=-1$, czyli
$\mathrm{tg}x=1$ i $\mathrm{tg}y=-1$. Stąd $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$ i $y=\frac{3}{4}\pi+m\pi$, gdzie $n,m\in\boldsymbol{C}$.

1490. $\left(x+y=\frac{\pi}{6} \text{ i } \sin x\cdot\cos y=\frac{3}{4}\right)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left\{x+y=\frac{\pi}{6} \text{ i } \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]=\frac{3}{4}\right\}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left[x+y=\frac{\pi}{6} \text{ i } \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{6}+\sin(x-y)\right]=\frac{3}{4}\right]\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left[x+y=\frac{\pi}{6} \text{ i } \sin(x-y)=1\right]\Leftrightarrow\left(x+y=\frac{\pi}{6} \text{ i } x-y=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ i } k\in\boldsymbol{C}\right)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(x=\frac{\pi}{3}+k\pi \text{ i } y=-\frac{\pi}{6}-k\pi \text{ i } k\in\boldsymbol{C}\right)$.

1491. $x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$ i $y=\frac{\pi}{12}-2k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ i $y=\frac{\pi}{12}-2k\pi$, gdzie $k\in\boldsymbol{C}$.

1492. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ i $y=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ i $k\in\boldsymbol{C}$.

1493. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ i $y=-k\pi$ lub $x=k\pi$ i $y=\frac{\pi}{4}-k\pi$, $k\in\boldsymbol{C}$.

1494. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ i $y=\frac{\pi}{4}+l\pi$, gdzie $k,l\in\boldsymbol{C}$.

1495. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ i $y=\frac{\pi}{3}+l\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ i $y=-\frac{\pi}{3}+l\pi$, gdzie $k,l\in\boldsymbol{C}$.

1496. Dodając i odejmując stronami podane równania otrzymujemy układ równań:
$\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y=a+\frac{1}{4}$ i $\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y=a-\frac{1}{4}$. Ponieważ zbiorem wartości funkcji $y=\cos x$ jest przedział $\langle-1;\ 1\rangle$, więc układ ten będzie miał

rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy $-1 \leqslant a+\frac{1}{4} \leqslant 1$ i $-1 \leqslant a-\frac{1}{4} \leqslant 1$. Stąd $a \in \left\langle -\frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right\rangle$.

1497. $\frac{5}{6}\pi+2k\pi<x<\frac{13}{6}\pi+2k\pi$ i $k \in \boldsymbol{C}$.

1498. $-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi$ i $k \in \boldsymbol{C}$.

1499. $-\frac{\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5}<x<\frac{\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5}$ i $k \in \boldsymbol{C}$.

1500. $\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\pi$ i $k \in \boldsymbol{C}$.

1501. $\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{3}{4}\pi+k\pi$ i $k \in \boldsymbol{C}$.

1502. $\sin^2 x \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\sin x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{4}+k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}+k\pi \text{ i } k \in \boldsymbol{C} \right)$.

1503. $\operatorname{ctg}^2 x>3 \Leftrightarrow |\operatorname{ctg} x|>\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ i } x \neq k\pi \text{ i } k \in \boldsymbol{C} \right)$.

1504. $\left(\log_4 \cos x<-\frac{1}{2} \text{ i } x \in \langle 0; 2\pi \rangle \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\cos x<4^{-\frac{1}{2}} \text{ i } \cos x>0 \text{ i } x \in \langle 0; 2\pi \rangle \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(0<\cos x<\frac{1}{2} \text{ i } x \in \langle 0; 2\pi \rangle \right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi \right)$.

1505. $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi \right)$.

1506. $x \in \left(0; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left(\pi; \frac{4}{3}\pi \right\rangle$.

1507. $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left\langle \frac{4}{3}\pi; \frac{3}{2}\pi \right)$.

1508. $\left(2^{\sin x-1}<\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ i } x \in \langle 0; 2\pi \rangle \right) \Leftrightarrow \left(\sin x<\frac{1}{2} \text{ i } x \in \langle 0; 2\pi \rangle \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; 2\pi \right\rangle$.

1509. Dziedziną nierówności jest zbiór $D_n=\left\{ x \in \boldsymbol{R}\colon x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ i } k \in \boldsymbol{C} \right\}$.

Przy założeniu, że $x \in D_n$: $\log_2 \cos^2 x \geqslant -2 \Leftrightarrow \log_2 \cos^2 x \geqslant \log_2 \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos^2 x \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow |\cos x| \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{3}+k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}+k\pi \text{ i } k \in \boldsymbol{C} \right)$.

1510. $\left[\frac{\cos(2x)}{\cos x} \leqslant 1 \text{ i } x \in (0; \pi) \right] \Leftrightarrow \left[\frac{2\cos^2 x-\cos x-1}{\cos x} \leqslant 0 \text{ i } x \in (0; \pi) \right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\cos x=t \text{ i } \frac{2t^2-t-1}{t} \leqslant 0 \text{ i } x \in (0; \pi) \right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\left(\cos x \leqslant -\frac{1}{2} \text{ lub } 0<\cos x \leqslant 1 \right) \text{ i } x \in (0; \pi) \right] \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi; \pi \right)$.

1511. $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi; \pi \right)$.

1512. $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi \right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi; 2\pi \right\rangle$.

1513. $-\frac{2}{3}\pi+2k\pi<x<\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ i $k \in \boldsymbol{C}$.

1514. $\frac{\pi}{6}+2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5}{6}\pi+2k\pi$ i $k \in \boldsymbol{C}$.

1515. $\sin x-\sqrt{3}\cos x>1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin x-\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3} \right)>\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{6}+2k\pi<x-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{6}\pi+2k\pi \text{ i } k \in \boldsymbol{C} \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{1}{6}\pi+2k\pi \text{ i } k \in \boldsymbol{C} \right)$.

1516. $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi$ i $k \in \boldsymbol{C}$.

1517. $k\pi \leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi$ i $k \in \boldsymbol{C}$.

1518. $\left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ lub } -\frac{\pi}{6}=k\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\pi \right)$ i $k \in \boldsymbol{C}$.

1519. $\left(\frac{\pi}{3}+k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\pi+k\pi \text{ lub } -\frac{\pi}{4}+k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}+k\pi \right)$ i $k \in \boldsymbol{C}$.

1520. $-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}$ i $k\in \boldsymbol{C}$.

1521. $\left(\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi \text{ lub } \frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+2k\pi\right)$ i $k\in \boldsymbol{C}$.

1522. Dziedziną nierówności jest zbiór $D_n=\left\{x\in \boldsymbol{R}\colon\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ i } k\in \boldsymbol{C}\right\}$. Zakładając, że $x\in D_n$ i wykorzystując wzory $\sin(2\alpha)=\frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$ i $\cos(2\alpha)=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$ mamy:

$$2\cos(2x)+\sin(2x)>\mathrm{tg}x\Leftrightarrow\frac{2-2\,\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}+\frac{2\,\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2x}>\mathrm{tg}x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mathrm{tg}^3x+2\,\mathrm{tg}^2x-\mathrm{tg}x-2<0\Leftrightarrow(\mathrm{tg}x<-2 \text{ lub} -1<\mathrm{tg}x<1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\mathrm{arc\,tg}(-2)+k\pi \text{ lub } -\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi\right] \text{ i } k\in \boldsymbol{C}\right\}.$$

1523. $\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+k\pi$ i $k\in \boldsymbol{C}$.

1524. Przy założeniu, że $x\in\langle 0;\ 2\pi\rangle$:

$$2^{\sin 2x}<\sqrt{2^{\frac{3}{4}+\sin 2x}}\Leftrightarrow 2^{\sin x}<2^{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sin^2 x}\Leftrightarrow\sin^2x<\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sin^2x\Leftrightarrow\sin^2x<\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|\sin x|<\frac{3}{2}\Leftrightarrow x\in\left\langle 0;\ \frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3}\pi;\ \frac{4}{3}\pi\right)\cup\left(\frac{5}{3}\pi;\ 2\pi\right\rangle.$$

1525. $-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7}{6}\pi+2k\pi$ i $k\in \boldsymbol{C}$.

1526. $-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi$ i $k\in \boldsymbol{C}$.

1527. $\left(2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ lub } \frac{5}{6}\pi+2k\pi<x<\pi+2k\pi\right)$ i $k\in \boldsymbol{C}$.

1528. $x\in(2\pi;\ 7)$.

1529. $\left(\frac{7}{6}\pi+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11}{6}\pi+2k\pi \text{ lub } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ i $k\in \boldsymbol{C}$.

1530. $\left(-\frac{1}{2}+k<x\leqslant k \text{ lub } \frac{1}{4}+k\leqslant x<\frac{1}{2}+k\right)$ i $k\in \boldsymbol{C}$.

1531. Ponieważ $\bigwedge_{x\in \boldsymbol{R}} -1\leqslant\sin x\leqslant 1$, a przedział $\langle -1;\ 1\rangle$ zawiera się w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, w którym funkcja cosinus jest dodatnia, więc podana nierówność jest sprzeczna.

1532. Ponieważ $\bigwedge_{x\in \boldsymbol{R}} -1\leqslant\cos x\leqslant 1$, a przedział $\langle -1;\ 1\rangle$ zawiera się w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, więc:

$$\sin(\cos x)<0\Leftrightarrow(\cos x=z \text{ i } z\in\langle -1;\ 1\rangle \text{ i } \sin z<0)\Leftrightarrow(\cos x=z \text{ i } z\in\langle -1;\ 0))\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1\leqslant\cos x<0\Leftrightarrow\cos x<0\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3}{2}\pi+2k\pi \text{ i } k\in \boldsymbol{C}.$$

1533. $\arcsin(\log x)>0\Leftrightarrow(x>0 \text{ i } 0<\log x\leqslant 1)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x>0 \text{ i } \log 1<\log x\leqslant\log 10)\Leftrightarrow(x>0 \text{ i } 1<x\leqslant 10)\Leftrightarrow x\in(1;\ 10\rangle$.

1534. $f[g(x)]\geqslant 2\Leftrightarrow 2^{\sin x}\geqslant 2\Leftrightarrow\sin x\geqslant 1\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ i $k\in \boldsymbol{C}$.

1535. $g[f(x)]\geqslant 1\Leftrightarrow\sin(2^x)\geqslant 1\Leftrightarrow\sin(2^x)=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(2^x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ i } k\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}\right)\Leftrightarrow\left[x=\log_2\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \text{ i } k\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}\right]$.

1536. $D_f=\langle -4;\ -\pi)\cup(0;\ \pi)$.

1537. $D_f=\left\{x\in \boldsymbol{R}\colon \frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+2k\pi \text{ i } k\in \boldsymbol{C}\right\}$.

1538. $D_f=\left\{x\in \boldsymbol{R}\colon \frac{5}{6}\pi+2k\pi<x\leqslant\frac{5}{4}\pi+2k\pi \text{ i } k\in \boldsymbol{C}\right\}$.

1539. $D_f=\left\{x\in \boldsymbol{R}\colon \frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ i } k\in \boldsymbol{C}\right\}$.

1540. $D_f=\{x\in \boldsymbol{R}\colon \cos x\neq 0 \text{ i } \sin(2x)\neq 0 \text{ i } [\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}(2x)]\cdot\sin(2x)>0\}=$

$$=\left\{x\in \boldsymbol{R}\colon \cos x\neq 0 \text{ i } 2\sin x\cdot\cos x\neq 0 \text{ i } \frac{\sin x}{\cos x}\cdot 2\sin x\cdot\cos x+\cos^2x-\sin^2x>0\right\}=$$

$$=\{x\in \boldsymbol{R}\colon \cos x\neq 0 \text{ i } \sin x\neq 0 \text{ i } 1>0\}=\left\{x\in \boldsymbol{R}\colon x\neq k\frac{\pi}{2} \text{ i } k\in \boldsymbol{C}\right\}.$$

Aby udowodnić, że wykres podanej funkcji zawiera się w osi OX wystarczy pokazać, że $\bigwedge_{x\in D_f} \log_5\{[\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}(2x)]\cdot\sin(2x)\}=0$

czyli, że $\bigwedge_{x\in D_f} [\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}(2x)]\cdot\sin(2x)=1$. Widać, że jeżeli $x\in D_f$, to:
$[\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}(2x)]\cdot\sin(2x)=2\sin^2x+\cos^2x-\sin^2x=1$.

1541. $\alpha=0$ lub $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

1542. $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

1543. $\alpha=0$ lub $\alpha=\frac{\pi}{3}$, lub $\alpha=\frac{2}{3}\pi$.

1544. Przy założeniu $m\in\left(-\frac{5}{3};\ 10\right)$ podane równanie przekształcamy do postaci

$-\cos\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{3m+5}{10-m}$. Powyższe równanie ma rozwiązania rzeczywiste

wtedy, gdy $-1\leqslant\log_{\frac{1}{3}}\frac{3m+5}{10-m}\leqslant 1$.

Stąd $m\in\left\langle -\frac{1}{2};\ 10\right)$.

1545. $\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{12}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{12};\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

1546. Podstawiając $2^x=t$ otrzymujemy równanie $(2\sin\alpha-1)\,t^2-2t+\sin\alpha=0$.
Podane równanie będzie mieć dwa różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy powyższe równanie będzie mieć dwa różne rozwiązania dodatnie. Tak będzie, gdy:

$2\sin\alpha-1\neq 0$ i $4-4\sin\alpha\cdot(2\sin\alpha-1)>0$ i $\frac{2}{2\sin\alpha-1}>0$ i $\frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha-1}>0$.

Po rozwiązaniu układu nierówności otrzymujemy:
$\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$ lub $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{5}{6}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in \boldsymbol{C}$.

1547. $\alpha\in\left(\frac{2}{3}\pi;\ \pi\right)$.

1548. $\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{12}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{12};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

1549. $\alpha=\frac{\pi}{4}$ lub $\alpha=\frac{3}{4}\pi$

1550. $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

1551. Rozwiązując podane równanie otrzymujemy $x=\frac{5\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}$ lub $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie $k\in\boldsymbol{C}$. Łatwo również stwierdzamy, że

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0\Leftrightarrow\left(-\frac{\pi}{8}l\pi<x<\frac{3}{8}\pi+l\pi \text{ i } l\in\boldsymbol{C}\right)$.

Mamy zbadać, dla jakich $k\in\boldsymbol{C}$ prawdziwa jest nierówność
$-\frac{\pi}{8}+l\pi<\frac{5\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}<\frac{3}{8}\pi+l\pi$, gdzie $l\in\boldsymbol{C}$.

Przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy $-\frac{11}{12}<k-4l<\frac{13}{12}$.

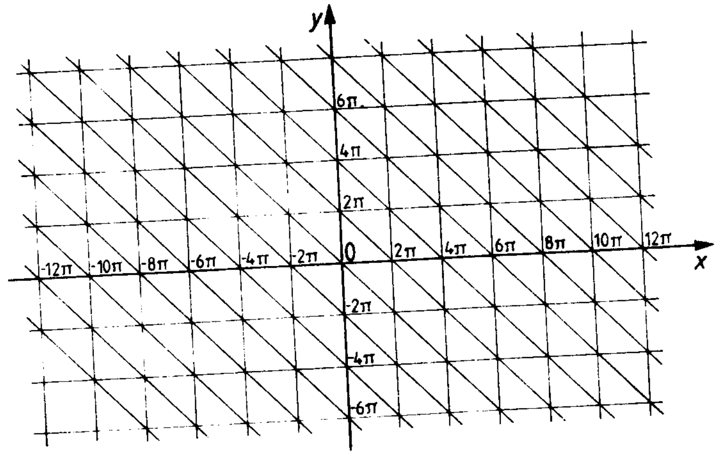
Ponieważ w przedziale $\left(-\frac{11}{12};\ \frac{13}{12}\right)$ są tylko dwie liczby całkowite 0 i 1, więc ostatnia nierówność może być prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $k-4l=0$ lub $k-4l=1$, czyli gdy $k=4l$ lub $k=4l+1$. Jeżeli $k=4l$, to $x=\frac{5\pi}{48}+l\pi$, jeżeli $k=4l+1$, to $x=\frac{17}{48}\pi+l\pi$. Podobnie znajdujemy liczby postaci $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie $k\in\boldsymbol{C}$, spełniające nierówność $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0$ otrzymując $x=\frac{7\pi}{24}+l\pi$.

1552. $\sin x+\sin y=\sin(x+y)\Leftrightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left(\sin\frac{x+y}{2}=0 \text{ lub } \cos\frac{x+y}{2}=\cos\frac{x-y}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\left(\frac{x+y}{2}=k\pi \text{ lub } \frac{x+y}{2}=\frac{x-y}{2}+2k\pi \text{ lub } \frac{x+y}{2}=-\frac{x-y}{2}+2k\pi\right) \text{ i } k\in\boldsymbol{C}\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[(y=-x+2k\pi$ lub $y=2k\pi$, lub $x=2k\pi)$ i $k\in\boldsymbol{C}]$ (rys. 95).



Rys. 95.

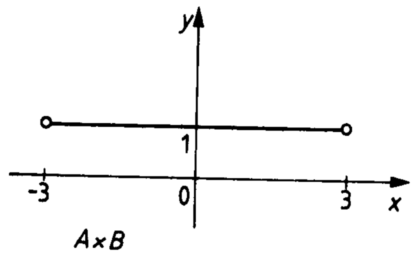
1553. $A=\left\{x\in\boldsymbol{R}\colon \bigvee_{y\in\boldsymbol{R}}(2+\cos y>|x|)\right\}=$

$=\left\{x\in\boldsymbol{R}\colon \bigvee_{y\in\boldsymbol{R}}\cos y>|x|-2\right\}=\{x\in\boldsymbol{R}\colon |x|-2<1\}=\{x\in\boldsymbol{R}\colon |x|<3\}=(-3,\ 3).$

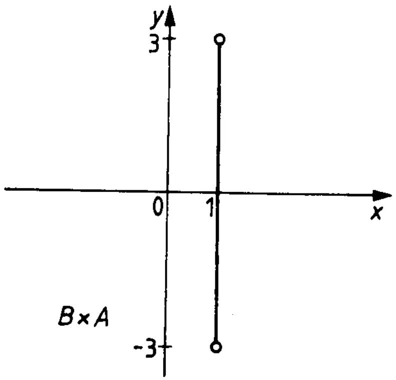
$B=\left\{x\in\boldsymbol{R}\colon \bigwedge_{x\in\boldsymbol{R}}2x-xy+y=2\right\}=$

$=\left\{x\in\boldsymbol{R}\colon \bigwedge_{y\in\boldsymbol{R}}2x-2-xy+y=0\right\}=\left\{x\in\boldsymbol{R}\colon \bigwedge_{y\in\boldsymbol{R}}(x-1)(2-y)=0\right\}=$

$=\{x\in\boldsymbol{R}\colon x-1=0\}=\{1\}.$



Rys. 96



Rys. 97

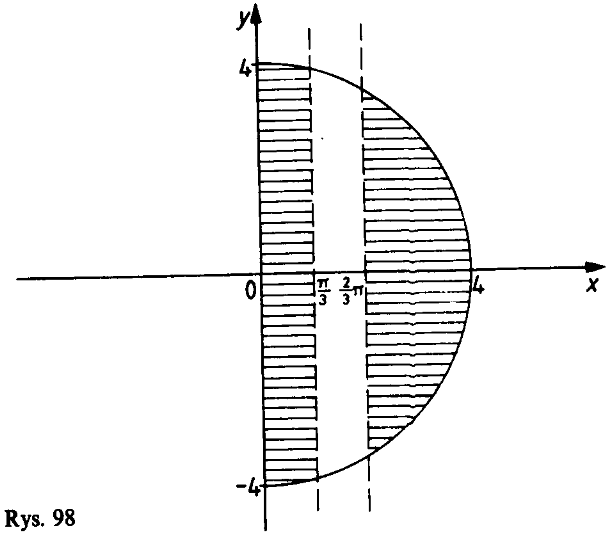
1554. $A=\{x\in\boldsymbol{R}\colon \sqrt{(x-1)^2}\leqslant 1\}=\{x\in\boldsymbol{R}\colon |x-1|\leqslant 1\}=\{x\in\boldsymbol{R}\colon -1\leqslant x-1\leqslant 1\}=\langle 0;\ 2\rangle.$

$B=\{x\in\boldsymbol{R}\colon 2\cos^2 x>\cos x \text{ i } x\in\langle 0;\ \pi\rangle\}=$

$=\left\{x\in\boldsymbol{R}\colon \left(\cos x<0 \text{ lub } \cos x>\frac{1}{2}\right) \text{ i } x\in\langle 0;\ \pi\rangle\right\}=\left\langle 0;\ \frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right\rangle.$

Zatem $A-B=\left\langle\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right\rangle.$

1555. Rys. 98.



Rys. 98

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne

rozpoczęły wydawanie nowej serii wydawniczej *Biblioteczka Matematyczna Szkoły Średniej*. Będzie ona zawierała:

— podręczniki monograficzne do nauki matematyki w szkole średniej (p),
— zbiory zadań (z),
— książki popularno-naukowe o tematyce dostępnej dla ucznia szkoły średniej oraz klasy ósmej szkoły podstawowej (n).

Będą to zarówno pozycje autorów polskich, jak i tłumaczenia z języków obcych. W przypadku książek grupy (n) zachęcamy nauczycieli do prowadzenia z ich pomocą zajęć o charakterze seminaryjnym (referaty).

Dotychczas ukazały się:

Z. Opial — ***Zbiory, formy zdaniowe, relacje*** (p)

Jest to znakomicie napisany podręcznik logiki dla szkół średnich. Obejmuje zakres pojęciowy niezbędny uczniowi szkoły średniej. Omówione są w nim podstawowe spójniki logiczne (alternatywa, koniunkcja, implikacja i negacja) i kwantyfikatory, odpowiadające im pojęcia teorii zbiorów oraz relacje. Tekst jest ilustrowany wieloma ciekawymi i głęboko przemyślanymi zadaniami. Polecana jako podręcznik w klasie pierwszej szkoły średniej.

A. Kołmogorow, A. Prochorow, I. Żurbienko — ***Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*** (p, n)

Podręcznik rachunku prawdopodobieństwa dla profilu matematyczno-fizycznego. Rozdziały 1, 2, 3 i 5 obejmują podstawowy zakres nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkole średniej (ta część książki może być wykorzystania jako podręcznik dla profili niehumanistycznych). Ponadto omawiane są w niej takie problemy, jak: błądzenie przypadkowe, zadanie o ruinie gracza, wnioskowanie statystyczne, procesy urodzin i śmierci. Autorzy zamieścili w książce wiele ciekawych zadań.

Każdy, kto chciałby się dowiedzieć, dlaczego rachunek prawdopodobieństwa jest nauką ciekawą, powinien tę pozycję kupić.

A. Smogorzewski — ***Metoda współrzędnych na płaszczyźnie*** (n)

W książce omówiona jest metoda współrzędnych, jej zastosowania, zalety i wady. Autor dokonuje porównania tej metody badawczej z metodami klasycznymi. Pokazuje, w których przypadkach warto ją stosować. Głównym zagadnieniem omawianym w książce jest określenie figur za pomocą równań.

Polecana jako lektura pomocnicza do nauki matematyki w klasach I i II szkoły średniej.

W. Bołtiański — ***Co to jest różniczkowanie?*** (n)

Wychodząc z zależności między prędkością i przyspieszeniem Autor wprowadza pojęcie pochodnej, które następnie stosuje do rozwiązywania problemów fizycznych i matematycznych. Książka może być bardzo przydatna przy wprowadzaniu pochodnej (klasa trzecia szkoły średniej). Nauczyciele fizyki również mogą ją z pożytkiem wykorzystać w klasach pierwszej i drugiej.

N. Borowikowa, E. Niczyporowicz — ***Indukcja zupełna w zadaniach*** (z)

Jest to zbiór zadań poświęcony dowodzeniu twierdzeń, wzorów i nierówności za pomocą indukcji zupełnej. Zasadniczą część zbioru stanowią odpowiednio dobrane przykłady z pełnymi rozwiązaniami. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań do samodzielnego rozwiązania. Książka może być z powodzeniem wykorzystana w drugiej klasie szkoły średniej przy omawianiu indukcji, a także może być wykorzystana w celach samokształceniowych.

W najbliższym czasie ukażą się w tej serii następujące pozycje:

L. Pontriagin — ***Metoda wsoółrzędnych*** (n)

W książce omówiona jest metoda współrzędnych na płaszczyźnie i w przestrzeni. Autor skoncentrował się na dwóch zastosowaniach tej metody: w badaniu funkcji oraz w geometrii analitycznej. Szczegółowo omówione są linie pierwszego i drugiego stopnia (proste, krzywe stożkowe). Sumienność i erudycja Autora powodują, że książkę powinien przeczytać każdy, kto chciałby dowiedzieć się, jakie możliwości daje ta metoda.

Pozycja polecana nauczycielom szkół średnich oraz uczniom klas III—IV profilu matematyczno-fizycznego.