JACEK M. JĘDRZEJEWSKI
WŁADYSŁAW WILCZYŃSKI

# przestrzenie metryczne w zadaniach

WYDANIE II ZMIENIONE I POSZERZONE



WYDAWNICTWO UNIWERSYTETU ŁÓDZKIEGO · ŁÓDŹ 1999

REDAKCJA NAUKOWO-DYDAKTYCZNA
„FOLIA MATHEMATICA"

*Władysław Wilczyński, Jacek Hejduk*

RECENZENT

*Elżbieta Wagner-Bojakowska*

OKŁADKĘ PROJEKTOWAŁA

*Barbara Grzejszczak*





Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
1999

Wydanie II zmienione i poszerzone. Nakład 500+50 egz. Ark. wyd. 15,7
Ark. druk. 18,75. Papier kl. III, 80 g, 70×100
Przyjęto do Wydawnictwa UŁ 29.03.1999 r.
Zam. 106/3124/99. Cena zł 22,–

Drukarnia Uniwersytetu Łódzkiego
90-236 Łódź, ul. Pomorska 143

ISBN 83-7171-308-8

# Spis treści

# Wstęp

Poprzedni nasz zbiór zadań z przestrzeni metrycznych powstał przed wielu laty. Stare wydanie już znika z bibliotek, ostatnie egzemplarze nie nadają się do dalszego czytania. Postanowiliśmy więc przypomnieć młodym adeptom sztuki matematycznej o tym zbiorze. Mamy nadzieję, że nadal zadania tu przedstawione przydadzą się matematycznej młodzieży. Zbiór w drugim wydaniu zmienił swój wygląd. Zmieniło się też niemal wszystko w tym wydaniu; począwszy od układu poprzez dodanie wielu zadań, w szczególności zaś zmienił się sposób definiowania dużej liczby pojęć. Ta ostatnia zmiana podyktowana została chęcią przystosowania występujących tu pojęć do standardu monografii R. Engelkinga.

Głównymi adresatami są jednak studenci studiów zaocznych, dla których pisaliśmy pierwsze wydanie naszego skryptu. Oni, mając bardzo ograniczone możliwości korzystania z bezpośrednich spotkań z nauczycielami akademickimi, są często zdani na własne siły i dla nich pisaliśmy to wydanie, w którym jak poprzednio, umieściliśmy rozwiązania wszystkich zadań.

W każdym rozdziale pierwsze zadania to twierdzenia, które najczęściej są wykładane przez każdego wykładowcę, następne zadania stanowią bądź uzupełnienie teorii, bądź są ilustracją tej teorii.

Bez przypominania w następnych rozdziałach będziemy używali następujących oznaczeń:

- R – zbiór liczb rzeczywistych,
- Q – zbiór liczb wymiernych,
- N – zbiór liczb naturalnych (dodatnich),
- C – zbiór liczb zespolonych,
- Z – zbiór liczb całkowitych

# Część I

# ZADANIA

# Rozdział 1

# Funkcje

Niech $X$ i $Y$ będą dowolnymi niepustymi zbiorami. Utwórzmy ich iloczyn kartezjański $X \times Y$. Każdy podzbiór iloczynu $X \times Y$ nazywamy *relacją* między elementami zbioru $X$ i zbioru $Y$.

Zbiór $f \subset X \times Y$ (czyli pewną relację) nazywamy *funkcją*, gdy spełnione są następujące warunki:

$$\forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} \left( (x, y) \in f \right),$$

$$\forall_{x \in X} \forall_{y_1, y_2 \in Y} \ \left( \left( (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \right) \Longrightarrow y_1 = y_2 \right).$$

Oznacza to, że dla każdego elementu $x$ zbioru $X$ istnieje dokładnie jeden element $y$ zbioru $Y$, taki, że para $(x, y)$ należy do $f$. Element $y$ nazywamy przyporządkowanym elementowi $x$ i oznaczamy symbolem $f(x)$. Częściej mówimy, że $y$ jest wartością funkcji $f$ w punkcie $x$, co zapisujemy $y = f(x)$. O funkcji $f$ mówimy, że jest określona na zbiorze $X$ oraz przekształca zbiór $X$ w zbiór $Y$, co oznaczamy

$$f : X \longrightarrow Y.$$

Do oznaczania różnych funkcji używać będziemy małych liter $f, g, h$, dużych liter $F, G, H$, a także liter greckich $\varphi, \psi, \varrho$ (jeżeli zajdzie potrzeba, to również ze wskaźnikami).

Zbiór wszystkich funkcji określonych na zbiorze $X$ o wartościach w zbiorze $Y$ oznaczamy symbolem $Y^X$. Dla rodziny wszystkich podzbiorów zbioru $X$ stosujemy oznaczenie $2^X$.

Jeżeli dla każdego elementu $y$ zbioru $Y$ istnieje element $x$ należący do zbioru $X$ taki, że $y = f(x)$, to znaczy

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} \left( (x, y) \in f \right),$$

to mówimy, *że funkcja $f$ przekształca zbiór $X$ na zbiór $Y$* (lub, że jest *surjekcją*), co zapisujemy

$$f : X \xrightarrow{\text{na}} Y.$$

Jeżeli dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

to funkcję taką nazywamy *różnowartościową* (lub *injekcją*).

Funkcję, która jest różnowartościowa i przekształca zbiór $X$ na zbiór $Y$, nazywamy *funkcją wzajemnie jednoznaczną* (lub *bijekcją*).

Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i zbiorów $A \subset X$, $B \subset Y$ przyjmujemy:

$$f(A) = \left\{ y \in Y : \exists_{x \in A} (y = f(x)) \right\},$$

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \}.$$

Zbiór $f(A)$ nazywamy *obrazem* zbioru $A$ wyznaczonym przez funkcję $f$, zbiór $f^{-1}(B)$ nazywamy *przeciwobrazem* zbioru $B$ wyznaczonym przez funkcję $f$.

Zauważamy bez trudu, że $f : X \longrightarrow Y$ jest funkcją przekształcającą zbiór $X$ na zbiór $Y$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(X) = Y$.

Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną relacją w iloczynie $X \times Y$. Relację

$$\mathcal{R}^{-1} \subset Y \times X$$

określoną w sposób następujący:

$$(y, x) \in \mathcal{R}^{-1} \iff (x, y) \in \mathcal{R}$$

nazywamy relacją odwrotną do relacji $\mathcal{R}$. Oczywiście dla każdej relacji istnieje relacja do niej odwrotna.

Niech teraz $f : X \longrightarrow Y$ będzie dowolną funkcją. Istnieje relacja odwrotna $f^{-1}$ do relacji $f$, jeśli jest ona funkcją, to nazywamy ją *funkcją odwrotną* do funkcji $f$ i oznaczamy, zgodnie z przyjętym wyżej sposobem, symbolem $f^{-1}$. Zauważmy przy tym, że funkcja $f : X \longrightarrow Y$ ma funkcję odwrotną $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną.

Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną relacją w iloczynie $X \times Y$ i $\mathcal{P}$ dowolną relacją w iloczynie $Y \times Z$. *Złożeniem relacji* (*superpozycją relacji*) $\mathcal{P}$ i $\mathcal{R}$ nazywamy relację $\mathcal{S}$ w iloczynie $X \times Z$ określoną następująco:

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, z) \in X \times Z : \exists_{y \in Y} ((x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{P}) \right\}.$$

Relację tę oznaczamy symbolem $\mathcal{P} \circ \mathcal{R}$.

W szczególności, gdy mamy dwie funkcje $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$, to możemy otrzymać złożenie tych funkcji jako złożenie relacji; w wyniku tego złożenia otrzymujemy też funkcję, którą oznaczamy symbolem $g \circ f$. Wówczas

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{dla } x \in X.$$

Funkcję $f$ nazywamy *funkcją wewnętrzną*, funkcję $g$ nazywamy *funkcją zewnętrzną*.

Jeśli $f : X \longrightarrow Y$ jest dowolną funkcją, zbiór $A$ jest podzbiorem zbioru $X$, to

$$f_{|A} = \{(x, y) \in X \times Y : (x, y) \in f \wedge x \in A\} = f \cap (A \times Y)$$

jest funkcją określoną na zbiorze $A$. Funkcję tę nazywamy *obcięciem* funkcji $f$ do zbioru $A$, lub funkcją $f$ obciętą do zbioru $A$.

Symbolem $\mathrm{id}_X$ oznaczamy funkcję tożsamościową na zbiorze $X$, t. j. funkcję

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$$

określoną wzorem

$$\mathrm{id}_X(x) = x \quad \text{dla } x \in X$$

lub

$$\mathrm{id}_X = \{(x, x) : x \in X\}.$$

# Zadania

**Zadanie 1.1.** Niech $f(x) = \sin x$ dla $x \in \mathrm{R}$ oraz

$$A_1 = [0, \pi], \quad A_2 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad A_3 = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

$$A_4 = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}, \quad B_1 = [0, 1], \quad B_2 = [0, 2].$$

Znaleźć $f(A_i)$, $f^{-1}(B_j)$, $f\left(f^{-1}(B_j)\right)$, $f^{-1}\left(f(A_i)\right)$ dla $i = 1, 2, 3, 4$, oraz $j = 1, 2$, a ponadto $f(A_1 \setminus A_2)$ oraz $f(A_2 \cap A_3)$.

**Zadanie 1.2.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i zbiorów $A_1, A_2 \subset X$ udowodnić równość

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

**Zadanie 1.3.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i rodziny zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$, gdzie $A_t \subset X$ dla $t \in T$, udowodnić równość

$$f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = \bigcup_{t \in T} f(A_t).$$

**Zadanie 1.4.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i zbiorów $A_1, A_2 \subset X$ udowodnić inkluzję

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Podać przykład ilustrujący, że inkluzji w powyższym wzorze nie można zastąpić równością.

Udowodnić, że dla funkcji różnowartościowej $f$ spełniona jest równość

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

**Zadanie 1.5.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i rodziny zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$, gdzie $A_t \subset X$ dla $t \in T$, udowodnić inkluzję

$$f\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) \subset \bigcap_{t\in T} f(A_t).$$

Podać przykład ilustrujący, że inkluzji w powyższym wzorze nie można zastąpić równością.

**Zadanie 1.6.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i zbiorów $A_1, A_2 \subset X$ udowodnić inkluzję

$$f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2).$$

Podać przykład ilustrujący, że inkluzji w powyższym wzorze nie można zastąpić równością. Jednak jeśli dodatkowo założymy, że funkcja $f$ jest różnowartościowa, to:

$$f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2).$$

**Zadanie 1.7.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i zbiorów $A_1, A_2 \subset X$ takich, że $A_1 \subset A_2$ udowodnić inkluzję

$$f(A_1) \subset f(A_2).$$

**Zadanie 1.8.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i zbiorów $B_1, B_2 \subset Y$ udowodnić implikację

$$(B_1 \subset B_2) \Longrightarrow (f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)).$$

**Zadanie 1.9.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i zbiorów $B_1, B_2 \subset Y$ udowodnić równość

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

**Zadanie 1.10.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i rodziny zbiorów $\{B_t\}_{t\in T}$, gdzie $B_t \subset Y$ dla $t \in T$, udowodnić równość

$$f^{-1}\left(\bigcup_{t\in T} B_t\right) = \bigcup_{t\in T} f^{-1}(B_t).$$

**Zadanie 1.11.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i zbiorów $B_1, B_2 \subset Y$ udowodnić równość

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

**Zadanie 1.12.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i rodziny zbiorów $\{B_t\}_{t\in T}$, gdzie $B_t \subset Y$ dla $t \in T$, udowodnić równość

$$f^{-1}\left(\bigcap_{t\in T} B_t\right) = \bigcap_{t\in T} f^{-1}(B_t).$$

**Zadanie 1.13.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i zbiorów $B_1, B_2 \subset Y$ udowodnić równość

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2).$$

**Zadanie 1.14.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ oraz zbiorów $A \subset X$ i $B \subset Y$ udowodnić, że jeśli $g = f_{|A}$, to

$$g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B).$$

**Zadanie 1.15.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ oraz zbioru $A \subset X$ udowodnić:

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

Podać przykład ilustrujący, że inkluzji w powyższym wzorze nie można zastąpić równością.

Jeśli jednak założymy dodatkowo, że funkcja $f$ jest różnowartościowa, to

$$A = f^{-1}(f(A)).$$

**Zadanie 1.16.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ oraz zbioru $B \subset Y$ udowodnić:

$$f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

Podać przykład ilustrujący, że inkluzji w powyższym wzorze nie można zastąpić równością.

**Zadanie 1.17.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ oraz zbioru $B \subset Y$ udowodnić:

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X).$$

Jeśli założymy dodatkowo, że funkcja $f$ przekształca zbiór $X$ na $Y$, to

$$f(f^{-1}(B)) = B.$$

**Zadanie 1.18.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i zbiorów $A_1, A_2 \subset X$ udowodnić, że jeśli

$$f^{-1}(f(A_1)) = A_1,$$

to

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

**Zadanie 1.19.** Dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i zbiorów $A \subset X$, $B \subset Y$ udowodnić, że jeśli

$$f^{-1}(B) = A,$$

to

$$f^{-1}(f(A)) = A.$$

**Zadanie 1.20.** Niech dane będą funkcje $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$; oznaczmy jeszcze $h = g \circ f$. Udowodnić, że jeśli $A \subset X$ i $B \subset Z$, to

$$h(A) = g(f(A))$$

oraz

$$h^{-1}(B) = f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right).$$

**Zadanie 1.21.** Udowodnić, że złożenie dwóch funkcji różnowartościowych jest funkcją różnowartościową.

**Zadanie 1.22.** Udowodnić, że złożenie dwóch surjekcji jest surjekcją.

**Zadanie 1.23.** Udowodnić, że złożenie dwóch funkcji wzajemnie jednoznacznych (bijekcji) jest funkcją wzajemnie jednoznaczną (bijekcją).

**Zadanie 1.24.** Udowodnić, że funkcja odwrotna do bijekcji jest bijekcją.

**Zadanie 1.25.** Niech $h = g \circ f$, gdzie funkcja $h$ jest bijekcją i jedna z funkcji $f$, $g$ jest bijekcją. Czy druga z tych funkcji też musi być bijekcją?

Uogólnić to zadanie na przypadek składania trzech, czterech i większej liczby funkcji.

**Zadanie 1.26.** Udowodnić, że dla dowolnej bijekcji $f : X \longrightarrow Y$

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

oraz

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X.$$

**Zadanie 1.27.** Niech dane będą zbiory $X_1, X_2$ oraz $Y$. Załóżmy, że $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ jest funkcją różnowartościową oraz $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ – surjekcją. Udowodnić, że jeśli $A_1 \subset X_1$ i $A_2 = f_2^{-1}(f_1(A_1))$, to

$$f_1(A_1) = f_2(A_2), \quad f_2^{-1}(f_2(A_2)) = A_2.$$

Jeśli ponadto $f_1^{-1}(f_1(A_1)) = A_1$, to

$$f_1^{-1}(f_2(A_2)) = A_1.$$

Jeśli oprócz tego dla podzbioru $B_1$ zbioru $X_1$ zbiór $B_2$ jest określony równością $B_2 = f_2^{-1}(f_1(B_1))$, to

$$f_2^{-1}(f_1(A_1 \cap B_1)) = A_2 \cap B_2.$$

**Zadanie 1.28.** Udowodnić, że jeśli $f : X \longrightarrow Y$ oraz $\{A_t\}_{t \in T}$ jest taką rodziną rozłącznych podzbiorów zbioru $X$, że $\bigcup_{t \in T} A_t = X$ i dla każdego $t \in T$ funkcja $f_{|A_t} : A_t \longrightarrow Y$ jest różnowartościowa, a ponadto

$$f(A_{t_1}) \cap f(A_{t_2}) = \emptyset \quad \text{dla} \quad t_1, t_2 \in T, \quad t_1 \neq t_2,$$

to funkcja $f$ jest różnowartościowa.

**Zadanie 1.29.** Niech $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow X$ spełniają warunek

$$g(f(x)) = x \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Udowodnić, że funkcja $f : X \longrightarrow f(X)$ posiada funkcję odwrotną i $f^{-1} = g_{|f(X)}$.

**Zadanie 1.30.** Niech $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow X$ spełniają warunek

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y, \quad g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Udowodnić, że funkcja $f$ jest wzajemnie jednoznaczna i $f^{-1} = g$.

**Zadanie 1.31.** Udowodnić, że jeśli $f : X \longrightarrow Y$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną i $g = f^{-1}$, to dla dowolnych zbiorów $A \subset X$ i $B \subset Y$ prawdziwe są następujące równości:

$$g(B) = f^{-1}(B), \quad g^{-1}(A) = f(A).$$

**Zadanie 1.32.** Niech $A \subset X$. Funkcję $\chi_A : X \longrightarrow \mathrm{R}$ określoną wzorem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in A, \\ 0 & \text{dla} \quad x \in X \setminus A \end{cases}$$

nazywamy funkcją charakterystyczną zbioru $A$.

Udowodnić dla dowolnych zbiorów $A, B \subset X$ następujące równości:

(a) $\chi_{(A \cap B)} = \chi_A \cdot \chi_B$,

(b) $\chi_A = 1 - \chi_{(X \setminus A)}$,

(c) $\chi_{(A \cup B)} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$,

(d) $\chi_{(A \triangle B)} = \chi_A + \chi_B - 2\,\chi_A \cdot \chi_B$.

Symbol $\triangle$ oznacza tu różnicę symetryczną zbiorów.

Udowodnić ponadto równoważność:

(e) $A \cap B = \emptyset \iff \chi_{(A \cup B)} = \chi_A + \chi_B$.

**Zadanie 1.33.** Udowodnić, że funkcja $F : 2^X \longrightarrow \{0, 1\}^X$ określona wzorem

$$F(A) = \chi_A$$

jest bijekcją.

# Rozdział 2

# Przestrzenie metryczne

Niech $X$ będzie dowolnym zbiorem niepustym. Funkcję $\varrho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *metryką* (lub funkcją odległości) w zbiorze $X$, jeśli spełnione są następujące warunki:

(M1) $\forall_{x\in X}\forall_{y\in X}\ (\varrho(x,y) \geqslant 0\ \wedge\ \varrho(x,y) = 0 \iff x = y)$;

(M2) $\forall_{x\in X}\forall_{y\in X}\ (\varrho(x,y) = \varrho(y,x))$;

(M3) $\forall_{x\in X}\forall_{y\in X}\forall_{z\in X}\ (\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x,z) + \varrho(z,y))$.

Parę uporządkowaną $(X,\varrho)$, gdzie $\varrho$ jest metryką, nazywamy *przestrzenią metryczną*. Zbiór $X$ nazywamy zbiorem punktów przestrzeni metrycznej. Dla $x, y \in X$ wartość funkcji $\varrho(x,y)$ nazywamy *odległością* punktów $x$ i $y$. Warunek trzeci z powyższej definicji metryki nazywamy warunkiem trójkąta. Jeśli $A$ jest niepustym podzbiorem przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$, to *średnicą zbioru* $A$ nazywamy

$$\delta(A) = \sup\{\varrho(x,y) : x, y \in A\}.$$

Dla zbioru pustego przyjmujemy $\delta(\emptyset) = 0$. Zbiór $A$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli $\delta(A) < \infty$, w przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór $A$ jest *nieograniczony*. W szczególności o przestrzeni $X$ mówimy, że jest ograniczona lub nie w zależności od tego, czy $\delta(X) < \infty$, czy $\delta(X) = \infty$.

Dla dowolnych niepustych zbiorów $A, B$ w przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$ *odległość* tych zbiorów określamy jako

$$\varrho(A,B) = \inf\{\varrho(x,y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

W szczególności, gdy np. zbiór $A$ jest jednoelementowy i składa się z punktu $a$, to odległość $\varrho(\{a\}, B)$ nazywamy odległością punktu $a$ od zbioru $B$ i oznaczamy krócej $\varrho(a,B)$.

Jeśli $a$ jest pewnym punktem przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$ i $r$ liczbą dodatnią, to *kulą o środku $a$ i promieniu $r$* nazywamy zbiór

$$\{x \in X : \varrho(x,a) < r\},$$

który oznaczamy symbolem $K(a,r)$. Czasami kulę tę będziemy nazywać kulą otwartą w odróżnieniu od ***kuli domkniętej***, czyli zbioru

$$\overline{K}(a,r) = \{x \in X \ : \ \varrho(x,a) \leqslant r\}.$$

Punkt $a$ nazywamy punktem ***wewnętrznym*** zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$, jeśli istnieje dodatnia liczba $r$ taka, że $K(a,r) \subset A$. Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru $A$ nazywamy ***wnętrzem*** zbioru $A$ i oznaczamy symbolem $\operatorname{Int}(A)$.

Zbiór, którego wszystkie punkty są punktami wewnętrznymi, nazywamy ***zbiorem otwartym***. Rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$ oznaczamy symbolem $\mathcal{T}_\varrho$ lub krócej $\mathcal{T}$. tau

Każdy zbiór otwarty zawierający punkt $x$ nazywamy ***otoczeniem*** punktu $x$.

***Bazą*** przestrzeni metrycznej nazywamy rodzinę złożoną ze zbiorów otwartych o tej własności, że każdy zbiór otwarty jest sumą pewnej podrodziny tej rodziny. Oczywiście rodzina wszystkich zbiorów otwartych jest bazą, jednak zwykle istnieją też inne bazy.

Zbiór, którego dopełnienie jest zbiorem otwartym, nazywamy zbiorem ***domkniętym***. Rodzinę wszystkich zbiorów domkniętych w przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$ oznaczać będziemy literą $\mathcal{D}$. Zatem

$$\mathcal{D} = \left\{A \in 2^X \ : \ X \setminus A \in \mathcal{T}_\varrho\right\}.$$

Każdą funkcję określoną na zbiorze $\mathsf{N}$ o wartościach w zbiorze $X$ nazywamy ***ciągiem*** elementów zbioru $X$.

Wartość $x(n)$ funkcji $x$ w punkcie $n$ nazywamy *$n$-tym wyrazem ciągu*.

Ciąg $x : \mathsf{N} \longrightarrow X$ oznaczamy najczęściej symbolem $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Czasem też będziemy stosowali zapis ciągu w postaci $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Niech $x$ będzie dowolnym ciągiem, $n$ dowolnym ciągiem rosnącym liczb naturalnych. Złożenie $x \circ n$ nazywamy *podciągiem* ciągu $x$. Piszemy wówczas

$$x(n(k)) = x_{n_k}, \quad \text{dla} \quad k \in \mathsf{N}.$$

Oznaczamy w tym przypadku podciąg krótszym symbolem $(x_{n_k})_{k \in \mathsf{N}}$.

Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$ nazywamy ***zbieżnym*** do elementu $a \in X$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n \geqslant n_0} (\varrho(x_n, a) < \varepsilon).$$

Stosujemy wówczas oznaczenie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{lub} \quad x_n \longrightarrow a.$$

Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$ spełnia warunek Cauchy'ego, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m \geqslant n_0} (\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$ jest ***ograniczony***, jeśli zbiór wyrazów tego ciągu jest ograniczony, tzn.

$$\delta(\{x_n \ : \ n \in \mathsf{N}\}) < \infty.$$

Inaczej można warunek ten zapisać w postaci

$$\exists_{x\in X}\exists_{r\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\,(\varrho(x_n, x) < r).$$

Punkt $a$ nazywamy ***punktem skupienia*** zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, jeśli istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów tej przestrzeni taki, że

$$x_n \in A, \quad x_n \neq a, \quad x_n \longrightarrow a.$$

Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru $A$ nazywamy pochodną zbioru $A$ i oznaczamy symbolem $A^d$ lub $A^{(1)}$.

Drugą i dalsze pochodne definiujemy indukcyjnie:

$$A^{(2)} = \left(A^d\right)^d,$$

$$A^{(n)} = \left(A^{(n-1)}\right)^d \quad \text{dla} \quad n > 1.$$

Dla zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ domknięciem tego zbioru nazywamy zbiór $\overline{A} = A \cup A^d$.

*Brzegiem* (*ograniczeniem*) zbioru $A$ nazywamy zbiór $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, który oznaczamy symbolem $\mathrm{Fr}\,(A)$.

# Zadania

**Zadanie 2.1.** Udowodnić, że zbiór $X$ z funkcją $\varrho$ spełniającą następujące warunki:

(a) $\forall_{x,y\in X}\,(\varrho(x, y) = 0 \iff x = y)$;

(b) $\forall_{x,y\in X}\,(\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(y, z))$;

jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.2.** Udowodnić, że kula otwarta w przestrzeni metrycznej jest zbiorem otwartym.

**Zadanie 2.3.** Niech $A$ będzie niepustym podzbiorem zbioru $X$, gdzie $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną. Rozważmy funkcję $\varrho_A = \varrho_{|(A\times A)}$ (określoną w zbiorze $A \times A$). Udowodnić, że jest ona metryką w zbiorze $A$.

Parę $(A, \varrho_A)$ nazywamy podprzestrzenią przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$.

Znaleźć postać kul otwartych i zbiorów otwartych w tej podprzestrzeni.

**Zadanie 2.4.** Udowodnić, że dla dowolnych różnych punktów $x, y$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ istnieją kule $K_1$, $K_2$ takie, że

$$x \in K_1, \quad y \in K_2 \quad \text{i} \quad K_1 \cap K_2 = \emptyset.$$

**Zadanie 2.5.** Udowodnić, że rodzina $\mathcal{T}$ wszystkich zbiorów otwartych w przestrzeni metrycznej spełnia następujące warunki:

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$;

(2) jeśli $A, B \in \mathcal{T}$, to $A \cap B \in \mathcal{T}$;

(3) jeśli $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, to $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

**Zadanie 2.6.** Udowodnić, że rodzina $\mathcal{D}$ zbiorów domkniętych w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ ma następujące własności:

(1) $\emptyset \in \mathcal{D}$, $X \in \mathcal{D}$;

(2) jeśli $A, B \in \mathcal{D}$, to $A \cup B \in \mathcal{D}$;

(3) jeśli $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$, to $\bigcap \mathcal{D}_1 \in \mathcal{D}$.

**Zadanie 2.7.** Udowodnić, że rodzina $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{U \in \mathcal{T}_\varrho} \forall_{x \in U} \exists_{B \in \mathcal{B}} (x \in B \ \wedge \ B \subset U).$$

**Zadanie 2.8.** Udowodnić, że każda baza $\mathcal{B}$ przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ ma następujące własności:

(1) $\forall_{x \in X} \exists_{B \in \mathcal{B}} (x \in B)$;

(2) $\forall_{B_1 \in \mathcal{B}} \forall_{B_2 \in \mathcal{B}} \forall_{x \in B_1 \cap B_2} \exists_{B \in \mathcal{B}} (x \in B \ \wedge \ B \subset B_1 \cap B_2)$.

**Zadanie 2.9.** Udowodnić, że rodzina wszystkich kul w przestrzeni metrycznej jest bazą.

**Zadanie 2.10.** Dowieść, że rodzina $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in X$ i dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje zbiór $B \in \mathcal{B}$ taki, że

$$x \in B \ \wedge \ B \subset K(x, \varepsilon).$$

**Zadanie 2.11.** Niech $A$ będzie niepustym podzbiorem zbioru $X$, gdzie $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną i $\mathcal{B}$ niech będzie bazą przestrzeni $X$. Udowodnić, że rodzina

$$\mathcal{F} = \left\{ F \subset X \ : \ \exists_{B \in \mathcal{B}} (F = B \cap A) \right\}$$

jest bazą podprzestrzeni $A$.

**Zadanie 2.12.** Dowieść, że wnętrze zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest sumą wszystkich zbiorów otwartych zawartych w zbiorze $A$.

**Zadanie 2.13.** Udowodnić, że wnętrze zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest największym zbiorem otwartym zawartym w zbiorze $A$.

**Zadanie 2.14.** Udowodnić, że każdy ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej posiada dokładnie jedną granicę.

**Zadanie 2.15.** Udowodnić, że każdy podciąg ciągu zbieżnego w przestrzeni metrycznej jest zbieżny (do tej samej granicy).

**Zadanie 2.16.** Udowodnić, że każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

**Zadanie 2.17.** Udowodnić, że każdy ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej spełnia warunek Cauchy'ego.

**Zadanie 2.18.** Udowodnić, że każdy ciąg, który spełnia warunek Cauchy'ego i posiada podciąg zbieżny, jest zbieżny.

**Zadanie 2.19.** Udowodnić, że każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest ograniczony.

**Zadanie 2.20.** Udowodnić, że w przestrzeni metrycznej ciąg, którego każdy podciąg posiada podciąg zbieżny do punktu $x_0$, jest zbieżny do $x_0$.

**Zadanie 2.21.** Niech w przestrzeni metrycznej ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ będą zbieżne do punktu $a$. Udowodnić, że ciąg $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ dany wzorami:

$$z_{2n-1} = x_n, \qquad z_{2n} = y_n, \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny do punktu $a$.

**Zadanie 2.22.** Dowieść, że zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Int}(A) = A$.

**Zadanie 2.23.** Udowodnić, że punkt $a$ należy do domknięcia zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon$

$$K(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Udowodnić, że punkt $a$ należy do pochodnej zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon$ spełniony jest warunek

$$(K(a, \varepsilon) \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset.$$

**Zadanie 2.24.** Dowieść, że dla dowolnego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$

$$\operatorname{Int}(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}.$$

**Zadanie 2.25.** Dowieść, że dla dowolnego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$

$$\overline{A} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

**Zadanie 2.26.** Udowodnić, że zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{A} = A$.

**Zadanie 2.27.** Udowodnić, że domknięcie zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest przekrojem wszystkich zbiorów domkniętych zawierających zbiór $A$.

**Zadanie 2.28.** Udowodnić, że domknięcie zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym zbiór $A$.

**Zadanie 2.29.** Udowodnić, że w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ operacja wnętrza ma następujące własności:

(1) $\operatorname{Int}(X) = X$, $\operatorname{Int}(\emptyset) = \emptyset$;

(2) $\operatorname{Int}(A) \subset A$;

(3) $A \subset B \Longrightarrow \operatorname{Int}(A) \subset \operatorname{Int}(B)$;

(4) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$;

(5) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A)) = \operatorname{Int}(A)$.

**Zadanie 2.30.** Dowieść, że operacja domknięcia w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ ma następujące własności:

(1) $\overline{X} = X$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

(2) $A \subset \overline{A}$;

(3) $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$;

(4) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(5) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

***Zadanie 2.31.** Pokazać, że zbiór R z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = |x - y| \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathsf{R}$$

jest przestrzenią metryczną. Znaleźć postać kul otwartych w tej przestrzeni.

***Zadanie 2.32.** Czy zbiór R z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = |3x - y| \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathsf{R}$$

jest przestrzenią metryczną?

**Zadanie 2.33.** Pokazać, że zbiór $\mathrm{R}^n$ z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

gdzie $x = (x_1, \cdots, x_n)$ i $y = (y_1, \cdots, y_n)$ są dowolnymi elementami zbioru $\mathrm{R}^n$, jest przestrzenią metryczną.

Przestrzeń tę nazywamy $n$-wymiarową rzeczywistą przestrzenią euklidesową.

**Zadanie 2.34.** Pokazać, że dowolny zbiór $X$ z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad x, y \in X, \quad x = y, \\ 1, & \text{jeśli} \quad x, y \in X, \quad x \neq y, \end{cases}$$

jest przestrzenią metryczną.

Metrykę tę nazywamy metryką zero-jedynkową lub dyskretną. Znaleźć postać kul otwartych w tej przestrzeni.

**Zadanie 2.35.** Niech $X$ będzie zbiorem ograniczonych funkcji rzeczywistych określonych na pewnym zbiorze $E$. Niech dla $f, g \in X$

$$\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \; : \; x \in E\}.$$

Pokazać, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną. Przestrzeń tę oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{B}(E)$.

**Zadanie 2.36.** Niech $X$ będzie zbiorem funkcji rzeczywistych określonych na pewnym zbiorze $E$. Niech dla $f, g \in X$

$$\varrho(f, g) = \min\{\sup\{|f(x) - g(x)| \; : \; x \in E\}, 1\}.$$

Pokazać, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.37.** Pokazać, że zbiór $\mathrm{R}^2$ z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \qquad \text{dla} \qquad x = (x_1, x_2), \; y = (y_1, y_2)$$

jest przestrzenią metryczną. Znaleźć postać kul otwartych w tej przestrzeni.

**Zadanie 2.38.** Pokazać, że zbiór $\mathrm{R}^2$ z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \max\{2|x_1 - y_1|, 3|x_2 - y_2|\} \qquad \text{dla} \qquad x = (x_1, x_2), \; y = (y_1, y_2)$$

jest przestrzenią metryczną. Znaleźć postać kul otwartych w tej przestrzeni.

**Zadanie 2.39.** Pokazać, że zbiór $\mathrm{R}^2$ z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \qquad \text{dla} \qquad x = (x_1, x_2), \; y = (y_1, y_2)$$

jest przestrzenią metryczną. Znaleźć postać kul otwartych w tej przestrzeni.

**Zadanie 2.40.** Czy zbiór $\mathsf{R}^2$ z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x,y) = 3|x_1 - y_1| + \frac{1}{2}|x_2 - y_2| \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$$

jest przestrzenią metryczną? Jeśli tak, to znaleźć postać kul otwartych w tej przestrzeni.

**Zadanie 2.41.** Pokazać, że zbiór $\mathsf{R}^2$ z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad x = y, \\ |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2|, & \text{jeśli} \quad x \neq y, \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ są dowolnymi elementami zbioru $\mathsf{R}^2$, jest przestrzenią metryczną. Znaleźć postać kul otwartych w tej przestrzeni.

**Zadanie 2.42.** Pokazać, że zbiór $\mathsf{R}^2$ z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad x = y, \\ |x_1 - y_1|, & \text{jeśli} \quad x \neq y \ \text{ i } \ x_2 = y_2, \\ |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2|, & \text{jeśli} \quad x \neq y \ \text{ i } \ x_2 \neq y_2, \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ są dowolnymi elementami zbioru $\mathsf{R}^2$, jest przestrzenią metryczną. Znaleźć postać kul otwartych w tej przestrzeni.

**Zadanie 2.43.** Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich niezdegenerowanych przedziałów domkniętych i ograniczonych w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathsf{R}$. Zauważmy, że jeśli $I_1, I_2 \in X$, to zbiór $I_1 \triangle I_2 = (I_1 \setminus I_2) \cup (I_2 \setminus I_1)$ jest pusty lub jest przedziałem lub jest sumą dwóch przedziałów niezdegenerowanych (niekoniecznie domkniętych). Niech $\varrho(I_1, I_2)$ równa się długości przedziału lub sumie długości przedziałów stanowiących różnicę symetryczną $I_1$ i $I_2$, lub zerem, gdy ta różnica jest zbiorem pustym. Czy $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną?

**Zadanie 2.44.** Niech $p$ będzie liczbą rzeczywistą nie mniejszą niż 1. Przez $l^p$ oznaczamy zbiór wszystkich ciągów liczb rzeczywistych $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ takich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Określmy teraz funkcję $\varrho$ następująco: dla $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ niech

$$\varrho(x,y) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pokazać, że $l^p$ jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.45.** W zbiorze N określamy funkcję $\varrho(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$. Czy $(\mathsf{N}, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną?

**Zadanie 2.46.** Dla $x, y \in \mathsf{R}$ niech $\varrho(x,y) = |x^2 - y^2|$. Czy funkcja $\varrho$ jest metryką w zbiorze liczb rzeczywistych? A czy jest metryką w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych?

**Zadanie 2.47.** Dla $x, y \in \mathsf{R}$ niech $\varrho(x,y) = |y - \frac{x}{2}|$. Czy funkcja $\varrho$ jest metryką w zbiorze liczb rzeczywistych?

**Zadanie 2.48.** Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich ograniczonych ciągów liczb rzeczywistych. Niech

$$\varrho(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathsf{N}\} \qquad \text{dla} \qquad x = (x_n)_{n=1}^{\infty},\ y = (y_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Pokazać, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną; oznaczamy ją symbolem $l^{\infty}$.

**Zadanie 2.49.** Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich ciągów liczb rzeczywistych. Dla $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ niech

$$\varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Pokazać, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną. Przestrzeń tę oznaczamy symbolem $s$.

**Zadanie 2.50.** Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich ograniczonych ciągów liczb rzeczywistych. Niech

$$\varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \qquad \text{dla} \qquad x = (x_n)_{n=1}^{\infty},\ y = (y_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Pokazać, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.51.** Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich ciągów liczb rzeczywistych. Dla $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ niech

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad x = y, \\ \frac{1}{n},\ \text{gdzie } n = \inf\{m : x_m \neq y_m\}, & \text{jeśli} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Pokazać, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.52.** Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich ciągów liczb rzeczywistych. Dla $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ niech

$$\varrho(x,y) = \inf\left\{\frac{1}{n} + \max\{|x_i - y_i| : i \leqslant n\} : n \in \mathsf{N}\right\}.$$

Pokazać, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.53.** Dla $x, y \in [0,1]$ określamy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{gdy} \quad x-y \in Q, \\ 2, & \text{gdy} \quad x-y \notin Q. \end{cases}$$

Czy $\varrho$ jest metryką w zbiorze $[0,1]$?

**Zadanie 2.54.** Niech $X$ będzie zbiorem funkcji rzeczywistych ciągłych na przedziale $[a,b]$, gdzie $a < b$ i niech funkcja $\varrho$ określona będzie następująco:

$$\varrho(f,g) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad f = g, \\ \max\{1, \min\{|f(x)-g(x)| : x \in [a,b]\}\}, & \text{gdy} \quad f \neq g, \end{cases}$$

dla $f, g \in X$. Czy $\varrho$ jest metryką w zbiorze $X$?

**Zadanie 2.55.** Niech $X$ będzie zbiorem funkcji rzeczywistych ciągłych na przedziale $[a,b]$, gdzie $a < b$ i niech funkcja $\varrho$ określona będzie następująco:

$$\varrho(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$$

dla $f, g \in X$. Czy $\varrho$ jest metryką w zbiorze $X$?

**Zadanie 2.56.** Udowodnić, że jeśli $(X,\varrho)$ jest przestrzenią metryczną, to $(X,\varrho^\star)$, gdzie

$$\varrho^\star(x,y) = \frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)} \quad \text{dla} \quad x, y \in X,$$

też jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.57.** Udowodnić, że jeśli $(X,\varrho)$ jest przestrzenią metryczną, $a$ – dowolną liczbą dodatnią, to $(X,\varrho^\star)$, gdzie

$$\varrho^\star(x,y) = a \cdot \varrho(x,y) \quad \text{dla} \quad x, y \in X,$$

też jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.58.** Udowodnić, że jeśli $(X,\varrho)$ jest przestrzenią metryczną, to $(X,\varrho^\star)$, gdzie

$$\varrho^\star(x,y) = \min(1, \varrho(x,y)) \quad \text{dla} \quad x, y \in X,$$

też jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.59.** Udowodnić, że jeśli $(X,\varrho)$ jest przestrzenią metryczną, $x_0$ ustalonym punktem przestrzeni $X$, to $(X,\varrho^\star)$, gdzie

$$\varrho^\star(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x = y, \\ \varrho(x,x_0)+\varrho(y,x_0), & \text{gdy} \quad x \neq y, \end{cases}$$

dla $x, y \in X$, też jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.60.** Niech $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ będzie funkcją spełniającą następujące warunki:

(1) $f(a) = 0 \iff a = 0$;

(2) $f$ jest niemalejąca;

(3) $f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$ dla dowolnych liczb $a, b$ ze zbioru $[0,\infty)$.

Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną, to $(X, \varrho^*)$, gdzie

$$\varrho^*(x,y) = f(\varrho(x,y)) \quad \text{dla} \quad x, y \in X,$$

też jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.61.** Niech $f$ będzie dowolną funkcją przekształcającą zbiór $X$ w $X$, niech dalej $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną. Udowodnić, że funkcja $\varrho^*$ określona następująco:

$$\varrho^*(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x = y, \\ \varrho(x, f(x)) + \varrho(f(x), f(y)) + \varrho(f(y), y), & \text{gdy} \quad x \neq y, \end{cases}$$

dla $x, y \in X$, jest metryką w zbiorze $X$.

**Zadanie 2.62.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi. Niech $X$ będzie iloczynem kartezjańskim zbiorów $X_1$ i $X_2$. W zbiorze $X$ określmy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(x,y) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1,y_1) + \varrho_2^2(x_2,y_2)} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \;\; y = (y_1, y_2).$$

Udowodnić, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.63.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi. Niech $X$ będzie iloczynem kartezjańskim zbiorów $X_1$ i $X_2$. W zbiorze $X$ określmy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(x,y) = \varrho_1(x_1,y_1) + \varrho_2(x_2,y_2) \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \;\; y = (y_1, y_2).$$

Udowodnić, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.64.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi. Niech $X$ będzie iloczynem kartezjańskim zbiorów $X_1$ i $X_2$. W zbiorze $X$ określmy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(x,y) = \max\{\varrho_1(x_1,y_1), \varrho_2(x_2,y_2)\} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \;\; y = (y_1, y_2).$$

Udowodnić, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną.

**Zadanie 2.65.** Udowodnić, że każda kula (otwarta albo domknięta) jest zbiorem ograniczonym i jej średnica jest nie większa niż podwojony promień. Podać przykłady na to, że średnica kuli nie zawsze jest równa podwojonemu promieniowi kuli.

**Zadanie 2.66.** Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną, to dla dowolnych zbiorów $A, B \subset X$ takich, że $\emptyset \neq A \subset B$ spełniona jest nierówność

$$\delta(A) \leqslant \delta(B).$$

**Zadanie 2.67.** Udowodnić, że zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest zawarty w pewnej kuli otwartej.

**Zadanie 2.68.** Udowodnić, że jeśli $A \cap B \neq \emptyset$, to

$$\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B).$$

**Zadanie 2.69.** Czy z tego, że $A \subset B \cup C$ wynika nierówność

$$\delta(A) \leqslant \delta(B) + \delta(C)?$$

**Zadanie 2.70.** Udowodnić, że jeśli zbiory $A$ i $B$ są niepuste i rozłączne, to nie musi być prawdziwa żadna z poniższych nierówności:

$$\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B),$$

$$\delta(A \cup B) \geqslant \delta(A) + \delta(B).$$

**Zadanie 2.71.** Udowodnić, że dla dowolnych niepustych zbiorów $A$ i $B$

$$\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B) + \varrho(A, B).$$

**Zadanie 2.72.** Udowodnić, że suma skończonej liczby zbiorów ograniczonych jest zbiorem ograniczonym.

**Zadanie 2.73.** Podać przykład przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ i zbioru $A$ takich, że istnieją punkty $x_1, x_2 \in X$ oraz liczby $r_1, r_2$ spełniające warunki

$$x_1 \neq x_2 \text{ i } r_1 \neq r_2 \text{ oraz } K(x_1, r_1) = A = K(x_2, r_2).$$

**Zadanie 2.74.** Podać przykład przestrzeni metrycznej, w której istnieją dwie różne kule o tej własności, że kula o większym promieniu jest podzbiorem właściwym kuli o mniejszym promieniu.

**Zadanie 2.75.** Udowodnić, że jeśli kula $K(x_0, r)$ zawiera dwie kule rozłączne, to promień przynajmniej jednej z nich jest mniejszy niż $r$.

**Zadanie 2.76.** Udowodnić, że średnica dowolnego zbioru jest równa średnicy jego domknięcia.

**Zadanie 2.77.** Niech $A$ będzie dowolnym ograniczonym podzbiorem przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby dodatniej $r$ zbiór

$$A(r) = \bigcup_{x\in A} K(x,r)$$

jest otwarty i ograniczony.

**Zadanie 2.78.** Podać przykład przestrzeni metrycznej i dwóch zbiorów domkniętych i rozłącznych w tej przestrzeni, których odległość jest równa zeru.

**Zadanie 2.79.** Udowodnić, że jeśli $(X,\varrho)$ jest nieograniczoną przestrzenią metryczną, to istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $x_n \in X$ dla $n \in \mathsf{N}$ i $\varrho(x_n,x_m) \geqslant 1$ dla $n \neq m$.

**Zadanie 2.80.** Zbadać, jakie ciągi są zbieżne w przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$, gdzie $X$ jest dowolnym zbiorem, a $\varrho$ metryką zero-jedynkową? (Patrz zadanie 2.34.)

**Zadanie 2.81.** Opisać wnętrze, domknięcie i brzeg dowolnego zbioru w przestrzeni z metryką zero-jedynkową.

**Zadanie 2.82.** Zbadać, które z poniżej podanych ciągów są zbieżne w przestrzeniach metrycznych $l^p$, dla $p>1$, $l^1$ i $l^\infty$.

(1) $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$, gdzie $x_k^{(n)} = n$ dla $k \leqslant n$ oraz $x_k^{(n)} = 0$ dla $k > n$;

(2) $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$, gdzie $x_k^{(n)} = 1$ dla $k \leqslant n$ oraz $x_k^{(n)} = 0$ dla $k > n$;

(3) $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$, gdzie $x_k^{(n)} = \frac{1}{n}$ dla $k \leqslant n$ oraz $x_k^{(n)} = 0$ dla $k > n$.

**Zadanie 2.83.** Zbadać, jakie ciągi są zbieżne w przestrzeni metrycznej rzeczywistych funkcji ograniczonych określonych na zbiorze $E$ z metryką określoną następująco: dla $f,g \in X$

$$\varrho(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in E\}.$$

(Patrz zadanie 2.35.)

**Zadanie 2.84.** Zbadać, jakie ciągi są zbieżne w przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$ gdzie $X = \mathsf{R}^2$, a metryka jest określona wzorem

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad x = y, \\ |x_1|+|y_1|+|x_2-y_2|, & \text{jeśli} \quad x \neq y, \end{cases}$$

gdzie $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ są dowolnymi elementami zbioru $\mathsf{R}^2$. (Patrz zadanie 2.41.)

**Zadanie 2.85.** Udowodnić, że w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, jeśli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x_0 \in X$, to dla dowolnego niepustego zbioru $A$

$$\varrho(x_n, A) \longrightarrow \varrho(x_0, A).$$

**Zadanie 2.86.** Udowodnić, że w przestrzeni $\mathsf{R}^2$ z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathsf{R}^2,$$

ciąg $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$, jest zbieżny do punktu $x = (x_1, x_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1^{(n)} \longrightarrow x_1, \quad \text{i} \quad x_2^{(n)} \longrightarrow x_2.$$

**Zadanie 2.87.** Udowodnić, że w przestrzeni $\mathsf{R}^2$ z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathsf{R}^2,$$

ciąg $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$, jest zbieżny do punktu $(x_1, x_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1^{(n)} \longrightarrow x_1, \quad \text{i} \quad x_2^{(n)} \longrightarrow x_2.$$

**Zadanie 2.88.** Udowodnić, że w przestrzeni $\mathsf{R}^2$ z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2) \in \mathsf{R}^2,$$

ciąg $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$, jest zbieżny do punktu $(x_1, x_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1^{(n)} \longrightarrow x_1, \quad \text{i} \quad x_2^{(n)} \longrightarrow x_2.$$

**Zadanie 2.89.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi. Niech $X$ będzie iloczynem kartezjańskim zbiorów $X_1$ i $X_2$. W zbiorze $X$ określamy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \varrho_2^2(x_2, y_2)} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2) \in X,$$

Udowodnić, że ciąg $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$, jest zbieżny do punktu $x = (x_1, x_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1^{(n)} \longrightarrow x_1, \quad \text{i} \quad x_2^{(n)} \longrightarrow x_2.$$

**Zadanie 2.90.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi. Niech $X$ będzie iloczynem kartezjańskim zbiorów $X_1$ i $X_2$. W zbiorze $X$ określamy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(x, y) = \varrho_1(x_1, y_1) + \varrho_2(x_2, y_2) \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2) \in X,$$

Udowodnić, że ciąg $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$, jest zbieżny do punktu $x = (x_1, x_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1^{(n)} \longrightarrow x_1, \quad \text{i} \quad x_2^{(n)} \longrightarrow x_2.$$

**Zadanie 2.91.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi. Niech $X$ będzie iloczynem kartezjańskim zbiorów $X_1$ i $X_2$. W zbiorze $X$ określamy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(x, y) = \max\{\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2)\} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2) \in X.$$

Udowodnić, że ciąg $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$, jest zbieżny do punktu $x = (x_1, x_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1^{(n)} \longrightarrow x_1, \quad \text{i} \quad x_2^{(n)} \longrightarrow x_2.$$

**Zadanie 2.92.** Udowodnić, że zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera wszystkie swoje punkty skupienia, tzn. $A^d \subset A$.

**Zadanie 2.93.** Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, jeśli $A \subset B$, to $A^d \subset B^d$.

**Zadanie 2.94.** Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ spełnione są następujące warunki:

(1) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;

(2) $(A \cap B)^d \subset A^d \cap B^d$;

(3) $A^{(n+1)} \subset A^{(n)}$.

**Zadanie 2.95.** Podać przykład zbioru w przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką, dla którego

a) trzy pierwsze pochodne są różne;

b) $n$ pierwszych pochodnych jest różnych;

c) nieskończenie wiele pochodnych jest różnych.

**Zadanie 2.96.** Udowodnić, że dla dowolnej rodziny $\{A_t\}_{t \in T}$ podzbiorów przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ spełniona jest inkluzja

$$\bigcup_{t \in T} A_t^d \subset \left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)^d.$$

Pokazać na przykładzie, że inkluzji nie można zastąpić równością.

**Zadanie 2.97.** Dowieść, że dla dowolnych zbiorów $A, B$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ mają miejsce następujące inkluzje:

(1) $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$;

(2) $\mathrm{Int}(A \setminus B) \subset \mathrm{Int}(A) \setminus \mathrm{Int}(B)$.

Pokazać, że znaku inkluzji nie można w tych wzorach zastąpić znakiem równości.

**Zadanie 2.98.** Dowieść, że dla dowolnych zbiorów $A, B$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ spełnione są następujące inkluzje:

(1) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;

(2) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$.

Pokazać, że znaku inkluzji nie można w tych wzorach zastąpić znakiem równości.

**Zadanie 2.99.** Dowieść, że dla dowolnego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ spełnione są następujące inkluzje:

(1) $\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{Int}(A)}\right) \subset \mathrm{Int}\left(\overline{A}\right)$;

(2) $\overline{\mathrm{Int}(A)} = \overline{\left(\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{Int}(A)}\right)\right)}$.

Pokazać, że znaku inkluzji nie można w pierwszym z tych wzorów zastąpić znakiem równości.

**Zadanie 2.100.** Udowodnić, że dla dowolnej rodziny $\{A_t\}_{t\in T}$ podzbiorów przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ spełnione są inkluzje:

$$\overline{\bigcap_{t\in T} A_t} \subset \bigcap_{t\in T} \overline{A_t},$$

$$\bigcup_{t\in T} \overline{A_t} \subset \overline{\bigcup_{t\in T} A_t}.$$

Pokazać na przykładach, że inkluzji nie można zastąpić równością.

**Zadanie 2.101.** Czy domknięcie kuli otwartej musi być równe kuli domkniętej?

**Zadanie 2.102.** Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ $x \in A^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatniej liczby $\varepsilon$ istnieje punkt $y \in X$ taki, że $y \neq x$ i $y \in K(x, \varepsilon) \cap A$.

**Zadanie 2.103.** Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $x \in A^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieje punkt $y \in X$ taki, że $y \neq x$ i $y \in K\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$.

**Zadanie 2.104.** Udowodnić, że w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ dla dowolnego zbioru $A$ punkt $x$ należy do $\operatorname{Fr}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ takie, że $x_n \in A$, $y_n \in X \setminus A$ dla każdego $n \in \mathsf{N}$ i $x_n \longrightarrow x$ oraz $y_n \longrightarrow x$.

**Zadanie 2.105.** Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $x \in \operatorname{Fr}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatniej liczby $\varepsilon$

$$K(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \text{i} \quad K(x,\varepsilon) \setminus A \neq \emptyset .$$

**Zadanie 2.106.** Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ następujące warunki są równoważne:

**(1)** $x \in \overline{A}$;

**(2)** istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $x_n \in A$ dla $n \in \mathsf{N}$ i $x_n \longrightarrow x$;

**(3)** $\varrho(x, A) = 0$;

**(4)** $K(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$.

**Zadanie 2.107.** Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ równość $A = \overline{A}$ jest równoważna inkluzji $A^d \subset A$.

Czy inkluzja $\left(A^d\right)^d \subset A$ jest równoważna równości $A = \overline{A}$?

**Zadanie 2.108.** Udowodnić następujące własności wnętrza, domknięcia i brzegu dla dowolnych podzbiorów przestrzeni metrycznej.

(1) $\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Fr}(X \setminus A)$;

(2) $\operatorname{Fr}(\overline{A}) \subset \operatorname{Fr}(A)$;

(3) $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subset \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$;

(4) $\operatorname{Fr}(A \cup B) \cup \operatorname{Fr}(A \cap B) \cup (\operatorname{Fr}(A) \cap \operatorname{Fr}(B)) = \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$;

(5) $\operatorname{Int}(A) = A \setminus \operatorname{Fr}(A)$;

(6) $\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr}(A)$;

(7) $\overline{A} = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Fr}(A)$;

(8) $\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A)$;

(9) $\operatorname{Fr}(\operatorname{Int}(A)) \subset \operatorname{Fr}(A)$;

(10) $X = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

Pokazać na przykładach, że w punktach (2), (3) i (9) znaku inkluzji nie można zastąpić znakiem równości.

**Zadanie 2.109.** Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, jeśli $A \triangle B$ jest zbiorem skończonym, to

$$A^d = B^d.$$

**Zadanie 2.110.** Udowodnić, że dla dowolnego ciągu zbiorów $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ spełniona jest równość

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}.$$

**Zadanie 2.111.** Udowodnić, że dla dowolnego niepustego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ i dowolnej liczby dodatniej $r$ zbiór (porównaj zadanie 2.77)

$$A(r) = \{x \in X : \varrho(x, A) < r\}$$

jest otwarty oraz jeśli $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżnym do zera ciągiem liczb dodatnich, to

$$\overline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(r_n).$$

**Zadanie 2.112.** Dowieść, że dla dowolnych niepustych zbiorów $A$ i $B$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ zbiór

$$G = \{x \in X : \varrho(x, A) < \varrho(x, B)\}$$

jest otwarty, natomiast zbiór

$$F = \{x \in X : \varrho(x, A) \leqslant \varrho(x, B)\}$$

jest domknięty.

**Zadanie 2.113.** Udowodnić, że dla dowolnych rozłącznych zbiorów domkniętych $E$ i $F$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ istnieją zbiory otwarte $G$ i $H$ takie, że $E \subset G$, $F \subset H$ i $G \cap H = \emptyset$.

**Zadanie 2.114.** Dowieść, że w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, jeśli $X = A \cup B$, gdzie $A$ i $B$ są zbiorami otwartymi, to istnieją zbiory domknięte $E$ i $F$ takie, że $E \subset A$, $F \subset B$ i $E \cup F = X$.

**Zadanie 2.115.** Udowodnić, że w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ dla dowolnej pary zbiorów domkniętych $A$ i $B$ istnieje para zbiorów domkniętych $E$ i $F$ taka, że

$$X = E \cup F, \quad E \cap (A \cup B) = A \quad \text{i} \quad F \cap (A \cup B) = B.$$

**Zadanie 2.116.** Niech $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem zbiorów otwartych parami rozłącznych w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ i niech $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n$

$$\mathrm{Fr}(G_n) \subset \mathrm{Fr}(G) \subset X \setminus G.$$

**Zadanie 2.117.** Udowodnić, że jeśli $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są przestrzeniami metrycznymi i $X = X_1 \times X_2$, gdzie $\varrho$ jest metryką określoną kolejno w zadaniach 2.62, 2.63 i 2.64, to dla dowolnych zbiorów $A \subset X_1$ i $B \subset X_2$ spełnione są równości:

(1) $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$;

(2) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$;

(3) $\mathrm{Fr}(A \times B) = (\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B))$.

**Zadanie 2.118.** Znajdź $\mathrm{Int}(\mathbb{Q})$, $\overline{\mathbb{Q}}$ i $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q})$ w przestrzeni liczb rzeczywistych z metryką euklidesową.

**Zadanie 2.119.** Znajdź $\mathrm{Int}(\mathbb{Q})$, $\overline{\mathbb{Q}}$ i $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q})$ w przestrzeni liczb rzeczywistych z metryką zero-jedynkową.

**Zadanie 2.120.** Niech w zbiorze $X = [0, 1]$ dana będzie funkcja

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{jeśli } x, y \in \mathbb{Q} \text{ lub } x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ |x| + |y| & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Udowodnić, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną. Znaleźć wnętrze i domknięcie następujących zbiorów: $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

# Rozdział 3

# Różne rodzaje zbiorów

Zakladamy, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną i wszystkie zbiory, o których mówimy, są podzbiorami tej przestrzeni. W innych przypadkach będziemy o tym informować.

Punkt $x$ zbioru $A$ nazywamy *punktem izolowanym* w zbiorze $A$, jeśli $x \in A \setminus A^d$.

Zbiór $A$ nazywamy *gęstym* (*gęstym w przestrzeni* $X$), jeżeli $\overline{A} = X$.

Zbiór $A$ nazywamy *w sobie gęstym*, jeżeli $A \subset A^d$.

Zbiór w sobie gęsty i domknięty nazywamy *zbiorem doskonałym*.

Zbiór $A$ nazywamy *brzegowym*, jeżeli $\operatorname{Int}(A) = \emptyset$.

Zbiór $A$ nazywamy *nigdzie gęstym*, gdy $\operatorname{Int}\left(\overline{A}\right) = \emptyset$.

Zbiór $A$ nazywamy *I kategorii*, jeżeli można go przedstawić w postaci przeliczalnej sumy zbiorów nigdzie gęstych.

Zbiór $A$ nazywamy *II kategorii*, jeżeli nie jest $I$ kategorii.

Zbiór, którego dopełnienie jest zbiorem $I$ kategorii nazywamy *zbiorem rezydualnym*.

Zbiór $A$ nazywamy *regularnie otwartym*, jeśli $A = \operatorname{Int}\left(\overline{A}\right)$.

Punkt $x_0$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ nazywamy *punktem kondensacji* zbioru $A \subset X$, jeśli każde jego otoczenie zawiera nieprzeliczalnie wiele punktów zbioru $A$. Zbiór punktów kondensacji zbioru $A$ oznaczamy symbolem $A^c$.

## Zadania

**Zadanie 3.1.** Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ spelnione są równości:

(1) $\overline{(A^d)} = A^d = \left(\overline{A}\right)^d$;

(2) $\overline{\left(\overline{(A^d)}\right)^d} = (A^d)^d = \left(\overline{\left(\overline{A}\right)^d}\right)^d$.

**Zadanie 3.2.** Dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$ w przestrzeni metrycznej udowodnić równoważność:

$$\overline{A} \subset \operatorname{Int}(B) \iff \operatorname{Int}(B) \cup \operatorname{Int}(X \setminus A) = X.$$

**Zadanie 3.3.** Dowieść, że dla dowolnego zbioru otwartego $G$ i dowolnego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ spełnione są następujące warunki:

**(1)** $G \cap \overline{A} \subset \overline{G \cap A}$;

**(2)** $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$;

**(3)** jeśli $G \cap A = \emptyset$, to $G \cap \overline{A} = \emptyset$.

**Zadanie 3.4.** Udowodnić, że jeśli $G$ jest zbiorem otwartym, a $F$ jest zbiorem domkniętym w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, to:

**(1)** $G \subset \operatorname{Int}(\overline{G})$;

**(2)** $\overline{\operatorname{Int}(F)} \subset F$.

**Zadanie 3.5.** Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $A$ i dowolnego zbioru domkniętego $F$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ spełnione są następujące warunki:

**(1)** $\operatorname{Int}(F \cup A) \subset F \cup \operatorname{Int}(A)$;

**(2)** $\operatorname{Int}(F \cup A) = \operatorname{Int}(F \cup \operatorname{Int}(A))$.

**Zadanie 3.6.** Udowodnić, że jeśli $G$ jest zbiorem otwartym w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, to $\operatorname{Fr}(G) \subset X \setminus G$.

**Zadanie 3.7.** Dowieść, że dla dowolnego zbioru otwartego $G$ i dowolnego zbioru domkniętego $F$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ takich, że $\operatorname{Fr}(G) \subset F$ zbiór $\overline{G} \setminus F$ jest otwarty.

**Zadanie 3.8.** Udowodnić, że jeśli $F$ i $H$ są zbiorami domkniętymi w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, a ponadto $\emptyset \neq H \subset F$, $F \setminus H \neq \emptyset$, to zbiór $F \setminus H$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Fr}(F) \subset H$.

**Zadanie 3.9.** Niech $G$ i $H$ będą zbiorami otwartymi w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ takimi, że $G \subset H$. Udowodnić, że jeśli $F = \overline{H} \setminus G$, to:

**(1)** $\operatorname{Fr}(H) \subset F \subset \overline{H}$;

**(2)** $\overline{H} \setminus F = G$;

**(3)** $\overline{H} = \overline{G} \cup F$;

**(4)** $\operatorname{Fr}(G) = \overline{G} \cap F$.

**Zadanie 3.10.** Dowieść, że zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy $U \cap A \neq \emptyset$ dla każdego niepustego zbioru otwartego $U$.

**Zadanie 3.11.** Dowieść, że zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{(X \setminus A)} = X$.

**Zadanie 3.12.** Dowieść, że zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest nigdzie gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{(X \setminus \overline{A})} = X$.

**Zadanie 3.13.** Dowieść, że zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest nigdzie gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{\mathrm{Int}\,(X \setminus A)} = X$.

**Zadanie 3.14.** Dowieść, że zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest nigdzie gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{A}$ jest zbiorem brzegowym.

**Zadanie 3.15.** Dowieść, że zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest nigdzie gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego niepustego zbioru otwartego $U$ istnieje niepusty zbiór otwarty $V$ taki, że $V \subset U$ i $V \cap A = \emptyset$.

**Zadanie 3.16.** Dowieść, że zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy $U \setminus A \neq \emptyset$ dla każdego niepustego zbioru otwartego $U$.

**Zadanie 3.17.** Dowieść, że w przestrzeni metrycznej zbiór nigdzie gęsty jest brzegowy.

**Zadanie 3.18.** Dowieść, że w przestrzeni metrycznej zbiór domknięty i brzegowy jest nigdzie gęsty.

**Zadanie 3.19.** Udowodnić, że w przestrzeni metrycznej suma dwóch zbiorów nigdzie gęstych jest zbiorem nigdzie gęstym.

**Zadanie 3.20.** Udowodnić, że w przestrzeni metrycznej suma dwóch zbiorów brzegowych nie musi być zbiorem brzegowym.

**Zadanie 3.21.** Udowodnić, że w przestrzeni metrycznej suma zbioru nigdzie gęstego i zbioru brzegowego jest zbiorem brzegowym.

**Zadanie 3.22.** Dowieść, że w przestrzeni metrycznej podzbiór zbioru nigdzie gęstego jest zbiorem nigdzie gęstym.

**Zadanie 3.23.** Dowieść, że w przestrzeni metrycznej podzbiór zbioru brzegowego jest zbiorem brzegowym.

**Zadanie 3.24.** Dowieść, że w przestrzeni metrycznej zbior jest nigdzie gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy jego domknięcie jest zbiorem nigdzie gęstym.

**Zadanie 3.25.** Dowieść, że w przestrzeni metrycznej nie istnieje niepusty zbiór nigdzie gęsty i otwarty.

**Zadanie 3.26.** Dowieść, że jeśli $A$ i $B$ są rozłącznymi zbiorami otwartymi w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, to $\operatorname{Int}(\overline{A}) \cap \operatorname{Int}(\overline{B}) = \emptyset$.

**Zadanie 3.27.** Dowieść, że dla dowolnego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ zbiór $A \setminus \operatorname{Int}(A)$ jest brzegowy.

**Zadanie 3.28.** Udowodnić, że jeśli zbiór $A$ jest domknięty w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, to jego brzeg jest zbiorem nigdzie gęstym.

**Zadanie 3.29.** Udowodnić, że jeśli zbiór $A$ jest otwarty w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, to zbiór $\overline{A} \setminus A$ jest nigdzie gęsty.

**Zadanie 3.30.** Dowieść, że dla dowolnego zbioru $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ zbiór $A \cap \overline{X \setminus \overline{A}}$ jest nigdzie gęsty.

**Zadanie 3.31.** Dowieść, że każdy zbiór gęsty i brzegowy w przestrzeni metrycznej jest w sobie gęsty.

**Zadanie 3.32.** Dowieść, że dla dowolnego zbioru $A$ w sobie gęstego w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ zbiór $\overline{A}$ jest doskonały.

**Zadanie 3.33.** Dowieść, że suma dowolnej rodziny zbiorów w sobie gęstych w przestrzeni metrycznej jest zbiorem w sobie gęstym.

**Zadanie 3.34.** Dowieść, że suma skończonej liczby zbiorów doskonałych w przestrzeni metrycznej jest zbiorem doskonałym.

**Zadanie 3.35.** Dowieść, że jeśli zbiór $A$ jest gęsty w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, to zawiera wszystkie punkty izolowane tej przestrzeni.

**Zadanie 3.36.** Dowieść, że podzbiór zbioru $I$ kategorii w przestrzeni metrycznej jest zbiorem $I$ kategorii.

**Zadanie 3.37.** Dowieść, że suma dwóch zbiorów $I$ kategorii w przestrzeni metrycznej jest zbiorem $I$ kategorii.

**Zadanie 3.38.** Dowieść, że suma przeliczalnej rodziny zbiorów $I$ kategorii w przestrzeni metrycznej jest zbiorem $I$ kategorii.

**Zadanie 3.39.** Dowieść, że nadzbiór zbioru $II$ kategorii w przestrzeni metrycznej jest zbiorem $II$ kategorii.

**Zadanie 3.40.** Dowieść, że przekrój dwóch zbiorów rezydualnych jest zbiorem rezydualnym.

**Zadanie 3.41.** Opisać wszystkie zbiory otwarte, domknięte, gęste, nigdzie gęste, brzegowe i w sobie gęste w przestrzeni metrycznej o metryce zero-jedynkowej

**Zadanie 3.42.** Udowodnić, że zbiór $A$ jest regularnie otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \operatorname{Int}(X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A))$.

**Zadanie 3.43.** Udowodnić, że zbiór $A$ jest regularnie otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $A = X \setminus \overline{(X \setminus \overline{A})}$.

**Zadanie 3.44.** Udowodnić, że przekrój dwóch zbiorów regularnie otwartych jest regularnie otwarty.

**Zadanie 3.45.** Udowodnić, że zbiór $\operatorname{Int}(\overline{A})$ jest regularnie otwarty dla dowolnego podzbioru $A$ przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$.

**Zadanie 3.46.** Udowodnić, że dowolny zbiór otwarty można przedstawić w postaci różnicy zbioru regularnie otwartego i nigdzie gęstego.

**Zadanie 3.47.** Niech $A$ i $B$ będą zbiorami brzegowymi w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$. Udowodnić, że jeśli jeden z tych zbiorów jest domknięty, to $A \cup B$ jest zbiorem brzegowym.

Czy jest to prawdą bez założenia domkniętości jednego z tych zbiorów?

**Zadanie 3.48.** Udowodnić, że $x$ jest punktem izolowanym w zbiorze $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dodatnia liczba $r$ taka, że

$$K(x_0, r) \cap A = \{x_0\}.$$

**Zadanie 3.49.** Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ prawdziwe są następujące relacje:

(1) $A^c \subset A^d$;

(2) jeśli $A \subset B$, to $A^c \subset B^c$;

(3) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$;

(4) $(A^c)^d \subset A^c$;

(5) $\overline{(A^c)} = A^c$.

# Rozdział 4

# Funkcje ciągłe

Niech $(X, \varrho)$ i $(Y, \rho)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Weźmy pod uwagę funkcję $f : X \longrightarrow Y$. Niech $x_0$ będzie punktem skupienia przestrzeni $X$.

Element $y \in Y$ nazywamy granicą funkcji $f$ w punkcie $x_0$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\left((0 < \varrho(x, x_0) < \delta) \Longrightarrow (\rho(f(x), y)) < \varepsilon\right).$$

Definicja ta pochodzi od Cauchy'ego. Często używany jest drugi równoważny[1] powyższemu warunek Heinego. Jest on następujący: funkcja $f$ ma granicę $y$ w punkcie $x_0$, jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ takiego, że $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, również ciąg $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny i jego granicą jest $y$. W dalszej części rozdziału udowodnimy, że oba warunki są równoważne.

Funkcję $f$ nazywamy *ciągłą w punkcie* $x_0$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\left((\varrho(x, x_0) < \delta) \Longrightarrow (\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)\right).$$

Definicja ta pochodzi od Cauchy'ego. Często używany jest drugi równoważny[2] powyższemu warunek Heinego. Jest on następujący: funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x_0$, jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ takiego, że $x_n \to x_0$ również ciąg $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny i jego granicą jest $f(x_0)$. W dalszej części rozdziału udowodnimy, że oba warunki są równoważne.

Warunek Cauchy'ego możemy zapisać nieco inaczej, wykorzystując pojęcie kuli. Brzmi on następująco:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\left((x \in K(x_0, \delta)) \Longrightarrow (f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon))\right)$$

lub jeszcze inaczej:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\left(f(K(x_0, \delta)) \subset K(f(x_0), \varepsilon)\right).$$

[1] Dowód równoważności wymaga pewnika wyboru; dokładniej, z warunku Heinego wynika warunek Cauchy'ego, pewnik wyboru ingeruje jedynie w dowodzie implikacji odwrotnej.

[2] Patrz uwaga powyżej.

Zauważamy od razu, że każda funkcja jest ciągła w punkcie izolowanym przestrzeni.

Funkcję $f$ nazywamy *ciągłą w zbiorze* $A$ zawartym w przestrzeni $X$, jeśli jest ona ciągła w każdym punkcie tego zbioru. Funkcję ciągłą w całej przestrzeni $X$ nazywamy krótko funkcją ciągłą.

Widzimy, że funkcja $f$ jest ciągła w przestrzeni $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x_0 \in X} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in X} \left( (\varrho(x, x_0) < \delta) \Longrightarrow (\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon) \right).$$

Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy *jednostajnie ciągłą w przestrzeni* $X$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in X} \forall_{x_0 \in X} \left( (\varrho(x, x_0) < \delta) \Longrightarrow (\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon) \right).$$

Zauważamy bez trudu, że każda funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła. Jednakże nie każda funkcja ciągła jest jednostajnie ciągła. Istnieją jednak (i to ważne) typy przestrzeni metrycznych, w których powyższe stwierdzenie można odwrócić.

Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy *homeomorfizmem*, jeśli jest ona funkcją wzajemnie jednoznaczną oraz funkcje $f$ i $f^{-1}$ są ciągłe. W takim przypadku mówimy, że przestrzeń $(Y, \rho)$ jest obrazem homeomorficznym przestrzeni $(X, \varrho)$. Ponieważ łatwo zauważyć, że jeśli $f$ jest homeomorfizmem, to również i $f^{-1}$ jest homeomorfizmem, więc będziemy mówić, że przestrzenie $(X, \varrho)$ i $(Y, \rho)$ są homeomorficzne. Zapis $(X, \varrho) \sim (Y, \rho)$ będzie oznaczał, że przestrzenie $(X, \varrho)$ i $(Y, \rho)$ są homeomorficzne.

Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy *izometrią*, jeśli dla dowolnych punktów $x$ i $u$ zbioru $X$ spełniona jest równość

$$\rho(f(x), f(u)) = \varrho(x, u).$$

Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy *funkcją domkniętą*, jeśli $f(E)$ jest zbiorem domkniętym dla każdego zbioru domkniętego $E \subset X$.

Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji z przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ do przestrzeni metrycznej $(Y, \rho)$. Mówimy, że ciąg ten jest zbieżny do funkcji $f : X \longrightarrow Y$, jeśli dla każdego elementu $x \in X$ ma miejsce zbieżność $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, tzn.

$$\forall_{x \in X} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n \geqslant n_0} (\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon).$$

Mówimy, że ciąg funkcji $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $f_n : X \longrightarrow Y$ i $(X, \varrho)$, $(Y, \rho)$ są przestrzeniami metrycznymi, jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f$ przekształcającej zbiór $X$ w zbiór $Y$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n \geqslant n_0} \forall_{x \in X} (\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon).$$

Oczywiście, każdy ciąg jednostajnie zbieżny jest zbieżny; łatwo podać przykład ciągu zbieżnego, ale nie jednostajnie zbieżnego.

# Zadania

**Zadanie 4.1.** Dowieść, że warunek Heinego granicy funkcji w punkcie jest równoważny warunkowi Cauchy'ego.

**Zadanie 4.2.** Dowieść, że funkcja $f$ może mieć co najwyżej jedną granicę.

**Zadanie 4.3.** Dowieść, że warunek Heinego ciągłości funkcji w punkcie jest równoważny warunkowi Cauchy'ego.

**Zadanie 4.4.** Udowodnić, że dla dowolnej funkcji $f : X \longrightarrow Y$, gdzie $X$ i $Y$ są przestrzeniami metrycznymi, $f$ jest ciągła w $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru otwartego $V$ w przestrzeni $Y$ zbiór $f^{-1}(V)$ jest otwarty w $X$.

**Zadanie 4.5.** Udowodnić, że dla dowolnej funkcji $f : X \longrightarrow Y$, gdzie $X$ i $Y$ są przestrzeniami metrycznymi, $f$ jest ciągła w $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru domkniętego $D$ w przestrzeni $Y$ zbiór $f^{-1}(D)$ jest domknięty w $X$.

**Zadanie 4.6.** Niech $(X,\varrho)$ $(Y,\rho)$ będą przestrzeniami metrycznymi, a $f : X \longrightarrow Y$ funkcją ciągłą. Czy obraz zbioru otwartego musi być otwarty? Czy obraz zbioru domkniętego musi być domknięty?

**Zadanie 4.7.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X,\varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y,\rho)$. Udowodnić, że $f$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $E \subset Y$ ma miejsce implikacja

$$f(x) \in \operatorname{Int}(E) \Longrightarrow x \in \operatorname{Int}\left(f^{-1}(E)\right).$$

**Zadanie 4.8.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X,\varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y,\rho)$. Udowodnić, że $f$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $E \subset Y$ ma miejsce implikacja

$$x \in \overline{f^{-1}(E)} \Longrightarrow f(x) \in \overline{E}.$$

**Zadanie 4.9.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X,\varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y,\rho)$. Udowodnić, że $f$ jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $A \subset X$ ma miejsce inkluzja

$$f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}.$$

**Zadanie 4.10.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X,\varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y,\rho)$. Udowodnić, że $f$ jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $V \subset Y$ ma miejsce inkluzja

$$\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}\left(\overline{V}\right).$$

**Zadanie 4.11.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Udowodnić, że $f$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x \in \operatorname{Int}\left(f^{-1}\left(K(f(x), r)\right)\right)$$

dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej $r$.

**Zadanie 4.12.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Udowodnić, że $f$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x \in \operatorname{Int}\left(f^{-1}\left(K\left(f(x), \frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

dla każdej liczby naturalnej dodatniej $n$.

**Zadanie 4.13.** Niech $A$ będzie zbiorem gęstym i brzegowym w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$. Udowodnić, że funkcja $f : X \longrightarrow \mathrm{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in A, \\ 1 & \text{dla} \quad x \in X \setminus A, \end{cases}$$

nie posiada granicy w żadnym punkcie przestrzeni $X$.

**Zadanie 4.14.** Niech $A$ będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, $(Y, \rho)$ - przestrzenią metryczną i $f : A \longrightarrow Y$ funkcją ciągłą w zbiorze $A$. Niech $B$ oznacza zbiór tych punktów zbioru $X \setminus A$, w których istnieje granica funkcji $f$. Udowodnić, że funkcja $g : A \cup B \longrightarrow Y$ określona wzorem

$$g(x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{dla} \quad x_0 \in A, \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{dla} \quad x_0 \in B, \end{cases}$$

jest ciągła w zbiorze $A \cup B$.

**Zadanie 4.15.** Niech $a$ będzie ustalonym punktem przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$. Udowodnić, że funkcja $f : X \longrightarrow \mathrm{R}$ określona wzorem $f(x) = \varrho(x, a)$ dla $x \in X$, jest ciągła.

**Zadanie 4.16.** Niech $A$ będzie ustalonym niepustym podzbiorem przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$. Udowodnić, że funkcja $f : X \longrightarrow \mathrm{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \varrho(x, A) \qquad \text{dla} \qquad x \in X,$$

jest ciągła.

**Zadanie 4.17.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Udowodnić, że jeśli $X = A \cup B$, gdzie $A$ i $B$ są zbiorami otwartymi i $f_{|A}$, $f_{|B}$ są funkcjami ciągłymi (na zbiorach $A$ i $B$, oczywiście), to funkcja $f$ jest ciągła (w przestrzeni $X$).

**Zadanie 4.18.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Udowodnić, że jeśli $X = \bigcup_{t \in T} G_t$, gdzie zbiory $G_t$ są otwarte dla wszystkich $t \in T$ oraz każda z funkcji $f_{|G_t}$ jest ciągła, to funkcja $f$ jest ciągła (w przestrzeni $X$).

**Zadanie 4.19.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Udowodnić, że jeśli $X = A \cup B$, gdzie $A$ i $B$ są zbiorami domkniętymi i $f_{|A}$, $f_{|B}$ są funkcjami ciągłymi (na zbiorach $A$ i $B$, oczywiście), to funkcja $f$ jest ciągła (w przestrzeni $X$).

Uogólnić to zadanie na skończoną liczbę zbiorów domkniętych.

**Zadanie 4.20.** Czy powyższe zadanie można uogólnić na nieskończoną rodzinę zbiorów domkniętych?

**Zadanie 4.21.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Udowodnić, że jeśli

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \qquad \text{gdzie} \qquad E_n \subset \operatorname{Int}(E_{n+1}) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

oraz każda z funkcji $f_{|E_n}$ jest ciągła, to funkcja $f$ jest ciągła (w przestrzeni $X$).

**Zadanie 4.22.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Udowodnić, że jeśli dla każdego zbioru ograniczonego $E$ funkcja $f_{|E}$ jest ciągła, to funkcja $f$ jest ciągła (w przestrzeni $X$).

**Zadanie 4.23.** Udowodnić, że złożenie dwóch funkcji ciągłych w przestrzeniach metrycznych jest funkcją ciągłą.

**Zadanie 4.24.** Dowieść, że wzajemnie jednoznaczna funkcja przekształcająca przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ na $(Y, \rho)$ jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $A \subset X$ spełniona jest równość

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}.$$

**Zadanie 4.25.** Dowieść, że wzajemnie jednoznaczna funkcja przekształcająca przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ na $(Y, \rho)$ jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $B \subset Y$ spełniona jest równość

$$f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}.$$

**Zadanie 4.26.** Dowieść, że wzajemnie jednoznaczna funkcja przekształcająca przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ na $(Y, \rho)$ jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $A \subset X$ ma miejsce równość

$$f(\operatorname{Int}(A)) = \operatorname{Int}(f(A)).$$

**Zadanie 4.27.** Dowieść, że wzajemnie jednoznaczna funkcja przekształcająca przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ na $(Y, \rho)$ jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $B \subset Y$ ma miejsce równość

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) = \mathrm{Int}\left(f^{-1}(B)\right).$$

**Zadanie 4.28.** Niech $f : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ będzie homeomorfizmem przekształcającym przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ na $(Y, \rho)$. Wówczas dla dowolnego zbioru $A \subset X$ ma miejsce równość

$$f(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{Fr}(f(A)).$$

**Zadanie 4.29.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ na przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Udowodnić, że funkcja $f$ jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $x_0 \in X$ i dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni metrycznej $X$ następujące warunki są równoważne

**(1)** $x_n \to x_0$;

**(2)** $f(x_n) \to f(x_0)$.

**Zadanie 4.30.** Niech $(X, \varrho)$, $(Y, \rho)$ i $(Z, \sigma)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Udowodnić następujące własności:

**(1)** $(X, \varrho) \sim (X, \varrho)$;

**(2)** jeśli $(X, \varrho) \sim (Y, \rho)$, to $(Y, \rho) \sim (X, \varrho)$;

**(3)** jeśli $(X, \varrho) \sim (Y, \rho)$ i $(Y, \rho) \sim (Z, \sigma)$, to $(X, \varrho) \sim (Z, \sigma)$.

**Zadanie 4.31.** Podać przykład funkcji wzajemnie jednoznacznej i ciągłej, przekształcającej przestrzeń metryczną na przestrzeń metryczną, która nie jest homeomorfizmem.

**Zadanie 4.32.** Czy funkcja $f : X \to Y$, gdzie $X = [0, 1) \cup \{2\}$, $Y = [0, 1]$, określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in [0, 1), \\ 1 & \text{dla} \quad x = 2 \end{cases}$$

jest homeomorfizmem? (Oczywiście metryki w przestrzeniach $X$ i $Y$ są naturalnymi metrykami w zbiorze liczb rzeczywistych.)

**Zadanie 4.33.** Udowodnić, że jeśli $f : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ jest homeomorfizmem przestrzeni metrycznej $X$ na przestrzeń metryczną $Y$, to obraz zbioru:

**(1)** gęstego jest gęsty;

**(2)** brzegowego jest brzegowy;

**(3)** nigdzie gęstego jest nigdzie gęsty;

(4) w sobie gęstego jest w sobie gęsty;

(5) doskonalego jest doskonały;

(6) regularnie otwartego jest regularnie otwarty.

Czy wystarczy założenie ciągłości funkcji $f$ w miejsce homeomorfizmu?

**Zadanie 4.34.** Udowodnić, że następujące pary przestrzeni (z metryką euklidesową) są homeomorficzne:

(1) $(a,b)$, $\mathsf{R}$;

(2) $(-\infty,b)$, $\mathsf{R}$;

(3) $(a,b]$, $(-\infty,c]$;

(4) $[a,b]$, $[c,d]$.

**Zadanie 4.35.** Udowodnić, że jeśli

$$X = \{(x,y) : x \in \mathsf{R},\ y \in \mathsf{R},\ x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

$$Y = X \cup \{(1,1)\}$$

są przestrzeniami metrycznymi z metryką euklidesową, to nie są one homeomorficzne, ale każda z nich zawiera podzbiór homeomorficzny z drugą.

**Zadanie 4.36.** Dowieść, że żadne dwie spośród następujących podprzestrzeni przestrzeni $\mathsf{R}$ z naturalną metryką nie są homeomorficzne, gdzie

$$A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathsf{N}\right\}, \quad B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathsf{N}\right\}$$

i $C$ jest zbiorem liczb wymiernych.

**Zadanie 4.37.** Które z następujących podprzestrzeni przestrzeni $\mathsf{R}^2$ są homeomorficzne

$$A = \{(x,y) : (x = 0 \wedge y \in [0,1]) \vee (y = 0 \wedge x \in [-1,1])\},$$

$$B = \{(x,y) : (x = 0 \wedge y \in [0,2]) \vee (y = 0 \wedge x \in [0,2])\},$$

$$C = \{(x,y) : (y = 0 \wedge x \in [-1,1])\}.$$

**Zadanie 4.38.** Podać przykład nieskończonej rodziny $\{(X_n, \varrho_n)\}_{n=1}^{\infty}$ przestrzeni metrycznych, z których żadne dwie nie są homeomorficzne, ale każda przestrzeń $(X_n, \varrho_n)$ posiada następującą własność: dla każdego $k \in \mathsf{N}$ istnieje podzbiór przestrzeni $X_n$ homeomorficzny z $X_k$.

**Zadanie 4.39.** Udowodnić, że każda przestrzeń metryczna jest homeomorficzna z przestrzenią metryczną ograniczoną.

**Zadanie 4.40.** Niech $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Udowodnić, że $f$ jest funkcją jednostajnie ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych ciągów $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni metrycznej $X$ równość

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, z_n) = 0$$

implikuje równość

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f(x_n), f(z_n)) = 0.$$

**Zadanie 4.41.** Niech $(Y, \rho)$, $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Niech $X = X_1 \times X_2$. Niech dalej $f$ będzie funkcją przekształcającą przestrzeń metryczną $Y$ w przestrzeń metryczną $X$. Oznaczmy teraz $f = (f_1, f_2)$, gdzie obie funkcje $f_1$, $f_2$ są funkcjami określonymi w przestrzeni $Y$ i przyjmują odpowiednio wartości w $X_1$, $X_2$. Udowodnić, że funkcja $f : Y \longrightarrow X$ jest ciągła w przestrzeni $(Y, \rho)$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda z funkcji $f_1$, $f_2$ jest ciągła w tej przestrzeni, gdzie metryka $\varrho$ w zbiorze $X$ określona jest następująco:

(1) $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1, u_1) + \varrho_2^2(x_2, u_2)}$;

(2) $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \varrho_1(x_1, u_1) + \varrho_2(x_2, u_2)$;

(3) $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \max(\varrho_1(x_1, u_1), \varrho_2(x_2, u_2))$;

dla dowolnych $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ ze zbioru $X$.

**Zadanie 4.42.** Niech $X$ będzie przestrzenią funkcji rzeczywistych ciągłych na przedziale $[0, 1]$ z metryką określoną jako

$$\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \;:\; x \in [0, 1]\},$$

gdzie $f$, $g \in X$. Sprawdzić, która z poniższych funkcji $F$, $G$, $H$, $K$, określonych na $X$ o wartościach w $X$, jest ciągła, gdy:

(1) $F(f) = \varphi$, gdzie $\varphi(x) = f(1 - x)$ dla $x \in [0, 1]$;

(2) $H(f) = h$, gdzie $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$;

(3) $G(f) = g$, gdzie $g(x) = \int_0^x f(t) \cdot \sin(x - t)\,dt$;

(4) $K(f) = k$, gdzie $k(x) = \int_0^x f^2(t)\,dt$;

(5) $L(f) = l$, gdzie $l(x) = \int_0^x f(t^\alpha)\,dt$ dla ustalonej liczby $\alpha > 0$.

**Zadanie 4.43.** Niech $X$ będzie przestrzenią funkcji rzeczywistych ciągłych na przedziale $[0, 1]$ z metryką określoną następująco

$$\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \;:\; x \in [0, 1]\},$$

gdzie $f$, $g \in X$. Sprawdzić, która z poniższych funkcji $F$, $G$, $H$, $K$, $L$, określonych na $X$ o wartościach w R, jest ciągła, gdy:

(1) $F(f) = f(1)$;

(2) $H(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$;

(3) $G(f) = \int_0^1 f(t)\cdot \sin t\,dt$;

(4) $K(f) = \int_0^1 f^2(t)\,dt$;

(5) $L(f) = \int_0^1 f(t^\alpha)\,dt$ dla ustalonej liczby $\alpha > 0$.

**Zadanie 4.44.** Niech $C^{(1)}_{[0,1]}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych, których pierwsze pochodne są funkcjami ciągłymi. W zbiorze tym określamy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)| \,:\, x \in [0,1]\}$$

dla $f, g \in C^{(1)}_{[0,1]}$.

Udowodnić, że funkcja ta jest metryką.

Sprawdzić, która z poniższych funkcji z $C^{(1)}_{[0,1]}$ do $C^{(1)}_{[0,1]}$ jest ciągła, gdy:

(1) $F(f) = \varphi$, gdzie $\varphi(x) = f(1-x)$ dla $x \in [0,1]$;

(2) $H(f) = h$, gdzie $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$;

(3) $G(f) = g$, gdzie $g(x) = \int_0^x f(t)\cdot \sin \pi(1-t)\,dt$;

(4) $K(f) = k$, gdzie $k(x) = \int_0^x f^2(t)\,dt$;

(5) $L(f) = l$, gdzie $l(x) = \int_0^x f(t^\alpha)\,dt$ dla ustalonej liczby $\alpha > 1$.

**Zadanie 4.45.** Niech $C^{(2)}_{[0,1]}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji dwukrotnie różniczkowalnych o drugiej pochodnej ciągłej. W zbiorze tym określmy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)| \,:\, x \in [0,1]\}$$

dla $f, g \in C^{(2)}_{[0,1]}$. Udowodnić, że funkcja ta jest metryką.

Czy funkcja $D$ z $C^{(2)}_{[0,1]}$ do $C^{(1)}_{[0,1]}$ jest ciągła, gdy $D(f) = f'$ dla $f \in C^{(2)}_{[0,1]}$.

**Zadanie 4.46.** Niech $C^{(2)}_{[0,1]}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych o drugiej pochodnej ciągłej. W zbiorze tym określmy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \,:\, x \in [0,1]\}$$

dla $f, g \in C^{(2)}_{[0,1]}$. Dla zbioru $C^{(1)}_{[0,1]}$ metrykę określamy tym samym wzorem, tj.

$$\rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \,:\, x \in [0,1]\},$$

Sprawdzić, która z poniższych funkcji z $C^{(2)}_{[0,1]}$ do $C^{(1)}_{[0,1]}$ jest ciągła, gdy:

**(1)** $F(f) = \varphi$, gdzie $\varphi(x) = f(1-x)$ dla $x \in [0,1]$;

**(2)** $G(f) = \alpha \cdot f$, gdzie $\alpha$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą;

**(3)** $L(f) = l$, gdzie $l(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

**Zadanie 4.47.** Niech $C^{(1)}_{[0,1]}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych o pierwszej pochodnej ciągłej. W zbiorze tym określmy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \,:\, x \in [0,1]\}$$

dla $f, g \in C^{(1)}_{[0,1]}$. Dla zbioru $C_{[0,1]}$ metrykę określamy tym samym wzorem, tj.

$$\rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \,:\, x \in [0,1]\}.$$

Sprawdzić, która z poniższych funkcji z $C^{(1)}_{[0,1]}$ do $C_{[0,1]}$ jest ciągła, gdy:

**(1)** $F(f) = \varphi$, gdzie $\varphi(x) = f(1-x^2)$ dla $x \in [0,1]$;

**(2)** $G(f) = g$, gdzie $g(x) = x \cdot f(x)$.

**Zadanie 4.48.** Niech $X$ będzie zbiorem funkcji ciągłych w przedziale $[0,1]$. W zbiorze tym funkcję $\varrho$ określamy następująco:

$$\varrho(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2\,dx}.$$

Udowodnić, że $\varrho$ jest metryką w rozważanym zbiorze. Przestrzeń tę oznaczamy symbolem $L^{(2)}_{[0,1]}$.

Jeśli dla zbioru $X$ metrykę $\rho$ określimy w sposób następujący:

$$\rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \,:\, x \in [0,1]\},$$

to przestrzeń $(X,\rho)$ oznaczamy symbolem $C_{[0,1]}$. Czy funkcja $F$ z $L^{(2)}_{[0,1]}$ do $C_{[0,1]}$ jest ciągła, gdy $F(f) = f$ dla $f \in L^{(2)}_{[0,1]}$?

Sprawdzić, czy funkcja $G$ o dziedzinie $C_{[0,1]}$ i wartościach w przestrzeni $L^{(2)}_{[0,1]}$ określona następująco:

$$G(f) = f, \quad \text{gdy} \quad f \in C_{[0,1]}$$

jest ciągła.

**Zadanie 4.49.** Mówimy, że funkcja $f : X \longrightarrow Y$, gdzie $(X,\varrho)$ i $(Y,\rho)$ są przestrzeniami metrycznymi, spełnia warunek Lipschitza, jeśli istnieje liczba dodatnia $M$ taka, że dla każdej pary punktów $x$, $x'$ z przestrzeni $X$ spełniona jest nierówność

$$\rho(f(x), f(x')) \leqslant M \cdot \varrho(x, x').$$

Udowodnić, że każda funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest ciągła.

**Zadanie 4.50.** Udowodnić, że granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

**Zadanie 4.51.** Czy, jeśli $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem funkcji ciągłych z przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$ zbieżnym do funkcji ciągłej, to zbieżność musi być jednostajna?

**Zadanie 4.52.** Czy ciąg funkcji nieciągłych z przestrzeni metrycznej do przestrzeni metrycznej może być zbieżny do funkcji ciągłej? A zbieżny jednostajnie?

**Zadanie 4.53.** Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji z przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Mówimy, że ciąg ten jest zbieżny quasi-jednostajnie do funkcji $f$, jeśli:

(1) ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do funkcji $f$;

(2) dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon$ i dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieje skończony układ wskaźników

$$n_1, n_2, \ldots, n_k \geqslant n$$

taki, że dla każdego elementu $x$ z przestrzeni $X$ przynajmniej jedna z nierówności

$$\rho(f_{n_1}(x), f(x)) < \varepsilon, \ldots, \rho(f_{n_k}(x), f(x)) < \varepsilon$$

jest prawdziwa.

Udowodnić, że jeśli $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem funkcji ciągłych zbieżnym quasi-jednostajnie do funkcji $f$, to funkcja ta jest ciągła.

**Zadanie 4.54.** Podać przykład ciągu funkcji, który jest zbieżny, ale nie jest jednostajnie zbieżny.

**Zadanie 4.55.** Podać przykład ciągu funkcji, który jest zbieżny, ale nie jest quasi-jednostajnie zbieżny.

**Zadanie 4.56.** Podać przykład ciągu funkcji quasi-jednostajnie zbieżnego, który nie jest jednostajnie zbieżny.

**Zadanie 4.57.** Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji z przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Mówimy, że ciąg ten jest zbieżny monotonicznie do funkcji $f$, jeśli

$$\forall_{x \in X} \forall_{n \in \mathbb{N}} \ (\varrho(f_{n+1}(x), f(x)) \leqslant \varrho(f_n(x), f(x))).$$

Udowodnić, że jeśli ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny quasi-jednostajnie i monotonicznie do funkcji $f$, to jest zbieżny jednostajnie do $f$.

**Zadanie 4.58.** W zbiorze R rozważamy naturalną metrykę. Niech funkcja $f : \mathsf{R} \longrightarrow \mathsf{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{gdy} \quad x = \frac{p}{q},\ (p,q) = 1, \\ 0, & \text{gdy} \quad x \text{ jest liczbą niewymierną.} \end{cases}$$

Zbadać, w jakich punktach funkcja $f$ jest ciągła.

**Zadanie 4.59.** W zbiorze R rozważamy naturalną metrykę. Niech funkcja $f : \mathsf{R} \longrightarrow \mathsf{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{gdy} \quad x \in \mathsf{Q}, \\ x, & \text{gdy} \quad x \in \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}. \end{cases}$$

Zbadać, w jakich punktach funkcja $f$ jest ciągła.

**Zadanie 4.60.** Niech funkcja $f$ przekształca zbiór liczb rzeczywistych w zbiór liczb rzeczywistych z naturalną metryką, przy czym

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x, & \text{gdy} \quad x \in \mathsf{Q}, \\ x, & \text{gdy} \quad x \in \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}. \end{cases}$$

Zbadać, w jakich punktach funkcja $f$ jest ciągła.

**Zadanie 4.61.** Udowodnić, że jeśli ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji rzeczywistych jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f$ na zbiorze $X$, to ciąg $(|f_n|)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $|f|$.

**Zadanie 4.62.** Udowodnić, że jeśli ciągi $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji rzeczywistych są jednostajnie zbieżne do funkcji $f$ i $g$, odpowiednio, na zbiorze $X$, to ciąg $(f_n + g_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f + g$.

**Zadanie 4.63.** Udowodnić, że jeśli ciągi $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji rzeczywistych są jednostajnie zbieżne do funkcji $f$ i $g$, odpowiednio, na zbiorze $X$, to ciąg $(f_n - g_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f - g$.

**Zadanie 4.64.** Udowodnić, że jeśli ciągi $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji rzeczywistych są jednostajnie zbieżne do funkcji $f$ i $g$ na zbiorze $X$, to ciąg $(\max(f_n, g_n))_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $\max(f, g)$.

**Zadanie 4.65.** Udowodnić, że jeśli ciągi $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji rzeczywistych są jednostajnie zbieżne do funkcji $f$ i $g$ na zbiorze $X$, to ciąg $(\min(f_n, g_n))_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $\min(f, g)$.

**Zadanie 4.66.** Udowodnić, że jeśli ciągi $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ograniczonych funkcji rzeczywistych są jednostajnie zbieżne do funkcji ograniczonych $f$ i $g$, odpowiednio, na zbiorze $X$, to ciąg $(f_n \cdot g_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f \cdot g$.

Pokazać, że założenie ograniczoności funkcji jest w tym zadaniu istotne.

**Zadanie 4.67.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną, gdzie $X$ jest dowolnym zbiorem i $\varrho$ metryką zero-jedynkową, a $(Y, \rho)$ – dowolną przestrzenią metryczną. Jakie funkcje przekształcające zbiór $X$ w $Y$ są ciągłe?

**Zadanie 4.68.** Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną i $f$ – dowolną funkcją rzeczywistą określoną na przestrzeni $X$. Udowodnić, że funkcja $f$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $y \in \mathsf{R}$ zbiory

$$\{x \in X : y < f(x)\}$$

i

$$\{x \in X : f(x) < y\}$$

są otwarte w przestrzeni $X$.

**Zadanie 4.69.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Niech $X = X_1 \times X_2$. Niech dalej $f$ będzie funkcją ciągłą przekształcającą przestrzeń $X_1$ w przestrzeń $X_2$. Udowodnić, że zbiór $f$, czyli

$$f = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : x_2 = f(x_1)\},$$

jest domknięty w przestrzeni $(X, \varrho)$, gdzie funkcja $\varrho$ jest określona następująco:

(1) $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \varrho_2^2(x_2, y_2)}$;

(2) $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varrho_1(x_1, y_1) + \varrho_2(x_2, y_2)$;

(3) $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max(\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2))$;

dla dowolnych $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ ze zbioru $X$.

Czy z domkniętości zbioru $A$ wynika ciągłość funkcji $f$?

**Zadanie 4.70.** Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną i $f$ – dowolną funkcją rzeczywistą określoną na przestrzeni $X$. Udowodnić, że funkcja $f$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory

$$\{(x, y) \in X \times \mathsf{R} : y < f(x)\}$$

i

$$\{(x, y) \in X \times \mathsf{R} : f(x) < y\}$$

są otwarte w przestrzeni $X \times \mathsf{R}$, gdzie metrykę w tym zbiorze określamy wzorem

$$\varrho(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \sqrt{\varrho^2(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|^2}$$

dla $\boldsymbol{p}_1 = (x_1, y_1), \boldsymbol{p}_2 = (x_2, y_2) \in X \times \mathsf{R}$.

**Zadanie 4.71.** Dla przestrzeni metrycznych $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ niech $X = X_1 \times X_2$. Funkcję $\pi_1 : X \longrightarrow X_1$ daną wzorem

$$\pi_1((x_1, x_2)) = x_1 \quad \text{dla} \quad (x_1, x_2) \in X$$

nazywamy rzutem (projekcją) przestrzeni $X$ na przestrzeń $X_1$; funkcję $\pi_1 : X \longrightarrow X_1$ daną wzorem

$$\pi_1((x_1, x_2)) = x_2 \quad \text{dla} \quad (x_1, x_2) \in X$$

nazywamy rzutem (projekcją) przestrzeni $X$ na przestrzeń $X_2$. Udowodnić, że rzuty są funkcjami ciągłymi i domkniętymi, gdy metryka $\varrho$ w przestrzeni $X$ określona jest w sposób następujący:

**(1)** $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \varrho_2^2(x_2, y_2)}$;

**(2)** $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varrho_1(x_1, y_1) + \varrho_2(x_2, y_2)$;

**(3)** $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max(\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2))$;

dla dowolnych $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ ze zbioru $X$.

# Rozdział 5

# Przestrzenie ośrodkowe

Przestrzeń metryczną nazywamy *ośrodkową*, jeśli istnieje zbiór przeliczalny i gęsty w tej przestrzeni.

*Pokryciem otwartym* przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ nazywamy każdą rodzinę złożoną ze zbiorów otwartych, której suma jest równa $X$.

*Podpokryciem* pokrycia $\mathcal{U}$ nazywamy takie pokrycie, które jest zawarte w $\mathcal{U}$.

## Zadania

**Zadanie 5.1.** Dowieść, że przestrzeń metryczna jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przeliczalna w tej przestrzeni.

**Zadanie 5.2.** Udowodnić, że podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowa.

**Zadanie 5.3.** (twierdzenie Lindelöfa). Udowodnić, że w przestrzeni metrycznej ośrodkowej dowolne pokrycie otwarte posiada podpokrycie przeliczalne.

**Zadanie 5.4.** Udowodnić, że obraz ciągły przestrzeni ośrodkowej jest przestrzenią ośrodkową.

**Zadanie 5.5.** Udowodnić, że rodzina zbiorów otwartych w przestrzeni ośrodkowej może mieć moc co najwyżej continuum.

**Zadanie 5.6.** Udowodnić, że rodzina zbiorów otwartych i rozłącznych w przestrzeni ośrodkowej może być co najwyżej przeliczalna.

**Zadanie 5.7.** Udowodnić, że rodzina zbiorów domkniętych w przestrzeni ośrodkowej może mieć moc co najwyżej continuum. Co można powiedzieć o mocy rodziny zbiorów domkniętych i rozłącznych?

**Zadanie 5.8.** Udowodnić, że w przestrzeni ośrodkowej $(X, \varrho)$ dla dowolnego zbioru $A \subset X$ zbiór $A \setminus A^c$ jest co najwyżej przeliczalny.

**Zadanie 5.9.** (twierdzenie Cantora-Bendixsona). Udowodnić, że przestrzeń ośrodkowa jest sumą dwóch podprzestrzeni, z których jedna jest zbiorem doskonałym, druga zaś jest zbiorem przeliczalnym.

**Zadanie 5.10.** Udowodnić, że przestrzeń ośrodkowa ma moc nie większą niż continuum.

**Zadanie 5.11.** Udowodnić, że w przestrzeni ośrodkowej zbiór punktów izolowanych jest co najwyżej przeliczalny.

**Zadanie 5.12.** Udowodnić, że w przestrzeni ośrodkowej zbiór punktów izolowanych dowolnego podzbioru $A$ jest co najwyżej przeliczalny.

**Zadanie 5.13.** Udowodnić, że jeśli w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ istnieje nieprzeliczalny zbiór $A$ o tej własności, że dla dowolnych $x, y \in A$ takich, że $x \neq y$ mamy $\varrho(x, y) \geqslant r$, gdzie $r$ jest ustaloną liczbą dodatnią, to przestrzeń nie jest ośrodkowa.

**Zadanie 5.14.** Udowodnić, że w każdej przestrzeni metrycznej ośrodkowej $(X, \varrho)$ $(A^c)^c = A^c$ dla dowolnego zbioru $A \subset X$.

**Zadanie 5.15.** Udowodnić, że przestrzeń metryczna ośrodkowa, która nie zawiera żadnego niepustego podzbioru w sobie gęstego, jest przeliczalna.

**Zadanie 5.16.** Udowodnić, że przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej $r$ zbiór $X$ jest sumą skończonej lub przeliczalnej rodziny kul o promieniu równym $r$.

**Zadanie 5.17.** Udowodnić, że każda przestrzeń metryczna, w której każde pokrycie otwarte ma podpokrycie przeliczalne, jest ośrodkowa.

**Zadanie 5.18.** Czy przestrzeń liczb rzeczywistych z naturalną metryką jest ośrodkowa?

**Zadanie 5.19.** Czy przestrzeń $\mathsf{R}^n$ z metryką euklidesową jest ośrodkowa?

**Zadanie 5.20.** Niech w zbiorze $X = [0, 1]$ dana będzie metryka

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{jeśli } x, y \in \mathsf{Q} \text{ lub } x, y \in \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}, \\ |x| + |y| & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Czy jest to przestrzeń ośrodkowa?

**Zadanie 5.21.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathsf{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|) \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),$$

jest ośrodkowa?

**Zadanie 5.22.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathsf{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),$$

jest ośrodkowa?

**Zadanie 5.23.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathsf{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \min(1, \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)) \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2),$$

jest ośrodkowa?

**Zadanie 5.24.** Udowodnić, że przestrzeń $(X, \varrho)$ z metryką zero-jedynkową jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $X$ jest co najwyżej przeliczalny.

**Zadanie 5.25.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathsf{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad x = y, \\ |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2|, & \text{jeśli} \quad x \neq y, \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ są dowolnymi elementami zbioru $\mathsf{R}^2$, jest ośrodkowa?

**Zadanie 5.26.** Niech $X$ będzie zbiorem ograniczonych funkcji rzeczywistych określonych na pewnym nieprzeliczalnym zbiorze $E$. Niech dla $f, g \in X$

$$\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \; : \; x \in E\}.$$

Czy jest to przestrzeń metryczna ośrodkowa?

**Zadanie 5.27.** Niech $X$ będzie zbiorem ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na pewnym przedziale $[a, b]$. Niech dla $f, g \in X$

$$\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \; : \; x \in [0, 1]\}.$$

Czy jest to przestrzeń metryczna ośrodkowa?

**Zadanie 5.28.** Udowodnić, że jeśli $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są przestrzeniami metrycznymi ośrodkowymi, to $(X, \varrho)$, gdzie $X = X_1 \times X_2$ i

$$\varrho(x, y) = \sqrt{(\varrho_1(x_1, y_1))^2 + (\varrho_2(x_2, y_2))^2} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$

jest przestrzenią ośrodkową.

**Zadanie 5.29.** Udowodnić, że jeśli $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są przestrzeniami metrycznymi ośrodkowymi, to $(X, \varrho)$, gdzie $X = X_1 \times X_2$ i

$$\varrho(x, y) = \max(\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2)) \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$

jest przestrzenią ośrodkową.

**Zadanie 5.30.** Udowodnić, że jeśli $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są przestrzeniami metrycznymi ośrodkowymi, to $(X, \varrho)$, gdzie $X = X_1 \times X_2$ i

$$\varrho(x, y) = \varrho_1(x_1, y_1) + \varrho_2(x_2, y_2) \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

jest przestrzenią ośrodkową.

**Zadanie 5.31.** Udowodnić, że jeśli $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są przestrzeniami metrycznymi ośrodkowymi i $\{B_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ są bazami przestrzeni $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$, odpowiednio, to rodzina

$$\{B_n^1 \times B_k^2\}_{n,k\in\mathbb{N}}$$

jest bazą przestrzeni $(X, \varrho)$, gdzie $X = X_1 \times X_2$ i

$$\varrho(x, y) = \sqrt{(\varrho_1(x_1, y_1))^2 + (\varrho_2(x_2, y_2))^2} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

**Zadanie 5.32.** Udowodnić, że jeśli $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są przestrzeniami metrycznymi ośrodkowymi i $\{B_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ są bazami przestrzeni $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$, odpowiednio, to rodzina

$$\{B_n^1 \times B_k^2\}_{n,k\in\mathbb{N}}$$

jest bazą przestrzeni $(X, \varrho)$, gdzie $X = X_1 \times X_2$ i

$$\varrho(x, y) = \varrho_1(x_1, y_1) + \varrho_2(x_2, y_2) \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

**Zadanie 5.33.** Udowodnić, że jeśli $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są przestrzeniami metrycznymi ośrodkowymi i $\{B_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ są bazami przestrzeni $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$, odpowiednio, to rodzina

$$\{B_n^1 \times B_k^2\}_{n,k\in\mathbb{N}}$$

jest bazą przestrzeni $(X, \varrho)$, gdzie $X = X_1 \times X_2$ i

$$\varrho(x, y) = \max(\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2)) \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

**Zadanie 5.34.** Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich niezdegenerowanych przedziałów domkniętych i ograniczonych w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Jeśli $I_1, I_2 \in X$, to zbiór $I_1 \triangle I_2 = (I_1 \setminus I_2) \cup (I_2 \setminus I_1)$ jest pusty lub jest przedziałem lub jest sumą dwóch przedziałów niezdegenerowanych (niekoniecznie domkniętych). Niech $\varrho(I_1, I_2)$ równa się długości przedziału lub sumie długości przedziałów stanowiących różnicę symetryczną $I_1$ i $I_2$, lub zeru, gdy ta różnica jest zbiorem pustym. Czy ta przestrzeń jest ośrodkowa?

**Zadanie 5.35.** W zbiorze $\mathbb{C}$ wszystkich liczb zespolonych wprowadźmy metrykę $\varrho$ w następujący sposób:

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad x = y, \\ |\operatorname{Re} x| + |\operatorname{Re} y| + |\operatorname{Im} x - \operatorname{Im} y|, & \text{jeśli} \quad x \neq y, \end{cases}$$

gdzie $x, y \in \mathbb{C}$. Udowodnić, że $(\mathbb{C}, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną. Czy jest to przestrzeń ośrodkowa?

**Zadanie 5.36.** Czy przestrzeń $(\mathsf{N}, \varrho)$ jest ośrodkowa, gdy metryka $\varrho$ jest określona wzorem $\varrho(n, m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$?

**Zadanie 5.37.** Czy przestrzeń $l^p$ dla $p > 1$ jest ośrodkowa?

**Zadanie 5.38.** Czy przestrzeń $l^\infty$ wszystkich ciągów ograniczonych z metryką $\varrho$, określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathsf{N}\} \quad \text{dla} \quad x = (x_n)_{n=1}^\infty, \quad y = (y_n)_{n=1}^\infty,$$

jest ośrodkowa?

**Zadanie 5.39.** Czy przestrzeń $(X, \varrho)$ wszystkich ciągów ograniczonych z metryką $\varrho$, określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \quad \text{dla} \quad x = (x_n)_{n=1}^\infty, \quad y = (y_n)_{n=1}^\infty,$$

jest przestrzenią ośrodkową?

**Zadanie 5.40.** Czy przestrzeń metryczna $s$ wszystkich ciągów liczb rzeczywistych z metryką $\varrho$, określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \quad \text{dla} \quad x = (x_n)_{n=1}^\infty, \quad y = (y_n)_{n=1}^\infty,$$

jest przestrzenią ośrodkową?

**Zadanie 5.41.** Czy przestrzeń $(X, \varrho)$ wszystkich ciągów ograniczonych z metryką $\varrho$, określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad x = y, \\ \frac{1}{n}, \quad \text{gdzie} \quad n = \inf\{m : x_m \neq y_m\}, & \text{jeśli} \quad x \neq y \end{cases}$$

dla $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ i $y = (y_n)_{n=1}^\infty$, jest przestrzenią ośrodkową?

**Zadanie 5.42.** Niech $X$ będzie zbiorem funkcji rzeczywistych ciągłych na przedziale $[a, b]$. Funkcję $\varrho$ określamy następująco:

$$\varrho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad \text{dla} \quad f, g \in X.$$

Czy $(X, \varrho)$ jest przestrzenią ośrodkową?

**Zadanie 5.43.** Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną ośrodkową, to $(X, \varrho^*)$, gdzie

$$\varrho^*(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)} \quad \text{dla} \quad x, y \in X,$$

też jest przestrzenią metryczną ośrodkową.

**Zadanie 5.44.** Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną ośrodkową, $\alpha$ — dowolną liczbą dodatnią, to $(X, \varrho^\star)$, gdzie

$$\varrho^\star(x, y) = \alpha \cdot \varrho(x, y) \quad \text{dla} \quad x, y \in X,$$

też jest przestrzenią metryczną ośrodkową.

**Zadanie 5.45.** Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną ośrodkową, to $(X, \varrho^\star)$, gdzie

$$\varrho^\star(x, y) = \min(1, \varrho(x, y)) \quad \text{dla} \quad x, y \in X,$$

też jest przestrzenią metryczną ośrodkową.

**Zadanie 5.46.** Czy, jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną ośrodkową, $x_0$ ustalonym punktem przestrzeni $X$, to $(X, \varrho^\star)$, gdzie

$$\varrho^\star(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x = y, \\ \varrho(x, x_0) + \varrho(y, x_0) & \text{dla} \quad x \neq y, \end{cases}$$

dla $x, y \in X$, też jest przestrzenią metryczną ośrodkową?

**Zadanie 5.47.** Niech $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją spełniającą następujące warunki:

**(1)** $f(t) = 0 \iff t = 0$;

**(2)** $f$ jest niemalejąca;

**(3)** $f(t + s) \leqslant f(t) + f(s)$ dla dowolnych liczb $t, s$ ze zbioru $[0, \infty)$.

Czy, jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną ośrodkową, to $(X, \varrho^\star)$, gdzie

$$\varrho^\star(x, y) = f(\varrho(x, y)) \quad \text{dla} \quad x, y \in X,$$

też jest przestrzenią metryczną ośrodkową? Kiedy tak jest?

# Rozdział 6

# Przestrzenie zupełne

Przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ nazywamy *zupełną*, jeśli każdy ciąg elementów tej przestrzeni spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.

Funkcję $f : X \longrightarrow Y$, gdzie $(X, \varrho)$ i $(Y, \rho)$ są przestrzeniami metrycznymi, nazywamy *odwzorowaniem zwężającym*, jeśli istnieje liczba $\alpha \in (0, 1)$ taka, że dla dowolnych punktów $x, x' \in X$ spełniona jest nierówność:

$$\rho(f(x), f(x')) \leqslant \alpha \cdot \varrho(x, x').$$

Punkt $x \in X$ nazywamy *punktem stałym* przekształcenia $f : X \longrightarrow X$, jeśli $f(x) = x$.

Zbiór, który można przedstawić w postaci sumy przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych, nazywamy *zbiorem typu* $F_\sigma$.

Zbiór, który można przedstawić w postaci przekroju przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych, nazywamy *zbiorem typu* $G_\delta$.

Rodzinę zbiorów $\{F_s\}_{s \in S}$ nazywamy *scentrowaną*, jeśli dla każdego skończonego układu wskaźników $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ze zbioru $S$, zbiór $\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i}$ jest niepusty.

## Zadania

**Zadanie 6.1.** (twierdzenie Cantora). Udowodnić, że w przestrzeni metrycznej zupełnej zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych, których średnice tworzą ciąg zbieżny do zera, posiada dokładnie jeden punkt wspólny.

**Zadanie 6.2.** (twierdzenie Cantora). Udowodnić, że przestrzeń metryczna, w której każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych, których średnice tworzą ciąg zbieżny do zera, posiada dokładnie jeden punkt wspólny, jest zupełna.

**Zadanie 6.3.** Udowodnić, że domknięty podzbiór przestrzeni metrycznej zupełnej jest przestrzenią zupełną.

**Zadanie 6.4.** Udowodnić, że zupełna podprzestrzeń przestrzeni metrycznej jest domkniętym podzbiorem tej przestrzeni.

**Zadanie 6.5.** **(twierdzenie Baire'a).** Udowodnić, że w przestrzeni metrycznej zupełnej suma przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych i brzegowych jest zbiorem brzegowym.

**Zadanie 6.6.** Udowodnić, że przestrzeń metryczna zupełna nie jest zbiorem $I$ kategorii.

**Zadanie 6.7.** (twierdzenie Banacha o odwzorowaniach zwężających). Udowodnić, że dla każdego odwzorowania zwężającego przestrzeni metrycznej zupełnej w siebie istnieje dokładnie jeden punkt stały.

**Zadanie 6.8.** Czy przestrzeń liczb rzeczywistych z naturalną metryką jest zupełna?

**Zadanie 6.9.** Czy przestrzeń $\mathsf{R}^n$ z metryką euklidesową jest zupełna?

**Zadanie 6.10.** Niech w zbiorze $X = [0, 1]$ dana będzie metryka

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{jeśli } x, y \in \mathsf{Q} \text{ lub } x, y \in \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}. \\ |x| + |y| & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Czy jest to przestrzeń zupełna?

**Zadanie 6.11.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathsf{R}^2$ z metryką określoną wzorem:

$$\varrho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$

jest zupełna?

**Zadanie 6.12.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathsf{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$

jest zupełna?

**Zadanie 6.13.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathsf{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \min\{1, \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}\} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \; y = (y_1, y_2),$$

jest zupełna?

**Zadanie 6.14.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathbb{R}^2$ z metryką określoną następująco: dla $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ ze zbioru $\mathbb{R}^2$,

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} |x_1 - y_1|, & \text{jeśli} \quad x_2 = y_2, \\ |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2|, & \text{jeśli} \quad x_2 \neq y_2, \end{cases}$$

jest zupełna?

**Zadanie 6.15.** Niech $X$ będzie zbiorem ograniczonych funkcji rzeczywistych określonych na pewnym zbiorze $E$. Niech dla $f, g \in X$

$$\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \; : \; x \in E\}.$$

Czy jest to przestrzeń metryczna zupełna?

**Zadanie 6.16.** Niech $X$ będzie zbiorem ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na pewnym przedziale $[a, b]$. Niech dla $f, g \in X$

$$\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \; : \; x \in [a, b]\}.$$

Czy jest to przestrzeń metryczna zupełna?

**Zadanie 6.17.** Udowodnić, że każda przestrzeń metryczna skończona jest zupełna.

**Zadanie 6.18.** Czy przestrzeń z metryką zero-jedynkową jest przestrzenią zupełną?

**Zadanie 6.19.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathbb{R}^2$ z metryką określoną wzorem:

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad x = y, \\ |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2|, & \text{jeśli} \quad x \neq y, \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ są dowolnymi elementami zbioru $\mathbb{R}^2$, jest zupełna?

**Zadanie 6.20.** Udowodnić, że jeśli $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są przestrzeniami metrycznymi zupełnymi, to $(X, \varrho)$, gdzie $X = X_1 \times X_2$ i

$$\varrho(x, y) = \sqrt{(\varrho_1(x_1, y_1))^2 + (\varrho_2(x_2, y_2)^2} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \; y = (y_1, y_2),$$

jest przestrzenią zupełną.

**Zadanie 6.21.** Udowodnić, że jeśli $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są przestrzeniami metrycznymi zupełnymi, to $(X, \varrho)$, gdzie $X = X_1 \times X_2$ i

$$\varrho(x, y) = \max\{\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2)\} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$

jest przestrzenią zupełną.

**Zadanie 6.22.** Udowodnić, że jeśli $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są przestrzeniami metrycznymi zupełnymi, to $(X, \varrho)$, gdzie $X = X_1 \times X_2$ i

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varrho_1(x_1, y_1) + \varrho_2(x_2, y_2) \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \ \ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2),$$

jest przestrzenią zupełną.

**Zadanie 6.23.** Czy przestrzeń $(X, \varrho)$, gdzie $X = [0, 1]$, natomiast $\varrho$ jest określona następująco:

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{gdy} \quad x - y \in \mathsf{Q}, \\ 2, & \text{gdy} \quad x - y \notin \mathsf{Q}, \end{cases}$$

jest zupełna?

**Zadanie 6.24.** Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich niezdegenerowanych przedziałów domkniętych i ograniczonych w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathsf{R}$. Jeśli $I_1, I_2 \in X$, to zbiór $I_1 \triangle I_2 = (I_1 \setminus I_2) \cup (I_2 \setminus I_1)$ jest pusty, lub jest przedziałem, lub jest sumą dwóch przedziałów niezdegenerowanych (niekoniecznie domkniętych). Niech $\varrho(I_1, I_2)$ równa się długości przedziału, lub sumie długości przedziałów stanowiących różnicę symetryczną $I_1$ i $I_2$, lub zeru, gdy ta różnica jest zbiorem pustym. Czy ta przestrzeń jest zupełna?

**Zadanie 6.25.** Czy przestrzeń $(X, \varrho)$, gdzie $X = [0, \infty)$ i $\varrho$ jest określona wzorem $\varrho(x, y) = |x^2 - y^2|$, jest zupełna?

**Zadanie 6.26.** Czy przestrzeń $(\mathsf{N}, \varrho)$, gdy $\varrho$ jest określona wzorem

$$\varrho(n, m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|,$$

jest zupełna?

**Zadanie 6.27.** Czy przestrzeń $l^p$ dla $p \geqslant 1$ jest zupełna?

**Zadanie 6.28.** Czy przestrzeń $l^\infty$ wszystkich ciągów ograniczonych z metryką $\varrho$, określoną wzorem

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup \{ |x_n - y_n| \, : \, n \in \mathsf{N} \} \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}, \ \ \boldsymbol{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty},$$

jest zupełna?

**Zadanie 6.29.** Czy przestrzeń $(X, \varrho)$ wszystkich ciągów ograniczonych z metryką $\varrho$, określoną wzorem

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}, \ \ \boldsymbol{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty},$$

jest zupełna?

**Zadanie 6.30.** Czy przestrzeń metryczna $s$ wszystkich ciągów liczb rzeczywistych z metryką $\varrho$, określoną wzorem

$$\varrho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\quad \text{dla}\quad x=(x_n)_{n=1}^{\infty},\quad y=(y_n)_{n=1}^{\infty},$$

jest zupełna?

**Zadanie 6.31.** Czy przestrzeń $(X,\varrho)$ wszystkich ciągów ograniczonych z metryką $\varrho$, określoną wzorem

$$\varrho(x,y)=\begin{cases}0, & \text{jeśli}\quad x=y,\\ \frac{1}{n},\ \text{gdzie}\ n=\inf\{m: x_m\neq y_m\}, & \text{jeśli}\quad x\neq y\end{cases}$$

dla $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}$, jest zupełna?

**Zadanie 6.32.** Udowodnić, że jeśli $(X,\varrho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną, to $(X,\varrho^*)$, gdzie

$$\varrho^*(x,y)=\frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)}\quad \text{dla}\ x,y\in X,$$

też jest przestrzenią metryczną zupełną.

**Zadanie 6.33.** Udowodnić, że jeśli $(X,\varrho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną oraz $a\in(0,\infty)$, to $(X,\varrho^*)$, gdzie

$$\varrho^*(x,y)=a\cdot\varrho(x,y)\quad \text{dla}\ x,y\in X,$$

też jest przestrzenią metryczną zupełną.

**Zadanie 6.34.** Udowodnić, że jeśli $(X,\varrho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną, to $(X,\varrho^*)$, gdzie

$$\varrho^*(x,y)=\min\{1,\varrho(x,y)\}\quad \text{dla}\ x,y\in X,$$

też jest przestrzenią metryczną zupełną.

**Zadanie 6.35.** Czy, jeśli $(X,\varrho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną, $x_0$ ustalonym punktem przestrzeni $X$, to $(X,\varrho^*)$, gdzie

$$\varrho^*(x,y)=\begin{cases}0 & \text{dla}\quad x=y,\ \ x,y\in X,\\ \varrho(x,x_0)+\varrho(y,x_0) & \text{dla}\quad x\neq y,\ \ x,y\in X,\end{cases}$$

też jest przestrzenią metryczną zupełną?

**Zadanie 6.36.** Niech $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ będzie funkcją spełniającą następujące warunki:

(1) $f(a)=0 \iff a=0$;

(2) $f$ jest niemalejąca;

(3) $f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$ dla dowolnych liczb $a, b$ ze zbioru $[0, \infty)$.

Czy, jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną, to $(X, \varrho^*)$, gdzie

$$\varrho^*(x, y) = f(\varrho(x, y))$$

dla dowolnych $x, y \in X$, też jest przestrzenią metryczną zupełną?

**Zadanie 6.37.** Pokazać, że założenie zbieżności do zera ciągu średnic zbiorów domkniętych w twierdzeniu Cantora jest istotne.

**Zadanie 6.38.** Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną, $(Y, \rho)$ – dowolną przestrzenią metryczną i $f : X \longrightarrow Y$ – funkcją ciągłą, to dla dowolnego zstępującego ciągu zbiorów domkniętych $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, których średnice tworzą ciąg zbieżny do zera, spełniona jest równość

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n).$$

**Zadanie 6.39.** Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną, rodzina $\{F_t : t \in T\}$ zbiorów domkniętych jest scentrowana i dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje element $t \in T$ taki, że $\delta(F_t) < \varepsilon$, to

$$\bigcap_{t \in T} F_t \neq \emptyset.$$

**Zadanie 6.40.** Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest pewną przestrzenią metryczną i dla każdej rodziny scentrowanej $\{F_t : t \in T\}$ zbiorów domkniętych takich, że dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje element $t \in T$ taki, że $\delta(F_t) < \varepsilon$, jej przekrój jest niepusty, to $(X, \varrho)$ jest przestrzenią zupełną.

**Zadanie 6.41.** Udowodnić, że każdy podzbiór $I$ kategorii przestrzeni metrycznej zupełnej jest zbiorem brzegowym. Podać przykład, że założenie zupełności jest istotne.

**Zadanie 6.42.** Udowodnić, że każda w sobie gęsta przestrzeń metryczna zupełna jest nieprzeliczalna.

**Zadanie 6.43.** Udowodnić, że w każdej przestrzeni metrycznej zupełnej zbiór doskonały jest nieprzeliczalny.

**Zadanie 6.44.** Udowodnić, że w przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką zbiór liczb wymiernych jest zbiorem typu $F_\sigma$, ale nie jest zbiorem typu $G_\delta$ oraz zbiór liczb niewymiernych jest typu $G_\delta$, ale nie $F_\sigma$.

**Zadanie 6.45.** Udowodnić, że każdy niepusty zbiór otwarty w przestrzeni metrycznej zupełnej jest zbiorem $II$ kategorii.

**Zadanie 6.46.** Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną zupełną, to dla dowolnego ciągu podzbiorów $(A_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\overline{X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cap \overline{X \setminus \overline{A_n}}\right)} = X.$$

**Zadanie 6.47.** Niech $X$ będzie zbiorem postaci $\left\{1, \frac{1}{2}, \ldots\right\}$ i $X_0 = X \cup \{0\}$. W zbiorach tych rozważamy naturalną metrykę. Niech teraz $(Y, \rho)$ będzie pewną przestrzenią metryczną. Udowodnić, że przestrzeń $(Y, \rho)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji $f : X \longrightarrow Y$ jednostajnie ciągłej istnieje funkcja ciągła $g : X_0 \longrightarrow Y$ taka, że $g_{|X} = f$.

**Zadanie 6.48.** Udowodnić, że przekrój przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych i gęstych w przestrzeni zupełnej jest zbiorem gęstym.

**Zadanie 6.49.** Podać przykład przestrzeni zupełnej, nie będącej przestrzenią dyskretną, w której istnieje ciąg ograniczony nie posiadający podciągu zbieżnego.

**Zadanie 6.50.** Udowodnić, że dla każdej przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ istnieje przestrzeń metryczna zupełna $(Y, \rho)$ taka, że $X$ jest zbiorem homeomorficznym z pewnym gęstym podzbiorem $Y_1$ zbioru $Y$.

# Rozdział 7

# Przestrzenie zwarte

Przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ nazywamy *zwartą*, jeśli każdy ciąg elementów tej przestrzeni ma podciąg zbieżny. Podzbiór przestrzeni metrycznej nazywamy zwartym, jeśli traktowany jako podprzestrzeń jest podprzestrzenią zwartą.

## Zadania

**Zadanie 7.1.** Udowodnić, że każda przestrzeń zwarta jest zupełna.

**Zadanie 7.2.** (twierdzenie Cantora). Udowodnić, że zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych w przestrzeni metrycznej zwartej ma niepusty przekrój.

**Zadanie 7.3.** Udowodnić, że w każdej przestrzeni metrycznej zwartej $(X, \varrho)$ dla każdej dodatniej liczby $r$ istnieje skończony zbiór punktów $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o tej własności, że

$$\bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, r) = X.$$

Taki zbiór nazywamy $r$-siecią. Udowodnić ponadto, że każda przestrzeń metryczna zwarta jest ograniczona.

**Zadanie 7.4.** Udowodnić, że każda zwarta przestrzeń metryczna jest ośrodkowa.

**Zadanie 7.5.** (twierdzenie Borela). Udowodnić, że w zwartej przestrzeni metrycznej każde przeliczalne pokrycie otwarte posiada podpokrycie skończone.

**Zadanie 7.6.** (twierdzenie Borela-Lebesgue'a). Udowodnić, że w zwartej przestrzeni metrycznej każde pokrycie otwarte posiada podpokrycie skończone.

**Zadanie 7.7.** (twierdzenie odwrotne do twierdzenie Borela-Lebesgue'a). Udowodnić, że jeśli w przestrzeni metrycznej każde pokrycie otwarte posiada podpokrycie skończone, to przestrzeń ta jest zwarta.

**Zadanie 7.8.** (twierdzenie odwrotne do twierdzenie Cantora). Udowodnić, że jeśli w przestrzeni metrycznej każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych ma przekrój niepusty, to przestrzeń ta jest zwarta.

**Zadanie 7.9.** Udowodnić, że każdy domknięty podzbiór przestrzeni metrycznej zwartej jest zwarty.

**Zadanie 7.10.** Udowodnić, że każdy zbiór zwarty w przestrzeni metrycznej jest podzbiorem domkniętym tej przestrzeni.

**Zadanie 7.11.** Udowodnić, że każda przestrzeń metryczna zwarta jest ograniczona.

**Zadanie 7.12.** Udowodnić, że obraz zwartej przestrzeni metrycznej wyznaczony przez funkcję ciągłą, przekształcającą tę przestrzeń w przestrzeń metryczną, jest zwarty.

**Zadanie 7.13.** Udowodnić, że każda rzeczywista funkcja ciągła na przestrzeni metrycznej zwartej jest ograniczona.

**Zadanie 7.14.** (twierdzenie Heinego). Udowodnić, że każda funkcja ciągła przekształcająca zwartą przestrzeń metryczną w przestrzeń metryczną jest jednostajnie ciągła.

**Zadanie 7.15.** Czy przestrzeń liczb rzeczywistych z naturalną metryką jest zwarta? Jakie podzbiory tej przestrzeni są zwarte?

**Zadanie 7.16.** Niech w zbiorze $X = [0,1]$ dana będzie metryka

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{jeśli } x,y \in \mathrm{Q} \text{ lub } x,y \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}, \\ |x|+|y| & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Czy jest to przestrzeń zwarta?

**Zadanie 7.17.** Czy przestrzeń $\mathrm{R}^n$ z metryką euklidesową jest zwarta? Jakie podzbiory tej przestrzeni są zwarte?

**Zadanie 7.18.** Czy przestrzeń metryczna $(X,\varrho)$, gdzie $X = \mathrm{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \; y = (y_1, y_2),$$

jest zwarta? Jakie podzbiory tej przestrzeni są zwarte?

**Zadanie 7.19.** Czy przestrzeń metryczna $(X,\varrho)$, gdzie $X = \mathrm{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2), \; y = (y_1, y_2),$$

jest zwarta? Jakie podzbiory tej przestrzeni są zwarte?

**Zadanie 7.20.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathbb{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \min\{1, \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}\} \quad \text{dla} \quad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),$$

jest zwarta? Jakie podzbiory tej przestrzeni są zwarte?

**Zadanie 7.21.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathbb{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad x = y, \\ |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2|, & \text{jeśli} \quad x \neq y, \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ są dowolnymi elementami zbioru $\mathbb{R}^2$, jest zwarta?

**Zadanie 7.22.** Niech $X$ będzie zbiorem ograniczonych funkcji rzeczywistych określonych na pewnym zbiorze $E$. Niech dla $f, g \in X$

$$\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in E\}.$$

Czy jest to przestrzeń metryczna zwarta?

**Zadanie 7.23.** Niech $X$ będzie zbiorem ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na pewnym przedziale $[a, b]$. Niech dla $f, g \in X$

$$\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

Czy jest to przestrzeń metryczna zwarta?

**Zadanie 7.24.** Udowodnić, że jeśli w przestrzeni $(X, \varrho)$ istnieją: ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i liczba dodatnia $\alpha$ takie, że $\varrho(x_n, x_m) > \alpha$ dla $n \neq m$, to przestrzeń ta nie jest zwarta.

**Zadanie 7.25.** Udowodnić, że każda przestrzeń metryczna skończona jest zwarta.

**Zadanie 7.26.** Kiedy przestrzeń metryczna z metryką zero-jedynkową jest zwarta? Jakie podzbiory tej przestrzeni są zwarte?

**Zadanie 7.27.** Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich niezdegenerowanych przedziałów domkniętych i ograniczonych w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Niech $\varrho(I_1, I_2)$ równa się długości przedziału lub sumie długości przedziałów stanowiących różnicę symetryczną $I_1$ i $I_2$ lub zerem, gdy ta różnica jest zbiorem pustym.

Czy przestrzeń ta jest zwarta?

**Zadanie 7.28.** Czy przestrzeń $l^p$ jest zwarta?

**Zadanie 7.29.** Czy przestrzeń $\mathbb{N}$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(n, m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$

jest zwarta?

**Zadanie 7.30.** Czy przestrzeń liczb dodatnich z metryką

$$\varrho(x,y) = |x^2 - y^2|$$

jest przestrzenią zwartą?

**Zadanie 7.31.** Czy przestrzeń ograniczonych ciągów liczb rzeczywistych z metryką

$$\varrho(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{dla} \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, \; y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$$

jest zwarta?

**Zadanie 7.32.** Czy przestrzeń ciągów liczb rzeczywistych z metryką

$$\varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \quad \text{dla} \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$$

jest przestrzenią zwartą?

**Zadanie 7.33.** Czy przestrzeń $[0,1]$ z metryką

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{gdy} \quad x - y \in \mathbb{Q}, \\ |x| + |y|, & \text{gdy} \quad x - y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

jest zwarta?

**Zadanie 7.34.** Niech $(X,\varrho)$ będzie przestrzenią metryczną zwartą. W zbiorze $X$ określamy metrykę następująco:

$$\varrho^*(x,y) = \frac{\varrho(x,y)}{1 + \varrho(x,y)} \quad \text{dla} \quad x, y \in X.$$

Udowodnić, że przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest zwarta.

**Zadanie 7.35.** Niech $(X,\varrho)$ będzie przestrzenią metryczną zwartą. W zbiorze $X$ określamy metrykę następująco:

$$\varrho^*(x,y) = a \cdot \varrho(x,y) \quad \text{dla} \quad x, y \in X.$$

Udowodnić, że przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest zwarta.

**Zadanie 7.36.** Niech $(X,\varrho)$ będzie przestrzenią metryczną zwartą. W zbiorze $X$ określamy metrykę następująco:

$$\varrho^*(x,y) = \min\{1, \varrho(x,y)\} \quad \text{dla} \quad x, y \in X.$$

Udowodnić, że przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest zwarta.

**Zadanie 7.37.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną zwartą. W zbiorze $X$ określamy metrykę następująco: ustalmy punkt $x_0 \in X$, wówczas

$$\varrho^*(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x = y, \ x, y \in X, \\ \varrho(x, x_0) + \varrho(y, x_0), & \text{gdy} \quad x \neq y, \ x, y \in X. \end{cases}$$

Czy przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest zwarta?

**Zadanie 7.38.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną zwartą.
Niech $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją spełniającą następujące warunki:

(1) $f(a) = 0 \iff a = 0$;

(2) $f$ jest niemalejąca;

(3) $f(a + b) \leqslant f(a) + f(b)$ dla dowolnych liczb $a, b$ ze zbioru $[0, \infty)$.

W zbiorze $X$ określamy metrykę następująco:

$$\varrho^*(x, y) = f(\varrho(x, y)) \quad \text{dla} \quad x, y \in X.$$

Czy przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest zwarta?

**Zadanie 7.39.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi. W zbiorze $X = X_1 \times X_2$ określmy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \varrho_2^2(x_2, y_2)} \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2).$$

Udowodnić, że obie przestrzenie $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń $(X, \varrho)$ jest zwarta.

**Zadanie 7.40.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi. W zbiorze $X = X_1 \times X_2$ określmy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varrho_1(x_1, y_1) + \varrho_2(x_2, y_2) \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \ \boldsymbol{x} = (y_1, y_2).$$

Udowodnić, że obie przestrzenie $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy również przestrzeń $(X, \varrho)$ jest zwarta.

**Zadanie 7.41.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi. W zbiorze $X = X_1 \times X_2$ określmy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2)\} \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \ \boldsymbol{x} = (y_1, y_2).$$

Udowodnić, że obie przestrzenie $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy również przestrzeń $(X, \varrho)$ jest zwarta.

**Zadanie 7.42.** Dowieść, że w przestrzeni metrycznej zwartej każda rodzina scentrowana zbiorów domkniętych ma niepusty przekrój.

**Zadanie 7.43.** Dowieść, że przestrzeń metryczna jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każdy nieskończony podzbiór tej przestrzeni ma niepustą pochodną.

**Zadanie 7.44.** Dowieść, że przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest zupełna i dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje skończony układ zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ taki, że

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{oraz} \quad \delta(A_i) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

**Zadanie 7.45.** Dowieść, że jeśli przestrzeń metryczna jest zwarta, to rodzina zbiorów, które są jednocześnie otwarte i domknięte, jest co najwyżej przeliczalna.

**Zadanie 7.46.** Dowieść, że jeśli przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ jest zwarta, $A, B \subset X$ są rozłącznymi zbiorami domkniętymi i niepustymi, to $\varrho(A, B) > 0$.

**Zadanie 7.47.** Dowieść, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną zwartą i $(Y, \rho)$ jest przestrzenią metryczną, $f : X \longrightarrow Y$ – funkcją ciągłą oraz $F$ jest podzbiorem domkniętym w przestrzeni $X$, to zbiór $f(F)$ jest domknięty (w przestrzeni Y, oczywiście).

**Zadanie 7.48.** Dowieść, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną zwartą i $(Y, \rho)$ jest przestrzenią metryczną, $f : X \longrightarrow Y$ – funkcją ciągłą i różnowartościową, to jest homeomorfizmem.

**Zadanie 7.49.** (twierdzenie Weierstrassa). Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną zwartą i $f : X \longrightarrow \mathrm{R}$ - funkcją ciągłą, to $f$ jest funkcją ograniczoną i istnieją punkty $x_1, x_2 \in X$ takie, że

$$f(x_1) = \inf\{f(x) \ : \ x \in X\}, \quad f(x_2) = \sup\{f(x) \ : \ x \in X\}.$$

**Zadanie 7.50.** Udowodnić, że w każdej przestrzeni metrycznej, która nie jest zwarta, można określić rzeczywistą funkcję ciągłą i ograniczoną, która nie przyjmuje swojego kresu górnego.

**Zadanie 7.51.** Dowieść, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną zwartą i $(Y, \rho)$ jest przestrzenią metryczną, to ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji ciągłych $f_n : X \longrightarrow Y$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f : X \longrightarrow Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $x \in X$ i dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ze zbieżności

$$x_n \longrightarrow x$$

wynika zbieżność

$$f_n(x_n) \longrightarrow f(x).$$

**Zadanie 7.52.** Dowieść, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną zwartą, $(Y, \rho)$ – przestrzenią metryczną, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – ciągiem zstępującym zbiorów domkniętych oraz $f : X \longrightarrow Y$ jest funkcją ciągłą, to

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n).$$

**Zadanie 7.53.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi i niech $X$ będzie iloczynem kartezjańskim zbiorów $X_1$ i $X_2$. Niech ponadto funkcja $f$ przekształca zbiór $X_1$ w zbiór $X_2$. Udowodnić, że jeśli przestrzeń $(X_2, \varrho_2)$ jest przestrzenią zwartą, to funkcja $f$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór

$$\{(x_1, x_2) \in X : x_2 = f(x_1)\}$$

jest domknięty w przestrzeni $(X, \varrho)$, gdzie metryka $\varrho$ jest określona jednym ze wzorów:

(1) $\varrho(x, y) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \varrho_2^2(x_2, y_2)}$ dla $x = (x_1, x_2), x = (y_1, y_2)$ ze zbioru $X$;

(2) $\varrho(x, y) = \varrho_1(x_1, y_1) + \varrho_2(x_2, y_2)$ dla $x = (x_1, x_2), x = (y_1, y_2)$ ze zbioru $X$;

(3) $\varrho(x, y) = \max\{\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2)\}$ dla $x = (x_1, x_2), x = (y_1, y_2)$ ze zbioru $X$.

**Zadanie 7.54.** Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną zwartą, $A \subset X$ – właściwym podzbiorem zbioru $X$, to nie istnieje żadna izometria przekształcająca zbiór $X$ na zbiór $A$.

**Zadanie 7.55.** Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną zwartą, $A$ – niepustym podzbiorem domkniętym zbioru $X$, $x_0$ – ustalonym elementem zbioru $X$, to istnieje $x \in A$ taki, że

$$\varrho(A, x_0) = \varrho(x, x_0).$$

Czy taki element jest tylko jeden?

**Zadanie 7.56.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną, zbiory $A$ i $B$ podzbiorami zwartymi i $B \subset A$. Dowieść, że jeśli $G = A \setminus B$ jest niepustym zbiorem otwartym, to

(1) $\overline{G} \setminus \mathrm{Fr}(G) = G$;

(2) $A = \overline{G} \cup B$;

(3) $\mathrm{Fr}(G) = \overline{G} \cap B$.

**Zadanie 7.57.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną zupełną, $G_n$ – sumą skończonej liczby kul o promieniu nie większym niż $r_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Udowodnić, że jeśli $r_n \longrightarrow 0$, to zbiór

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$$

jest zbiorem zwartym.

**Zadanie 7.58.** Niech $(X,\varrho)$ będzie przestrzenią metryczną, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – zstępującym ciągiem zbiorów domkniętych i niepustych. Udowodnić, że jeśli jeden ze zbiorów $A_n$ jest zwarty, to

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset .$$

**Zadanie 7.59.** Udowodnić, że na płaszczyźnie euklidesowej dla dowolnego trójkąta istnieje taki punkt, że suma odległości tego punktu od wierzchołków trójkąta jest minimalna.

**Zadanie 7.60.** Niech $I = [0,1]$. Przedział ten dzielimy punktami $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ na trzy podprzedziały i oznaczamy je:

$$K_1^{(1)} = \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad K_2^{(1)} = \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad I_1^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Niech

$$F_1 = I \setminus I_1^1 .$$

W każdym z przedziałów $K_1^{(1)}$, $K_2^{(1)}$ postępujemy podobnie i przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$K_1^{(2)} = \left[0, \frac{1}{9}\right], \quad K_2^{(2)} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \quad K_3^{(2)} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \quad K_4^{(2)} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

oraz

$$I_1^{(2)} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \quad I_2^{(2)} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right).$$

Niech teraz

$$F_2 = F_1 \setminus (I_1^2 \cup I_2^2) .$$

W przedziałach składających się na zbiór $F_2$ (są cztery takie przedziały) prowadzimy tę samą konstrukcję jak poprzednio.

Postępując według tego schematu dalej, otrzymamy rodziny przedziałów

$$\left\{K_j^{(n)} : j = 1, \ldots, 2^n, \ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{I_l^{(n)} : l = 1, \ldots, 2^{n-1}, \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

spełniające następujące warunki:

$$K_j^{(n)} \cap K_{j'}^{(n')} = \emptyset \quad \text{dla} \quad (j,n) \neq (j',n'), \ j = 1, \ldots, 2^n, \ j' = 1, \ldots, 2^{n'}, \ n, n' \in \mathbb{N},$$

$$I_j^{(n)} \cap I_{j'}^{(n')} = \emptyset \quad \text{dla} \quad (j,n) \neq (j',n'), \ j = 1, \ldots, 2^{n-1}, \ j' = 1, \ldots, 2^{n'-1}, \ n, n' \in \mathbb{N},$$

$$\delta\left(K_j^{(n)}\right) = \frac{1}{3^n} = \delta\left(I_i^{(n)}\right) \quad \text{dla} \ j = 1, \ldots, 2^n, \ i = 1, \ldots, 2^{n-1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Określając teraz

$$F_n = F_{n-1} \setminus \bigcup_{j=1}^{2^n} K_j^{(n)} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

otrzymujemy ciąg zbiorów $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ o następujących własnościach:

(1) $F_n$ jest zbiorem domkniętym;

(2) $F_n$ jest zbiorem niepustym;

(3) $F_{n+1} \subset F_n$.

Udowodnić, że zbiór

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

jest zbiorem niepustym, domkniętym, nigdzie gęstym i w sobie gęstym. Zbiór ten nazywa się *zbiorem Cantora.*

**Zadanie 7.61.** Dowieść, że zbiór Cantora jest nieprzeliczalny w każdym przedziale otwartym mającym choć jeden punkt wspólny ze zbiorem Cantora.

**Zadanie 7.62.** Niech $E$ będzie kwadratem $[0,1] \times [0,1]$. Kwadrat ten podzielmy na 9 przystających kwadratów i wybierzmy środkowy; jego wnętrze oznaczmy przez $I_1^1$. Niech teraz $F_1 = E \setminus I_1^1$. Zbiór ten składa się z ośmiu kwadratów nie zachodzących na siebie. W każdym z nich wybieramy koncentryczny kwadrat o boku $\frac{1}{9}$, oznaczamy je $I_1^2, I_2^2, \ldots, I_8^2$, odpowiednio. Teraz niech

$$F_2 = F_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{8} I_k^2.$$

W kwadratach składających się na zbiór $F_2$ prowadzimy tę samą konstrukcję jak poprzednio. Postępując tak dalej, otrzymamy ciąg zbiorów $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ o następujących własnościach:

(1) $F_n$ jest zbiorem domkniętym;

(2) $F_n$ jest zbiorem niepustym;

(3) $F_{n+1} \subset F_n$.

Udowodnić, że zbiór $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jest zbiorem niepustym, domkniętym, nigdzie gęstym i w sobie gęstym. Zbiór ten nazywa się *dywanem Sierpińskiego.*

**Zadanie 7.63.** Dowieść, że dywan Sierpińskiego jest nieprzeliczalny w każdej kuli mającej choć jeden punkt wspólny z dywanem Sierpińskiego.

**Zadanie 7.64.** Niech $K_0$ będzie przedziałem $[0,1]$. Przedział ten dzielimy punktami $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ na trzy podprzedziały i oznaczamy je:

$$K_1^{(1)} = \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad K_2^{(1)} = \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad I_1^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

W każdym z przedziałów $K_1^{(1)}$, $K_2^{(1)}$ postępujemy podobnie i przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$K_1^{(2)} = \left[0, \frac{1}{9}\right], \quad K_2^{(2)} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \quad K_3^{(2)} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \quad K_4^{(2)} = \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

oraz

$$I_1^{(2)} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \quad I_2^{(2)} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right).$$

W trzecim kroku postępujemy podobnie, tzn. każdy przedział $K_l^{(k)}$ dzielimy na trzy części w podobny sposób i wprowadzamy oznaczenia:

$$K_1^{(3)} = \left[0, \frac{1}{3^3}\right], \quad K_2^{(3)} = \left[\frac{2}{3^3}, \frac{3}{3^3}\right], \quad I_1^{(3)} = \left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right),$$

$$K_3^{(3)} = \left[\frac{6}{3^3}, \frac{7}{3^3}\right], \quad K_4^{(3)} = \left[\frac{8}{3^3}, \frac{9}{3^3}\right], \quad I_2^{(3)} = \left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right),$$

$$K_5^{(3)} = \left[\frac{18}{3^3}, \frac{19}{3^3}\right], \quad K_6^{(3)} = \left[\frac{20}{3^3}, \frac{21}{3^3}\right], \quad I_3^{(3)} = \left(\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right),$$

$$K_7^{(3)} = \left[\frac{24}{3^3}, \frac{25}{3^3}\right], \quad K_8^{(3)} = \left[\frac{26}{3^3}, 1\right], \quad I_4^{(3)} = \left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}\right).$$

Postępując według tego schematu dalej, otrzymamy zbiory przedziałów

$$\left\{K_j^{(n)} : j = 1, \ldots, 2^n, \ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{I_l^{(n)} : l = 1, \ldots, 2^{n-1}, \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

spełniające następujące warunki:

$$K_j^{(n)} \cap K_{j'}^{(n')} = \emptyset \quad \text{dla} \quad (j,n) \neq (j',n'), \ j = 1, \ldots, 2^n, \ j' = 1, \ldots, 2^{n'}, \ n, n' \in \mathbb{N},$$

$$I_j^{(n)} \cap I_{j'}^{(n')} = \emptyset \quad \text{dla} \quad (j,n) \neq (j',n'), \ j = 1, \ldots, 2^{n-1}, \ j' = 1, \ldots, 2^{n'-1}, \ n, n' \in \mathbb{N},$$

$$\delta\left(K_j^{(n)}\right) = \frac{1}{3^n} = \delta\left(I_i^{(n)}\right) \quad \text{dla} \quad j = 1, \ldots, 2^n, \ i = 1, \ldots, 2^{n-1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Określmy teraz zbiory

$$\Phi_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} \left\{K_j^{(n)} \times \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]\right\} \cup \bigcup_{l=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{2^{l-1}} \left\{\overline{I_i^{(l)}} \times \left\{\frac{2i-1}{2^l}\right\}\right\} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Udowodnić, że zbiór $\varphi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ jest niemalejącą funkcją ciągłą przekształcającą przedział $[0, 1]$ na siebie. Funkcja ta nosi nazwę *funkcji Cantora*.

**Zadanie 7.65.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną zwartą, $(Y, \rho)$ – dowolną przestrzenią metryczną. Jeśli ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji ciągłych, gdzie $f_n : X \longrightarrow Y$, jest (punktowo) zbieżny do funkcji ciągłej $f : X \longrightarrow Y$, to ciąg ten jest quasi-jednostajnie zbieżny do funkcji $f$.

# Rozdział 8

# Przestrzenie spójne

Przestrzeń metryczną nazywamy *spójną*, jeśli nie istnieją dwa niepuste zbiory otwarte i rozłączne, których sumą jest cała przestrzeń.

Zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej nazywamy *spójnym*, jeśli stanowi podprzestrzeń spójną.

Zbiory $A$ i $B$ w przestrzeni metrycznej nazywamy *rozgraniczonymi*, jeśli

$$\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}.$$

Największy zbiór spójny zawierający dany punkt przestrzeni metrycznej nazywamy *składową* tego punktu w danej przestrzeni. Niebawem okaże się, że taki zbiór zawsze istnieje. Każdą składową punktu danej przestrzeni nazywamy też *składową przestrzeni.*

Zbiorem *otwarto-domkniętym* nazywamy każdy zbiór, który jest otwarty i domknięty.

*Quasi-składową punktu $x$* w przestrzeni metrycznej nazywamy przekrój wszystkich zbiorów otwarto-domkniętych zawierających punkt $x$.

Przestrzeń metryczną, która jest jednocześnie zwarta i spójna nazywamy *continuum.*

## Zadania

**Zadanie 8.1.** Udowodnić, że przestrzeń metryczna jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieją dwa niepuste i rozłączne zbiory domknięte, których suma jest całą przestrzenią.

**Zadanie 8.2.** Udowodnić, że przestrzeń metryczna jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje niepusty właściwy podzbiór otwarty i domknięty w tej przestrzeni.

**Zadanie 8.3.** Udowodnić, że przestrzeń metryczna jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieją dwa niepuste zbiory rozgraniczone, których suma jest całą przestrzenią.

**Zadanie 8.4.** Udowodnić, że niejednoelementowa przestrzeń metryczną spójna nie posiada punktów izolowanych.

**Zadanie 8.5.** Udowodnić, że obraz ciągły przestrzeni metrycznej spójnej jest spójny.

**Zadanie 8.6.** Udowodnić, że przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej funkcji ciągłej $f : X \longrightarrow Y$, gdzie $(Y, \rho)$ jest przestrzenią metryczną zawierającą co najmniej dwa punkty, obraz zbioru $X$ wyznaczony przez funkcję $f$ jest spójny.

**Zadanie 8.7.** Udowodnić, że jeśli zbiór spójny jest zawarty w sumie dwóch zbiorów rozgraniczonych, to jest podzbiorem jednego z nich.

**Zadanie 8.8.** Niech $\{C_s\}_{s\in S}$ będzie rodziną złożoną ze zbiorów spójnych. Udowodnić, że jeśli istnieje wskaźnik $s_0 \in S$ taki, że $C_s \cap C_{s_0} \neq \emptyset$ dla każdego $s \in S$, to zbiór $\bigcup_{s\in S} C_s$ jest spójny.

**Zadanie 8.9.** Niech $A$ będzie zbiorem spójnym. Udowodnić, że jeśli zbiór $C$ spełnia inkluzję $A \subset C \subset \overline{A}$, to jest spójny.

**Zadanie 8.10.** Udowodnić, że przestrzeń metryczna jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych dwóch jej punktów istnieje zbiór spójny zawierający te punkty.

**Zadanie 8.11.** Udowodnić, że przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otwartego pokrycia $\{U_s\}_{s\in S}$ przestrzeni $X$ i dla każdych dwóch punktów $x$ i $y$ z tej przestrzeni istnieje skończony układ wskaźników $s_0, s_1, \ldots, s_n \in S$ taki, że

$$x \in U_{s_0}, \quad y \in U_{s_n} \quad \text{i} \quad U_{s_i} \cap U_{s_j} \neq \emptyset \iff |i-j| \leqslant 1.$$

**Zadanie 8.12.** Udowodnić, że jeśli przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ jest spójna, to dla każdych dwóch punktów $x, y \in X$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony ciąg punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ taki, że

$$x = x_0, \quad y = x_n, \quad \text{i} \quad \varrho(x_{i+1}, x_i) < \varepsilon.$$

**Zadanie 8.13.** Udowodnić, że dla każdego punktu w przestrzeni metrycznej istnieje niepusta składowa i niepusta quasi-składowa tego punktu.

**Zadanie 8.14.** Udowodnić, że każdy punkt należący do składowej punktu $x$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ ma tę samą składową co punkt $x$.

**Zadanie 8.15.** Udowodnić, że każde dwie składowe punktów w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ są identyczne albo rozłączne.

**Zadanie 8.16.** Udowodnić, że w przestrzeni metrycznej składowa każdego punktu jest podzbiorem quasi-składowej tego punktu.

**Zadanie 8.17.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną spójną i $A$ jej spójnym podzbiorem. Udowodnić, że jeśli $X \setminus A = U \cup V$, gdzie zbiory $U, V$ są niepuste i rozgraniczone, to zbiory $A \cup U$ i $A \cup V$ są spójne.

**Zadanie 8.18.** Udowodnić, że przekrój zstępującego ciągu zbiorów będących continuum jest też continuum.

**Zadanie 8.19.** Czy przestrzeń liczb rzeczywistych z naturalną metryką jest spójna?

**Zadanie 8.20.** Udowodnić, że podzbiór $A$ przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb $a, b \in A$ takich, że $a < b$ każda liczba $c \in (a, b)$ należy do zbioru $A$.

**Zadanie 8.21.** Opisać wszystkie zbiory spójne w przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką.

**Zadanie 8.22.** Udowodnić, że zbiór otwarty w przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką jest przeliczalną sumą składowych, które są przedziałami otwartymi.

**Zadanie 8.23.** Udowodnić, że każda przestrzeń metryczna spójna jest jednoelementowa lub ma moc nie mniejszą niż continuum.

**Zadanie 8.24.** Udowodnić, że jeśli zbiór $A \subset \mathsf{R}$ jest regularnie otwarty, to dla dowolnych składowych $(a, b)$ i $(c, d)$ zbioru $A$ spełniona jest nierówność

$$\varrho((a, b), (c, d)) > 0.$$

**Zadanie 8.25.** Pokazać, że zbiór $\mathsf{R}^n$ z funkcją $\varrho$ określoną wzorem

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad \text{gdzie} \quad x = (x_1, \cdots, x_n), \ y = (y_1, \cdots, y_n)$$

są dowolnymi elementami zbioru $\mathsf{R}^n$, jest przestrzenią metryczną spójną.

**Zadanie 8.26.** Udowodnić, że zbiór $E$ powstały z $\mathsf{R}^2$ przez usunięcie co najwyżej przeliczalnej liczby punktów jest spójny w metryce euklidesowej.

**Zadanie 8.27.** Udowodnić, że niepusty zbiór otwarty $G$ w przestrzeni euklidesowej $\mathsf{R}^2$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych dwóch punktów zbioru $G$ istnieje łamana o końcach w tych punktach i zawarta w zbiorze $G$.

**Zadanie 8.28.** Udowodnić, że wykres funkcji ciągłej $f : (a, b) \longrightarrow \mathsf{R}$ ($f : \mathsf{R} \longrightarrow \mathsf{R}$) jest zbiorem spójnym w $\mathsf{R}^2$. (Oczywiście w $\mathsf{R}$ i $\mathsf{R}^2$ rozważamy metrykę euklidesową.)

**Zadanie 8.29.** Udowodnić, że następujące podzbiory przestrzeni $\mathsf{R}^2$ z naturalną metryką są spójne:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathsf{R}^2 \ : \ y = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \ x \neq 0\right\} \cup \{(0, a)\} \quad \text{dla} \quad a \in [-1, 1].$$

$$B = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 \ : \ y = nx, n \in \mathsf{N}\} \cup \{(0, a)\} \quad \text{dla} \quad a \in \mathsf{R},$$

$$C = \bigcup_{n \in \mathsf{N}} \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 \ : \ ny = x^2\} \cup \{(a, 0)\} \quad \text{dla} \quad a \in \mathsf{R}.$$

**Zadanie 8.30.** Udowodnić, że okrąg jest przestrzenią spójną.

**Zadanie 8.31.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathsf{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2),$$

jest spójna?

**Zadanie 8.32.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathsf{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2),$$

jest spójna?

**Zadanie 8.33.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathsf{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \min\{1, \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}\} \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2),$$

jest spójna?

**Zadanie 8.34.** Czy przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathsf{R}^2$ z metryką określoną wzorem

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, \\ |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2|, & \text{jeśli} \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ są dowolnymi elementami zbioru $\mathsf{R}^2$, jest spójna?

**Zadanie 8.35.** Czy przestrzeń $(X, \varrho)$ funkcji rzeczywistych ograniczonych określonych na zbiorze $E$ z metryką

$$\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \ : \ x \in E\}$$

jest przestrzenią spójną?

**Zadanie 8.36.** Czy przestrzeń $l^p$ jest spójna?

**Zadanie 8.37.** Czy przestrzeń $(X, \varrho)$, gdzie $X = \mathbb{N}$ i funkcja $\varrho$ jest dana wzorem:

$$\varrho(n, m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$

jest spójna?

**Zadanie 8.38.** Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich niezdegenerowanych przedziałów domkniętych i ograniczonych w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Niech $\varrho(I_1, I_2)$ równa się długości przedziału, lub sumie długości przedziałów stanowiących różnicę symetryczną $I_1$ i $I_2$, lub zerem, gdy ta różnica jest zbiorem pustym. Czy przestrzeń ta jest spójna?

**Zadanie 8.39.** Czy przestrzeń ograniczonych ciągów liczb rzeczywistych z metryką

$$\varrho(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{dla } x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$$

jest spójna?

**Zadanie 8.40.** Czy przestrzeń ciągów liczb rzeczywistych z metryką

$$\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \quad \text{dla } x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$$

jest spójna?

**Zadanie 8.41.** Czy przestrzeń $[0, 1]$ z metryką

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{gdy } x - y \in \mathbb{Q}, \\ 2, & \text{gdy } x - y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

jest spójna?

**Zadanie 8.42.** Udowodnić, że przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje zbiór $A \subset X$ taki, że

$$\emptyset \neq A \neq X \quad \text{oraz} \quad \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \emptyset.$$

**Zadanie 8.43.** Udowodnić, że jeśli zbiory $A$ i $B$ są rozgraniczone oraz $C \subset A$, $D \subset B$, to również zbiory $C$ i $D$ są rozgraniczone.

**Zadanie 8.44.** Udowodnić, że jeśli zbiory $A$ i $B$ są rozgraniczone oraz $A$ i $C$ są rozgraniczone, to zbiory $A$ i $B \cup C$ są też rozgraniczone.

**Zadanie 8.45.** Udowodnić, że jeśli zbiory $A$ i $B$ są otwarte, to zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$ są rozgraniczone.

**Zadanie 8.46.** Udowodnić, że jeśli zbiory $A$ i $B$ są domknięte, to zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$ są rozgraniczone.

**Zadanie 8.47.** Udowodnić, że suma dwóch zbiorów spójnych i nierozgraniczonych jest zbiorem spójnym.

**Zadanie 8.48.** Niech $\{C_s\}_{s\in S}$ będzie rodziną złożoną ze zbiorów spójnych. Udowodnić, że jeśli istnieje wskaźnik $s_0 \in S$ taki, że zbiory $C_s$ i $C_{s_0}$ nie są rozgraniczone, to zbiór $\bigcup_{s\in S} C_s$ jest spójny.

**Zadanie 8.49.** Udowodnić, że jeśli zbiory $A$ i $B$ są otwarte i zbiory $A \cup B$ i $A \cap B$ są spójne, to zbiory $A$ i $B$ są też spójne.

**Zadanie 8.50.** Udowodnić, że jeśli zbiory $A$ i $B$ są domknięte i zbiory $A \cup B$ i $A \cap B$ są spójne, to zbiory $A$ i $B$ są też spójne.

**Zadanie 8.51.** Udowodnić, że jeśli zbiór $A$ jest spójny oraz dla pewnego zbioru $B$ mamy:

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \setminus B \neq \emptyset,$$

to

$$A \cap \mathrm{Fr}(B) \neq \emptyset.$$

**Zadanie 8.52.** Udowodnić, że jeśli $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną spójną, zbiór $A \subset X$ jest zbiorem spójnym oraz

$$X \setminus A = C \cup D,$$

gdzie zbiory $C$ i $D$ są rozgraniczone, to zbiory

$$A \cup C, \quad A \cup D$$

są spójne.

**Zadanie 8.53.** Udowodnić, że jeśli w przestrzeni metrycznej istnieje podzbiór spójny i gęsty, to przestrzeń ta jest spójna.

**Zadanie 8.54.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną spójną. W zbiorze $X$ określamy metrykę następująco:

$$\varrho^*(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)} \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Udowodnić, że przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest spójna.

**Zadanie 8.55.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną spójną. W zbiorze $X$ określamy metrykę następująco:

$$\varrho^*(x, y) = a \cdot \varrho(x, y) \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Udowodnić, że przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest spójna.

**Zadanie 8.56.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną spójną. W zbiorze $X$ określamy metrykę następująco:

$$\varrho^*(x, y) = \min\{1, \varrho(x, y)\} \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Udowodnić, że przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest spójna.

**Zadanie 8.57.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną spójną. W zbiorze $X$ określamy metrykę następująco: ustalmy punkt $x_0 \in X$, wówczas

$$\varrho^*(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = y, \\ \varrho(x, x_0) + \varrho(y, x_0), & \text{gdy } x \neq y \end{cases}$$

dla $x, y \in X$. Czy przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest spójna?

**Zadanie 8.58.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną spójną.
Niech $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją spełniającą następujące warunki:

(1) $f(a) = 0 \iff a = 0$;

(2) $f$ jest niemalejąca;

(3) $f(a + b) \leqslant f(a) + f(b)$ dla dowolnych liczb $a, b$ ze zbioru $[0, \infty)$.

W zbiorze $X$ określamy metrykę następująco:

$$\varrho^*(x, y) = f(\varrho(x, y))$$

dla $x, y \in X$. Czy przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest spójna?

**Zadanie 8.59.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi. W zbiorze $X = X_1 \times X_2$ określmy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \varrho_2^2(x_2, y_2)} \quad \text{dla } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X.$$

Udowodnić, że przestrzeń $(X, \varrho)$ jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy obie przestrzenie $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są spójne.

**Zadanie 8.60.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi. W zbiorze $X = X_1 \times X_2$ określmy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(x, y) = \varrho_1(x_1, y_1) + \varrho_2(x_2, y_2) \quad \text{dla } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X.$$

Udowodnić, że przestrzeń $(X, \varrho)$ jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy obie przestrzenie $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są spójne.

**Zadanie 8.61.** Niech $(X_1, \varrho_1)$, $(X_2, \varrho_2)$ będą dwiema przestrzeniami metrycznymi. W zbiorze $X = X_1 \times X_2$ określmy funkcję $\varrho$ następująco:

$$\varrho(x, y) = \max\{\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2)\} \quad \text{dla } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X.$$

Udowodnić, że przestrzeń $(X, \varrho)$ jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy obie przestrzenie $(X_1, \varrho_1)$ i $(X_2, \varrho_2)$ są spójne.

**Zadanie 8.62.** Udowodnić, że jeśli $f : \mathsf{R} \longrightarrow \mathsf{R}$ jest funkcją ciągłą, $a, b \in \mathsf{R}$, przy czym $a < b$, to dla każdego $y$ leżącego między $f(a)$ i $f(b)$ istnieje $x \in (a, b)$ taki, że $f(x) = y$.

**Zadanie 8.63.** Niech w przedziale $[0, 1]$ dana będzie naturalna metryka. Udowodnić, że każda funkcja ciągła $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ma punkt stały.

**Zadanie 8.64.** Dowieść, że przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ spójna i zawierająca punkt izolowany jest jednoelementowa.

**Zadanie 8.65.** Niech $A$ i $B$ będą rozłącznymi i niepustymi zbiorami domkniętymi w spójnej przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$. Udowodnić, że istnieje punkt $x \in X$ taki, że $\varrho(x, A) = \varrho(x, B)$.

**Zadanie 8.66.** Czy zbiór $((\mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}) \times \mathsf{Q}) \cup (\mathsf{Q} \times (\mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}))$ jest spójny na płaszczyźnie $\mathsf{R}^2$ z naturalną metryką?

# Część II

# ROZWIĄZANIA

# Rozdział 1

# Funkcje

**Rozwiązanie zadania 1.1.**

$$f(A_1) = [0,1], \;\; f(A_2) = [0,1], \;\; f(A_3) = [0,1], \;\; f(A_4) = \{1\},$$

$$f^{-1}(B_1) = \bigcup_{k\in Z} [2k\pi, (2k+1)\pi], \;\; f^{-1}(B_2) = \bigcup_{k\in Z} [2k\pi, (2k+1)\pi],$$

$$f\left(f^{-1}(B_1)\right) = f\left(\bigcup_{k\in Z} [2k\pi, (2k+1)\pi]\right) = [0,1],$$

$$f\left(f^{-1}(B_2)\right) = f\left(\bigcup_{k\in Z} [2k\pi, (2k+1)\pi]\right) = [0,1],$$

$$f^{-1}\left(f(A_1)\right) = f^{-1}\left([0,1]\right) = \bigcup_{k\in Z} [2k\pi, (2k+1)\pi],$$

$$f^{-1}\left(f(A_2)\right) = f^{-1}\left([0,1]\right) = \bigcup_{k\in Z} [2k\pi, (2k+1)\pi],$$

$$f^{-1}\left(f(A_3)\right) = f^{-1}\left([0,1]\right) = \bigcup_{k\in Z} [2k\pi, (2k+1)\pi],$$

$$f^{-1}\left(f(A_4)\right) = f^{-1}\left(\{1\}\right) = \bigcup_{k\in Z} \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,:\, k \in Z\right\},$$

$$f(A_1 \setminus A_2) = f\left(\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) = [0,1),$$

$$f(A_2 \cap A_3) = f\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) = \{1\}.$$

**Rozwiązanie zadania 1.2.**

Dla $y \in f(A_1 \cup A_2)$ istnieje $x \in A_1 \cup A_2$ takie, że $y = f(x)$. Ponieważ $x \in A_1$ lub $x \in A_2$, więc $y \in f(A_1)$ lub $y \in f(A_2)$, co dowodzi, że

$$y \in f(A_1) \cup f(A_2).$$

Niech $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Wówczas $y \in f(A_1)$ lub $y \in f(A_2)$, co dowodzi, że istnieje $x \in A_1$ lub istnieje $x \in A_2$ takie, że $y = f(x)$. W ten sposób udowodniliśmy, że

$$y \in f(A_1 \cup A_2).$$

**Rozwiązanie zadania 1.3.**

Niech $y \in f\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)$. Istnieje $x \in \bigcup_{t\in T} A_t$ takie, że $y = f(x)$. Istnieje $t \in T$ takie, że $x \in A_t$. Wynika stąd, że

$$y \in \bigcup_{t\in T} f(A_t).$$

Jeśli teraz $y \in \bigcup_{t\in T} f(A_t)$, to istnieje $t \in T$ takie, że $y \in f(A_t)$. Istnieje więc $x \in A_t$ takie, że $y = f(x)$. Stąd wnioskujemy, że

$$y \in f\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right).$$

**Rozwiązanie zadania 1.4.**

Niech $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Istnieje $x \in A_1 \cap A_2$ takie, że $y = f(x)$. Wynika stąd, że $x \in A_1$ i $x \in A_2$, czyli

$$y \in f(A_1) \cap f(A_2).$$

Dla funkcji $f : \mathsf{R} \longrightarrow \mathsf{R}$ danej wzorem $f(x) = x^2$ i zbiorów $A_1 = (-2, -1)$, $A_2 = (1, 2)$ mamy:

$$f(A_1) \cap f(A_2) = (1, 4) \neq \emptyset = f(A_1 \cap A_2).$$

Załóżmy teraz, że funkcja $f$ jest różnowartościowa. Jeśli $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Wówczas $y \in f(A_1)$ i $y \in f(A_2)$, co dowodzi, że istnieje $x_1 \in A_1$ i istnieje $x_2 \in A_2$ takie, że $y = f(x_1)$ i $y = f(x_2)$. Ponieważ funkcja $f$ jest różnowartościowa, więc $x_1 = x_2$. W ten sposób udowodniliśmy, że

$$y \in f(A_1 \cap A_2).$$

**Rozwiązanie zadania 1.5.**

Niech $y \in f\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)$. Istnieje taki element $x \in \bigcap_{t\in T} A_t$, że $y = f(x)$. Wtedy $x \in A_t$ dla każdego $t \in T$. Zatem

$$y \in \bigcap_{t\in T} f(A_t).$$

Odpowiedni kontrprzykład znajduje się w rozwiązaniu zadania 1.4.

**Rozwiązanie zadania 1.6.**

Niech $y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$. Istnieje zatem taki element $x_1 \in A_1$, dla którego $y = f(x_1)$ i $y \neq f(x)$ dla każdego $x \in A_2$. Wynika stąd, że $x_1 \in A_1 \setminus A_2$, skąd wnioskujemy, że

$$y \in f(A_1 \setminus A_2).$$

Dla funkcji $f : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$ danej wzorem $f(x) = x^2$ i zbiorów $A_1 = (-2, -2)$, $A_2 = (0, 2)$ mamy:

$$f(A_1) \setminus f(A_2) = [0, 4] \setminus [0, 4] = \emptyset,$$

gdy tymczasem

$$f(A_1 \setminus A_2) = f([-2, 0)) = (0, 4].$$

Niech teraz funkcja $f$ będzie różnowartościowa i $y \in f(A_1 \setminus A_2)$. Istnieje punkt $x_0 \in A_1 \setminus A_2$ taki, że $y = f(x_0)$. Każdy element $x \in A_2$ jest różny od $x_0$, więc $y \in f(A_1)$ i $y \notin f(A_2)$, co dowodzi, że

$$y \in f(A_1) \setminus f(A_2).$$

**Rozwiązanie zadania 1.7.**

Niech $y \in f(A_1)$. Istnieje $x \in A_1$ takie, że $y = f(x)$. Ponieważ $A_1 \subset A_2$, więc $x \in A_2$, co dowodzi, że $y \in f(A_2)$.

**Rozwiązanie zadania 1.8.**

Niech $x \in f^{-1}(B_1)$. Wnioskujemy stąd, że $f(x) \in B_1$. Z założenia wynika teraz, że $f(x) \in B_2$, czyli $x \in f^{-1}(B_2)$.

**Rozwiązanie zadania 1.9.**

Ponieważ $B_1 \subset B_1 \cup B_2$ i $B_2 \subset B_1 \cup B_2$, więc na mocy zadania 1.8

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2) \quad \text{i} \quad f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2),$$

skąd otrzymujemy inkluzję

$$f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2).$$

Niech teraz $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. Oznacza to, że $f(x) \in B_1 \cup B_2$, czyli $f(x) \in B_1$ lub $f(x) \in B_2$. Zatem $x \in f^{-1}(B_1)$ lub $x \in f^{-1}(B_2)$; to zaś dowodzi, że

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Dwie powyższe inkluzje dowodzą żądanej równości.

**Rozwiązanie zadania 1.10.**

Uogólnij rozwiązanie zadania poprzedniego.

**Rozwiązanie zadania 1.11.**

Dowód wynika z równoważności następującego ciągu zależności:

$$x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2),$$
$$f(x) \in B_1 \cap B_2,$$
$$f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2,$$
$$x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2),$$
$$x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

**Rozwiązanie zadania 1.12.**

Uogólnij rozwiązanie zadania poprzedniego.

**Rozwiązanie zadania 1.13.**

Dowód wynika z równoważności następującego ciągu zależności:

$$x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2),$$
$$f(x) \in B_1 \setminus B_2,$$
$$f(x) \in B_1 \wedge f(x) \notin B_2,$$
$$x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \notin f^{-1}(B_2),$$
$$x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2).$$

**Rozwiązanie zadania 1.14.**

Dowód wynika z równoważności następującego ciągu zależności:

$$x \in A \cap f^{-1}(B),$$
$$x \in A \wedge x \in f^{-1}(B),$$
$$x \in A \wedge f(x) \in B,$$
$$g(x) \in B$$
$$x \in g^{-1}(B).$$

**Rozwiązanie zadania 1.15.**

Niech $x \in A$. Wynika stąd relacja $f(x) \in f(A)$, a to oznacza $x \in f^{-1}(f(A))$, co dowodzi odpowiedniej inkluzji.

Dla funkcji $f : \mathsf{R} \longrightarrow \mathsf{R}$ danej wzorem $f(x) = x^2$ i zbioru $A = [0,1]$ mamy:

$$f^{-1}(f(A)) = [-1,1] \neq [0,1] = A.$$

Załóżmy teraz, że funkcja $f$ jest różnowartościowa i $x \in f^{-1}(f(A))$. Wynika stąd relacja $f(x) \in f(A)$. Istnieje zatem element $x' \in A$ taki, że $f(x) = f(x')$. Z założenia różnowartościowości funkcji $f$ wynika równość $x' = x$, co dowodzi, iż $x \in A$.

**Rozwiązanie zadania 1.16.**

Niech $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$. Istnieje element $x \in f^{-1}(B)$ taki, że $y = f(x)$. Ponieważ $f(x) \in B$, więc i $y \in B$.

Dla funkcji $f : \mathsf{R} \longrightarrow \mathsf{R}$ danej wzorem $f(x) = x^2$ i zbioru $B = [-1, 1]$ mamy:

$$f\left(f^{-1}(B)\right) = [0, 1] \neq [-1, 1] = B.$$

**Rozwiązanie zadania 1.17.**

Ponieważ $f^{-1}(B) \subset X$, więc

$$f\left(f^{-1}(B)\right) \subset f(X),$$

zatem na mocy zadania poprzedniego

$$f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B \cap f(X).$$

Niech teraz $y \in B \cap f(X)$. Istnieje $x \in f^{-1}(B)$ takie, że $y = f(x)$. Wynika stąd, że $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, co dowodzi inkluzji przeciwnej.

Przy założeniu, że funkcja $f$ przekształca zbiór $X$ na zbiór $Y$ mamy $f(X) = Y$, więc $B \cap f(X) = B$.

**Rozwiązanie zadania 1.18.**

Zawieranie

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

jest zawsze prawdziwe; patrz zadanie 1.4.

Niech teraz $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Wiemy, że $y \in f(A_2)$. Istnieje element $x \in A_2$ taki, że $y = f(x)$. Pokażemy również, że $x \in A_1$. Wiemy, że $f(x) = y \in f(A_1)$, więc $x \in f^{-1}(f(A_1)) = A_1$. Zatem $x \in A_1 \cap A_2$ i $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

**Rozwiązanie zadania 1.19.**

Z zadania 1.15 wnioskujemy, że

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

Z zadań 1.16 i 1.8 wynika, że

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}\left(f(f^{-1}(B))\right) \subset f^{-1}(B) = A,$$

co uzupełnia dowód równości.

**Rozwiązanie zadania 1.20.**

Oczywiście, $z \in h(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $x \in A$ takie, że

$$z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

co oznacza, że

$$z \in g(f(A)).$$

Ponieważ $x \in h^{-1}(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(x) \in B$, czyli $g(f(x)) \in B$. Zatem $f(x) \in g^{-1}(B)$ i ostatecznie $x \in f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)$.

**Rozwiązanie zadania 1.21.**

Niech $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ będą dwiema funkcjami różnowartościowymi oraz niech $x_1, x_2 \in X$. Jeśli $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, to $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, czyli $f(x_1) = f(x_2)$, co dowodzi równości $x_1 = x_2$.

**Rozwiązanie zadania 1.22.**

Niech $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ będą dwiema surjekcjami. Dla dowolnego elementu $z \in Z$ istnieje $y \in Y$ takie, że $z = g(y)$. Dla tego elementu $y$ istnieje $x \in X$ takie, że $y = f(x)$. Zatem dla danego $z \in Z$ istnieje $x \in X$ takie, że $z = g(f(x))$, co oznacza, że złożenie dwóch surjekcji jest też surjekcją.

**Rozwiązanie zadania 1.23.**

Na mocy dwóch zadań poprzednich otrzymujemy tezę.

**Rozwiązanie zadania 1.24.**

Dowód wynika bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej.

**Rozwiązanie zadania 1.25.**

W obu przypadkach odpowiedź brzmi tak.

Rozważmy pierwszy przypadek, gdy funkcje $f$ i $h$ są wzajemnie jednoznaczne. Wtedy $g = h \circ f^{-1}$, więc na mocy zadania poprzedniego $g$ jest bijekcją.

W drugim przypadku załóżmy, że funkcje $g$ i $h$ są bijekcjami. Wtedy $g^{-1} \circ h = f$, więc też na mocy zadania poprzedniego wnioskujemy, że $f$ jest bijekcją.

Indukcyjnie dowodzi się:

Niech funkcje $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ będą takie, że $f = f_n \circ \ldots \circ f_1$, przy czym $f$ i wszystkie z wyjątkiem jednej z funkcji $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są bijekcjami. Wtedy wszystkie funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są bijekcjami.

**Rozwiązanie zadania 1.26.**

Niech $y \in Y$. Istnieje $x \in X$ takie, że $y = f(x)$, czyli też $x = f^{-1}(y)$. Wtedy

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y = \mathrm{id}_Y(y).$$

Jednocześnie

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(y) = x = \mathrm{id}_X(x).$$

**Rozwiązanie zadania 1.27.**

Z surjektywności funkcji $f_2$ i zadania 1.17 wynikają równości

$$f_2(A_2) = f_2\left(f_2^{-1}\left(f_1\left(A_1\right)\right)\right) = f_1\left(A_1\right).$$

Na podstawie zadania 1.19 wnioskujemy, że

$$f_2^{-1}\left(f_2\left(A_2\right)\right) = A_2.$$

Załóżmy teraz, że $f_1^{-1}\left(f_1\left(A_1\right)\right) = A_1$. Wtedy na podstawie pierwszej części zadania mamy:

$$f_1^{-1}\left(f_2\left(A_2\right)\right) = f_1^{-1}\left(f_1\left(A_1\right)\right) = A_1.$$

Teraz niech ponadto dla zbioru $B_1 \subset X_1$ zbiór $B_2$ będzie określony równością $B_2 = f_2^{-1}\left(f_1\left(B_1\right)\right)$. Wtedy z różnowartościowości funkcji $f_1$ na podstawie zadań 1.4 i 1.11 wnioskujemy, że

$$f_2^{-1}\left(f_1\left(A_1 \cap B_1\right)\right) = f_2^{-1}\left(f_1\left(A_1\right) \cap \left(f_1\left(B_1\right)\right)\right) =$$

$$f_2^{-1}\left(f_1\left(A_1\right)\right) \cap f_2^{-1}\left(f_1\left(B_1\right)\right) = A_2 \cap B_2,$$

a to kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 1.28.**

Przypuśćmy, że dla pewnych elementów $x_1, x_2$ zbioru $X$ spełniona jest równość $f(x_1) = f(x_2)$. Istnieją indeksy $t_1, t_2 \in T$ takie, że

$$x_1 \in A_{t_1}, \quad x_2 \in A_{t_2}.$$

Z rozłączności zbiorów $f\left(A_t\right)$ i $f\left(A_{t'}\right)$ dla $t \neq t'$ wynika, że $t_1 = t_2$. W ten sposób równość $f(x_1) = f(x_2)$ oznacza też równość $f_{|A_{t_1}}(x_1) = f_{|A_{t_1}}(x_2)$, co dowodzi, na mocy różnowartościowości funkcji $f_{|A_{t_1}}$, że $x_1 = x_2$.

**Rozwiązanie zadania 1.29.**

Oczywiście, funkcja $f : X \longrightarrow f(X)$ jest surjekcją. Jest też funkcją różnowartościową. Istotnie, jeśli $f(x_1) = f(x_2)$, to

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$

Niech teraz $y$ będzie dowolnym elementem zbioru $f(X)$. Istnieje $x \in X$ takie, że $y = f(x)$. Wtedy

$$g_{|f(X)}(y) = g(y) = g(f(x)) = x.$$

Z dowolności wyboru elementu $y$ wynika, że funkcja $g_{|f(X)}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f : X \longrightarrow f(X)$.

**Rozwiązanie zadania 1.30.**

Udowodnimy najpierw, że funkcja $f$ jest różnowartościowa. Przypuśćmy, że dla pewnych elementów $x_1$ i $x_2$ zbioru $X$ spełniona jest równość $f(x_1) = f(x_2)$. Wtedy

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2,$$

a to dowodzi różnowartościowości funkcji $f$.

Pokażemy teraz, że funkcja $f$ jest surjekcją. Niech $y$ będzie dowolnym elementem ze zbioru $Y$. Niech $x = g(y)$. Wówczas

$$y = f(g(y)) = f(x),$$

co kończy tę część dowodu.

Tak więc funkcja $f$ jest wzajemnie jednoznaczna i na mocy zadania poprzedniego wnioskujemy, że $g$ jest funkcją odwrotną do $f$.

**Rozwiązanie zadania 1.31.**

Niech $x \in g(B)$. Oznacza to, że istnieje $y \in B$ takie, że $x = g(y)$, czyli $y = f(x)$. To zaś jest równoważne zależności $x \in f^{-1}(B)$, czyli $g(B) = f^{-1}(B)$.

Relacja $y \in f(A)$ jest równoważna temu, że istnieje element $x \in A$, dla którego $y = f(x)$. To zaś oznacza, że $x = g(y)$, czyli $y \in g^{-1}(A)$. Stąd wnioskujemy, że $g^{-1}(A) = f(A)$.

**Rozwiązanie zadania 1.32.**

Równości (a) – (d) dowodzi się poprzez proste sprawdzenie wartości funkcji.

Ad (e). Niech $A \cap B = \emptyset$. Z własności (a) i (c) wynika, że

$$\chi_{(A\cup B)} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \chi_A + \chi_B - \chi_{(A\cap B)} = \chi_A + \chi_B,$$

bowiem $\chi_\emptyset = 0$.

Jeśli teraz $\chi_{(A\cup B)} = \chi_A + \chi_B$, to $\chi_{(A\cap B)} = 0$, czyli $A \cap B = \emptyset$.

**Rozwiązanie zadania 1.33.**

Oczywiście każda funkcja charakterystyczna podzbioru $A$ zbioru $X$ jest funkcją należącą do $\{0,1\}^X$.

Jeśli dla pewnych zbiorów $A, B \subset X$ spełniona jest równość $F(A) = F(B)$, to $\chi_A = \chi_B$, co oznacza, że $A = B$.

Niech teraz $f$ będzie dowolną funkcją ze zbioru $\{0,1\}^X$. Funkcja charakterystyczna zbioru

$$A = \{x \in X : f(x) = 1\}$$

jest równa funkcji $f$, co dowodzi, że $F$ jest surjekcją.

W ten sposób okazuje się, iż $F$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną.

# Rozdział 2

# Przestrzenie metryczne

**Rozwiązanie zadania 2.1.**

Udowodnimy po kolei wszystkie trzy warunki metryki.

Ad (M1). Niech $x, y \in X$. Wtedy z warunków (a) i (b) naszego zadania wynika, że

$$0 = \varrho(x, x) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, x) = 2\varrho(x, y)\,,$$

skąd wynika warunek (M1).

Ad (M2). Z założeń zadania wynikają dla dowolnych $x, y \in X$ nierówności

$$\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, x) + \varrho(y, x) = \varrho(y, x)\,.$$

Podobnie dowodzi się, że $\varrho(y, x) \leqslant \varrho(x, y)$, skąd wynika warunek (M2).

Ad (M3). Dla dowolnych $x, y, z \in X$ mamy:

$$\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(y, z) = \varrho(x, z) + \varrho(z, y)\,,$$

co dowodzi nierówności trójkąta.

**Rozwiązanie zadania 2.2.**

Niech $K(x, r)$ będzie dowolną kulą w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$, zaś $y$ dowolnym punktem tej kuli. Jeśli $d = r - \varrho(x, y)$, to $d > 0$ i dla wszystkich elementów $z \in K(y, d)$ mamy:

$$\varrho(z, x) \leqslant \varrho(z, y) + \varrho(y, x) < d + \varrho(y, x) = r - \varrho(x, y) + \varrho(x, y) = r.$$

Dowodzi to, że $y$ jest punktem wewnętrznym kuli $K(x, r)$, a z dowolności wyboru punktu $y$ z kuli $K(x, r)$ wnioskujemy teraz, że kula ta jest zbiorem otwartym.

**Rozwiązanie zadania 2.3.**

Spełnienie warunków (M1) – (M3) metryki nie wymaga istotnego dowodu.

Rozważmy teraz dowolną kulę $K$ w przestrzeni metrycznej $(A, \varrho_A)$. Istnieją punkt $a \in A$ i liczba dodatnia $r$ takie, że

$$K = \{x \in A : \varrho(x, a) < r\} =$$

$$\{x \in X : x \in A, \ \ \varrho(x, a) < r\} =$$

$$\{x \in X : \varrho(x, a) < r\} \cap A = K(a, r) \cap A.$$

Z powyższych rozważań wynika, że zbiór otwarty $H$ w podprzestrzeni $A$ jest postaci $H = G \cap A$, gdzie $G$ jest pewnym zbiorem otwartym w przestrzeni $(X, \varrho)$.

**Rozwiązanie zadania 2.4.**

Niech $x, y$ będą dwoma różnymi punktami przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$. Wtedy $\varrho(x, y) > 0$ i połóżmy $r = \frac{1}{3} \cdot \varrho(x, y)$. Kule $K(x, r)$, $K(y, r)$ są rozłączne. Istotnie, w przeciwnym przypadku istniałby element $z \in K(x, r) \cap K(y, r)$. Wtedy

$$3 \cdot r = \varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y) < r + r = 2 \cdot r,$$

co jest niemożliwe, gdyż $r > 0$.

**Rozwiązanie zadania 2.5.**

Warunek (M1) jest oczywiście spełniony.

Niech teraz $A$, $B \in \mathcal{T}$. Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to, na mocy warunku (1), jest to zbiór otwarty. Jeśli $A \cap B \neq \emptyset$, to niech $x$ będzie dowolnym punktem zbioru $A \cap B$. Istnieją więc liczby dodatnie $a$ i $b$ takie, że

$$K(x, a) \subset A, \quad \text{i} \quad K(x, b) \subset B.$$

Niech $c = \min\{a, b\}$. Wtedy

$$K(x, c) \subset A \quad \text{i} \quad K(x, c) \subset B,$$

czyli

$$K(x, c) \subset A \cap B.$$

Dowodzi to, że $A \cap B$ jest zbiorem otwartym.

Jeśli teraz $x \in \bigcup \mathcal{A}$, to istnieje zbiór $A \in \mathcal{A}$ taki, że $x \in A$. Ponieważ zbiór $A$ jest otwarty, więc istnieje liczba dodatnia $r$, dla której $K(x, r) \subset A$. Oczywiście również $K(x, r) \subset \bigcup \mathcal{A}$, co dowodzi, że każdy punkt zbioru $\bigcup \mathcal{A}$ jest jego punktem wewnętrznym, czyli zbiór $\bigcup \mathcal{A}$ jest otwarty.

**Rozwiązanie zadania 2.6.**

Ponieważ zbiór pusty jest dopełnieniem zbioru $X$ i odwrotnie, więc oba zbiory są domknięte.

Jeśli $A$, $B \in \mathcal{D}$, to istnieją zbiory otwarte $C$ i $D$ takie, że

$$A = X \setminus C \quad \text{i} \quad B = X \setminus D.$$

Wówczas

$$A \cup B = (X \setminus C) \cup (X \setminus D) = X \setminus (A \cap B),$$

a to oznacza, że zbiór $A \cup B$ jest domknięty.

Niech $\mathcal{D}_1 = \{D_t\}_{t \in T}$. Oznaczmy teraz $A_t = X \setminus D_t$, dla $t \in T$. Rodzina $\{A_t\}_{t \in T}$ składa się ze zbiorów otwartych. Ponadto

$$\bigcap \mathcal{D}_1 = \bigcap_{t \in T} D_t = \bigcap_{t \in T} (X \setminus A_t) = X \setminus \bigcup_{t \in T} A_t.$$

To kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 2.7.**

Załóżmy najpierw, że $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$. Niech $U$ będzie dowolnym zbiorem otwartym i $x$ jego dowolnym elementem. Istnieje podrodzina $\mathcal{B}'$ rodziny $\mathcal{B}$ taka, że $\bigcup \mathcal{B}' = U$. Istnieje więc zbiór $B \in \mathcal{B}'$ taki, że $x \in B$. Oczywiście $B \subset U$, a to kończy dowód tej części zadania.

Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek

$$\forall_{U \in \mathcal{T}_\varrho} \forall_{x \in U} \exists_{B \in \mathcal{B}} (x \in B \wedge B \subset U).$$

Niech $U$ będzie dowolnym zbiorem otwartym (niepustym; zbiór pusty jest sumą pustej podrodziny rodziny $\mathcal{B}$). Dla każdego punktu $x \in U$ niech $B_x$ będzie takim zbiorem z rodziny $\mathcal{B}$, że $x \in B_x$ i $B_x \subset U$. Rodzina wszystkich takich zbiorów tj. $\{B_x\}_{x \in U}$ ma sumę równą zbiorowi $U$. Istotnie,

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} B_x \subset U.$$

Tak więc rodzina $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$.

**Rozwiązanie zadania 2.8.**

Ad (1). Warunek ten wynika z poprzedniego zadania, gdyż zbiór $X$ jest otwarty.

Ad (2). Warunek ten wynika też z poprzedniego zadania, gdyż zbiór $B_1 \cap B_2$ jest otwarty.

**Rozwiązanie zadania 2.9.**

Kule są zbiorami otwartymi (patrz zadanie 2.2.) Ponadto dla każdego zbioru otwartego $U$ i jego elementu $x$ w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ istnieje (na mocy definicji zbioru otwartego) pewna kula $K(x, r)$ zawarta w zbiorze $U$. Korzystając teraz z zadania 2.7, wnioskujemy, że rodzina wszystkich kul w przestrzeni metrycznej jest jej bazą.

**Rozwiązanie zadania 2.10.**

Jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni $(X, \varrho)$, to warunek z zadania jest spełniony na mocy zadania 2.7.

Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek

$$\forall_{x \in X} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{B \in \mathcal{B}} (x \in B \ \wedge \ B \subset K(x, \varepsilon)).$$

Wykorzystamy też zadanie 2.7. Niech $U$ będzie dowolnym zbiorem otwartym i $x$ jego dowolnym punktem. Istnieje liczba dodatnia $\varepsilon$ taka, że $K(x, \varepsilon) \subset U$. Z założenia wynika, że istnieje zbiór $B \in \mathcal{B}$ taki, że

$$x \in B \ \wedge \ B \subset K(x, \varepsilon) \subset U.$$

To kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 2.11.**

Niech $U$ będzie dowolnym zbiorem otwartym w podprzestrzeni $A$ i $x$ jego dowolnym elementem. Istnieje zbiór otwarty $G$ (w przestrzeni $X$) taki, że $U = G \cap A$. Ponieważ $x \in U \subset G$, więc istnieje zbiór $B \in \mathcal{B}$ taki, że

$$x \in B \ \wedge \ B \subset G.$$

Stąd

$$x \in B \cap A \ \wedge \ B \cap A \subset G \cap A,$$

a ponieważ $B \cap A \in \mathcal{F}$, więc rodzina $\mathcal{F}$ stanowi bazę podprzestrzeni $A$.

**Rozwiązanie zadania 2.12.**

Niech $\mathcal{A}$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów otwartych zawartych w zbiorze $A$.

Jeśli $x \in \operatorname{Int}(A)$, to istnieje dodatnia liczba $r$ taka, że $K(x, r) \subset A$. Kula $K(x, r)$ jest zbiorem otwartym, więc należy do rodziny $\mathcal{A}$. Zatem $x \in K(x, r) \subset \bigcup \mathcal{A}$. Tak więc $\operatorname{Int}(A) \subset \bigcup \mathcal{A}$.

Jeśli teraz $x \in \bigcup \mathcal{A}$, to istnieje $U \in \mathcal{A}$ takie, że $x \in U$. Ponieważ zbiór $U$ jest otwarty, więc istnieje dodatnia liczba $r$ taka, że $x \in K(x, r) \subset U \subset A$. Dowodzi to, że punkt $x$ jest punktem wewnętrznym zbioru $A$, należy więc do zbioru $\operatorname{Int}(A)$.

**Rozwiązanie zadania 2.13.**

Ponieważ suma wszystkich zbiorów otwartych zawartych w zbiorze $A$ jest zbiorem otwartym zawartym w $A$, więc jest to największy zbiór otwarty zawarty w $A$.

**Rozwiązanie zadania 2.14.**

Przypuśćmy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma dwie różne granice; niech to będą punkty $a$ i $b$. Wtedy $d = \frac{1}{3} \cdot \varrho(a, b) > 0$ i kule $K(a, d)$ i $K(b, d)$ są rozłączne. Ze zbieżności ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ do punktu $a$ wynika, że istnieje liczba $n_1 \in \mathrm{N}$ taka, że

$$\varrho(x_n, a) < d \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_1,$$

czyli

$$x_n \in K(a, d) \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_1.$$

Ze zbieżności ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ do punktu $b$ wynika, że istnieje liczba $n_2 \in \mathrm{N}$ taka, że

$$\varrho(x_n, b) < d \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_2,$$

czyli

$$x_n \in K(b, d) \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_2.$$

Dla $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ spełnione są obie nierówności jednocześnie, co jest niemożliwe z uwagi na rozłączność kul $K(a, d)$ i $K(b, d)$.

**Rozwiązanie zadania 2.15.**

Niech $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ będzie podciągiem pewnego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżnego do jakiegoś punktu $a$. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje liczba $n_0 \in \mathrm{N}$ taka, że

$$\varrho(x_n, a) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Ponieważ $n_k \geqslant k$ dla wszystkich $k \in \mathrm{N}$, więc

$$\varrho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Dowodzi to, że podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest też zbieżny do punktu $a$.

**Rozwiązanie zadania 2.16.**

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym i $a$ jego granicą. Dla liczby 1 istnieje liczba $n_0 \in \mathrm{N}$ taka, że

$$\varrho(x_n, a) < 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Niech

$$d = \max\{\varrho(x_1, a), \varrho(x_2, a), \ldots, \varrho(x_{n_0}, a), 1\}.$$

Zauważamy teraz, że $\varrho(x_k, x_l) \leqslant 2d$ dla wszystkich $k, l \in \mathrm{N}$. Oznacza to, że średnica zbioru $\{x_n : n \in \mathrm{N}\}$ nie przekracza $2d$. Zbiór ten jest więc ograniczony.

**Rozwiązanie zadania 2.17.**

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do pewnego punktu $a \in X$. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\varrho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Zatem dla $n, m \geqslant n_0$ spełnione są nierówności:

$$\varrho(x_n, x_m) \leqslant \varrho(x_n, a) + \varrho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dowodzi to warunku Cauchy'ego.

**Rozwiązanie zadania 2.18.**

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek Cauchy'go i posiadającym podciąg zbieżny; $\varepsilon$ – dowolną liczbą dodatnią. Przyjmijmy, że $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest podciągiem zbieżnym do pewnego punktu, powiedzmy $a$. Istnieje liczba $k_1 \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\varrho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad k \geqslant k_1.$$

Z warunku Cauchy'ego wynika, że istnieje liczba $n_1 \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\varrho(x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad m, l \geqslant n_1.$$

Jeśli teraz $n_0 = \max\{k_1, n_1\}$, to dla $k \geqslant n_0$ spełnione są nierówności:

$$\varrho(x_k, a) \leqslant \varrho(x_k, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

**Rozwiązanie zadania 2.19.**

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$. Z założenia istnieje liczba naturalna $n_0$ taka, że

$$\varrho(x_n, x_{n_0}) < 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Niech

$$r = \max\{\varrho(x_i, x_j) \,:\, i, j \in \mathbb{N} \wedge i, j \leqslant n_0\} + 1.$$

Wtedy dla każdej liczby naturalnej $n$ mamy $\varrho(x_n, x_{n_0}) < r$, czyli

$$x_n \in K(x_0, r) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zbiór $\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ jest więc ograniczony, czyli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ też jest ograniczony.

**Rozwiązanie zadania 2.20.**

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem spełniającym założenia zadania. Przypuśćmy, że nie jest on zbieżny do punktu $x_0$. Istnieje więc liczba dodatnia $\varepsilon$ taka, że dla każdej liczby naturalnej $k$ istnieje liczba naturalna $n_k > k$, dla której $\varrho(x_{n_k}, x_0) > \varepsilon$. Otrzymaliśmy w ten sposób podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, z którego nie można wybrać podciągu zbieżnego do punktu $x_0$. Sprzeczność.

**Rozwiązanie zadania 2.21.**

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieją liczby $n_1 \in \mathrm{N}$ i $n_2 \in \mathrm{N}$ takie, że

$$\varrho(x_n, a) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_1$$

i

$$\varrho(y_n, a) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_2.$$

Połóżmy teraz $n_0 = 2 \cdot \max\{n_1, n_2\}$. Rozważmy dowolną liczbę naturalną $n \geqslant n_0$.

Jeśli $n$ jest liczbą nieparzystą, czyli jest postaci $n = 2k - 1$, gdzie $k \in \mathrm{N}$, to

$$\varrho(z_n, a) = \varrho(z_{2k-1}, a) = \varrho(x_k, a) < \varepsilon,$$

bowiem $k \geqslant n_1$.

Jeśli zaś $n$ jest liczbą parzystą, czyli jest postaci $n = 2k$, gdzie $k \in \mathrm{N}$, to

$$\varrho(z_n, a) = \varrho(z_{2k}, a) = \varrho(y_k, a) < \varepsilon,$$

bowiem $k \geqslant n_2$.

W obu przypadkach

$$\varrho(z_n, a) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0,$$

co dowodzi zbieżności ciągu $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ do punktu $a$.

**Rozwiązanie zadania 2.22.**

Jeśli zbiór $A$ jest otwarty, to jest on, oczywiście, największym zbiorem otwartym zawartym w $A$, jest więc, na mocy zadania 2.13, równy swojemu wnętrzu.

Jeśli teraz założymy, że $A = \mathrm{Int}(A)$, to, na mocy tego samego zadania, wnioskujemy, że $A$ jest zbiorem otwartym.

**Rozwiązanie zadania 2.23.**

Niech $a \in \overline{A}$. Wiemy, że $a \in A \cup A^d$. Jeśli $a \in A$, to, oczywiście,

$$\forall_{\varepsilon > 0}(K(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset).$$

Jeśli zaś $a \in A^d$, to istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$x_n \in A, \quad x_n \neq a \quad \text{dla} \quad n \in \mathrm{N}$$

i

$$x_n \longrightarrow a,$$

a to oznacza, że

$$\forall_{\varepsilon>0}(K(a,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset).$$

Niech teraz będzie spełniony warunek:

$$\forall_{\varepsilon>0}(K(a,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset).$$

Jeśli $a \in A$, to, oczywiście, $a \in \overline{A}$.

Jeśli $a \notin A$, to na mocy założenia wnioskujemy, że (w szczególności) dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieje element $x_n$ taki, że

$$x_n \in A,\quad x_n \neq a \quad \text{i} \quad \varrho(x_n,a) < \frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad n \in \mathrm{N}.$$

Oznacza to, że $x_n \longrightarrow a$, więc $a \in A^d$.

W obu przypadkach $a \in \overline{A}$.

Niech teraz $a \in A^d$. Wiemy, że istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$x_n \in A,\quad x_n \neq a \quad \text{i} \quad x_n \longrightarrow a,$$

a to oznacza, że

$$\forall_{\varepsilon>0}((K(a,\varepsilon)\cap A)\setminus\{a\} \neq \emptyset).$$

Niech teraz będzie spełniony warunek:

$$\forall_{\varepsilon>0}((K(a,\varepsilon)\cap A)\setminus\{a\} \neq \emptyset).$$

Wynika stąd, że dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieje punkt $x_n$ taki, że

$$x_n \in A,\quad x_n \neq a \quad \text{i} \quad \varrho(x_n,a) < \frac{1}{n},$$

zatem

$$x_n \in A,\quad x_n \neq a \quad \text{i} \quad x_n \longrightarrow a.$$

Oznacza to, że $a \in A^d$.

**Rozwiązanie zadania 2.24.**

Niech $x \in \mathrm{Int}(A)$. Istnieje liczba dodatnia $r$ taka, że $K(x,r) \subset A$. Oznacza to, że $K(x,r)\cap(X\setminus A) = \emptyset$. Wnioskujemy stąd, że $x \notin \overline{(X\setminus A)}$, czyli $x \in X\setminus\overline{(X\setminus A)}$.

Niech teraz $x \in X\setminus\overline{(X\setminus A)}$, czyli $x \notin \overline{(X\setminus A)}$. Na mocy zadania 2.23 wnioskujemy, że istnieje liczba $r > 0$ taka, że $K(x,r)\cap(X\setminus A) = \emptyset$. W ten sposób udowodniliśmy, że $K(x,r) \subset A$, co oznacza, iż $x \in \mathrm{Int}(A)$.

**Rozwiązanie zadania 2.25.**

Dla zbioru $A$ niech $B = X \setminus A$. Na mocy zadania poprzedniego mamy:

$$\mathrm{Int}\,(X \setminus A) = \mathrm{Int}\,(B) = X \setminus \overline{X \setminus B} = X \setminus \overline{A},$$

skąd wynika równość

$$\overline{A} = X \setminus \mathrm{Int}\,(X \setminus A)\,.$$

**Rozwiązanie zadania 2.26.**

Załóżmy najpierw, że zbiór $A$ jest domknięty. Wtedy jego dopełnienie $X \setminus A$ jest zbiorem otwartym, więc $\mathrm{Int}\,(X \setminus A) = X \setminus A$. Zatem

$$\overline{A} = X \setminus \mathrm{Int}\,(X \setminus A) = X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Niech teraz $\overline{A} = A$. Mamy więc następujące równości:

$$\mathrm{Int}\,(X \setminus A) = X \setminus \overline{X \setminus (X \setminus A)} = X \setminus \overline{A} = X \setminus A,$$

a to dowodzi, że zbiór $X \setminus A$ jest otwarty, czyli $A$ jest domknięty.

**Rozwiązanie zadania 2.27.**

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów domkniętych zawierających zbiór $A$. Rozważmy teraz rodzinę $\mathcal{G}$ złożoną z dopełnień wszystkich zbiorów rodziny $\mathcal{F}$. Zauważmy, że rodzina $\mathcal{G}$ składa się ze wszystkich zbiorów otwartych zawartych w zbiorze $X \setminus A$. Na mocy zadania 2.12 i wzorów de Morgana wnioskujemy, że

$$\mathrm{Int}\,(X \setminus A) = \bigcup \mathcal{G} = X \setminus \bigcap \mathcal{F},$$

czyli

$$\bigcap \mathcal{F} = X \setminus \mathrm{Int}\,(X \setminus A) = \overline{A}.$$

**Rozwiązanie zadania 2.28.**

Ponieważ przekrój dowolnej podrodziny rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym, więc domknięcie zbioru $A$, czyli przekrój rodziny wszystkich zbiorów domkniętych zawierających zbiór $A$ (porównaj zadanie 2.27) jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym $A$.

**Rozwiązanie zadania 2.29.**

Ponieważ zbiory $\emptyset$ i $X$ są zbiorami otwartymi, więc na mocy zadania 2.22

$$\mathrm{Int}\,(X) = X, \quad \mathrm{Int}\,(\emptyset) = \emptyset\,.$$

Własność (2) wynika bezpośrednio z definicji.

Jeśli $A \subset B$, to każdy zbiór otwarty zawarty w $A$ jest też zawarty w $B$, więc w szczególności największy zbiór otwarty zawarty w $A$ jest zawarty w największym zbiorze otwartym zawartym w $B$.

Ponieważ $A \cap B \subset A$, więc $\mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}(A)$. Podobnie

$$\mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}(B).$$

Tak więc

$$\mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B).$$

Zauważmy teraz, że $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subset A \cap B$. Ponieważ wnętrze dowolnego zbioru jest zbiorem otwartym i przekrój dwóch zbiorów otwartych jest też zbiorem otwartym, więc $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$ jest podzbiorem wnętrza zbioru $A \cap B$.

Razem z poprzednią inkluzją dowodzi to równości

$$\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B).$$

Ponieważ wnętrze zbioru jest zbiorem otwartym, więc na mocy zadania 2.22 wnioskujemy, że $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$.

**Rozwiązanie zadania 2.30.**

Ponieważ zbiory $\emptyset$ i $X$ są zbiorami domkniętymi, więc na mocy zadania 2.26

$$\overline{X} = X, \quad \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

Własność (2) wynika bezpośrednio z definicji.

Jeśli $A \subset B$, to każdy zbiór domknięty zawierający $B$ zawiera też $A$, więc w szczególności najmniejszy zbiór domknięty zawierający $B$ zawiera też najmniejszy zbiór domknięty zawierający $A$, co na mocy zadania 2.28 dowodzi inkluzji $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Ponieważ $A \subset A \cup B$, więc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Podobnie $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Zatem

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Zauważmy teraz, że $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ i zbiór $\overline{A} \cup \overline{B}$ jest domknięty, więc zawiera domknięcie zbioru $A \cup B$, czyli

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Razem z poprzednią inkluzją dowodzi to równości

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Ponieważ domknięcie zbioru jest zbiorem domkniętym, więc na mocy zadania 2.26 $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

**Rozwiązanie zadania 2.31.**

Z własności wartości bezwzględnej wynikają warunki (1) - (3) metryki.
Kulą o środku $a$ i promieniu $r$ jest przedział $(a-r, a+r)$.

**Rozwiązanie zadania 2.32.**

$X$ nie jest przestrzenią metryczną, gdyż liczby 1 i 3 są różne, natomiast $\varrho(1,3)=0$.

**Rozwiązanie zadania 2.33.**

Oczywiście, funkcja $\varrho$ przyjmuje wartości nieujemne.

Niech $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ będą dowolnymi elementami zbioru $\mathrm{R}^n$.

Jeśli $x=y$, to dla wszystkich $i=1,\ldots,n$ spełnione są równości $x_i=y_i$. Zatem $\varrho(x,y)=0$.

Jeśli teraz $\varrho(x,y)=0$, to na podstawie określenia funkcji $\varrho$ wnioskujemy, że dla każdego $i=1,\ldots,n$ ma miejsce równość $x_i=y_i$. Stąd wynika bezpośrednio równość $x=y$.

Równości:

$$\varrho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=\varrho(y,x)$$

dowodzą warunku (M2).

Niech teraz jeszcze $z=(z_1,\ldots,z_n)$ będzie trzecim elementem zbioru $\mathrm{R}^n$. W poniższym ciągu nierówności wykorzystamy nierówność Minkowskiego:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

Wtedy

$$\varrho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}((x_i-z_i)+(z_i-y_i))^2}\leqslant$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}=\varrho(x,z)+\varrho(z,y).$$

Udowodniliśmy w ten sposób wszystkie warunki metryki, zatem zbiór $\mathrm{R}^n$ z funkcją $\varrho$ jest przestrzenią metryczną.

**Rozwiązanie zadania 2.34.**

Oczywiście, funkcja $\varrho$ jest nieujemna. Gdy $x, y \in X$, to z definicji funkcji $\varrho$ wynika, że $x = y$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\varrho(x, y) = 0$.

Warunek (M2) jest też spełniony. Niech $x, y, z \in X$.
Jeśli $x = y$, to
$$\varrho(x, y) = 0 \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

Jeśli $x \neq y$, to przynajmniej jednen z warunków $x \neq z$, $z \neq y$ jest spełniony. Zatem
$$\varrho(x, y) = 1 \quad \text{i} \quad \varrho(x, z) + \varrho(z, y) \geqslant 1,$$
a to już dowodzi nierówności trójkąta.

Niech $a$ będzie ustalonym punktem przestrzeni $X$, $r$ – dowolną liczbą dodatnią. Jeśli
$$r \leqslant 1, \quad \text{to} \quad K(a, r) = \{a\}.$$
Jeśli
$$r > 1, \quad \text{to} \quad K(a, r) = X.$$

**Rozwiązanie zadania 2.35.**

Ponieważ funkcje ze zbioru $X$ są ograniczone, więc funkcja $\varrho$ jest poprawnie określona, tzn. przyjmuje wartości w zbiorze $[0, \infty)$.
Sprawdzimy po kolei wszystkie trzy warunki (M1) – (M3) metryki.
Niech $f$, $g$ i $h$ będą dowolnymi elementami zbioru $X$.
Ad (M1). Z określenia funkcji $\varrho$ wiemy, że jest ona funkcją nieujemną.
Jeśli $f = g$, to $f(t) = g(t)$ dla każdego elementu $t \in E$, czyli
$$\varrho(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in E\} = 0.$$

Jeśli teraz
$$0 = \varrho(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in E\},$$
to $f(t) = g(t)$ dla każdego elementu $t \in E$, czyli $f = g$.
Ad (M2). Oczywiście,
$$\varrho(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in E\} =$$
$$\sup\{|g(t) - f(t)| : t \in E\} = \varrho(g, f).$$

Ad (M3). Ustalmy element $t_0$ ze zbioru $E$. Z nierówności
$$|f(t_0) - g(t_0)| \leqslant |f(t_0) - h(t_0)| + |h(t_0) - g(t_0)|$$
wynika
$$|f(t_0) - g(t_0)| \leqslant \sup\{|f(t) - h(t)| : t \in E\} + |h(t_0) - g(t_0)|,$$

a także

$$|f(t_0) - g(t_0)| \leqslant$$
$$\sup\{|f(t) - h(t)| \,:\, t \in E\} + \sup\{|h(t) - g(t)| \,:\, t \in E\},$$

skąd wnioskujemy, że

$$\sup\{|f(t) - g(t)| \,:\, t \in E\} \leqslant$$
$$\sup\{|f(t) - h(t)| \,:\, t \in E\} + \sup\{|h(t) - g(t)| \,:\, t \in E\}.$$

Oznacza to, że

$$\varrho(f,g) \leqslant \varrho(f,h) + \varrho(h,g).$$

Funkcja $\varrho$ jest więc metryką w zbiorze $X$.

**Rozwiązanie zadania 2.36.**

Sprawdzimy po kolei wszystkie trzy warunki (M1) – (M3) metryki. Niech $f$, $g$ i $h$ będą dowolnymi elementami zbioru $X$.

Ad (M1). Funkcja $\varrho$ przyjmuje wartości w zbiorze $[0,1]$, jest więc nieujemna. Jeśli $f = g$, to $f(t) = g(t)$ dla każdego elementu $t \in E$, czyli

$$\varrho(f,g) = \min\{\sup\{|f(t) - g(t)| \,:\, t \in E\}, 1\} = \min\{0,1\} = 0.$$

Jeśli teraz

$$0 = \varrho(f,g) =$$
$$\min\{\sup\{|f(t) - g(t)| \,:\, t \in E\}, 1\} = 0,$$

to $f(t) = g(t)$ dla każdego elementu $t \in E$, czyli $f = g$.

Ad (M2). Rozważmy dwa przypadki. Jeśli

$$\sup\{|f(t) - g(t)| \,:\, t \in E\} \leqslant 1,$$

to

$$\varrho(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| \,:\, t \in E\} =$$
$$\sup\{|g(t) - f(t)| \,:\, t \in E\} = \varrho(g,f).$$

Jeśli jednak $\sup\{|f(t) - g(t)| \,:\, t \in E\} > 1$, to

$$\varrho(f,g) = 1 = \varrho(g,f).$$

W obu przypadkach $\varrho(f,g) = \varrho(g,f)$.

Ad (M3). Zauważmy najpierw, że jeśli $a, b$ i $c$ są dowolnymi liczbami nieujemnymi, to

$$\min\{a, b+c\} \leqslant \min\{a,b\} + \min\{a,c\}.$$

Stąd wynika:

$$\min\{\sup\{|f(t) - g(t)| \,:\, t \in E\}, 1\} \leqslant$$
$$\min\{\sup\{|f(t) - h(t)| \,:\, t \in E\}, 1\} + \min\{\sup\{|h(t) - g(t)| \,:\, t \in E\}, 1\}.$$

Oznacza to, że

$$\varrho(f,g) \leqslant \varrho(f,h) + \varrho(h,g).$$

Funkcja $\varrho$ jest więc metryką w zbiorze $X$.

**Rozwiązanie zadania 2.37.**

Niech $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ i $z = (z_1, z_2)$ będą dowolnymi punktami zbioru $\mathrm{R}^2$.

Ad (M1). Z postaci funkcji $\varrho$ wynika, że $\varrho(x, y) \geqslant 0$. Jeśli $x = y$, to oczywiście $\varrho(x, y) = 0$. Jeśli zaś $\varrho(x, y) = 0$, to

$$\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 0,$$

czyli $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$. Oznacza to, że $x = y$.

Ad (M2).

$$\varrho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} =$$
$$\max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\} = \varrho(y, x).$$

Ad (M3). W dalszym ciągu wykorzystamy łatwą do uzasadnienia nierówność

$$\max\{a + b, c + d\} \leqslant \max\{a, c\} + \max\{b, d\}$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b, c, d$. Stąd

$$\varrho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} =$$
$$\max\{|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|, |x_2 - z_2 + z_2 - y_2|\} \leqslant$$
$$\max\{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|\} \leqslant$$
$$\max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} + \max\{|z_1 - y_1|, |z_2 - y_2|\} =$$
$$\varrho(x, z) + \varrho(z, y),$$

co kończy dowód warunku trójkąta.

Kulami otwartymi w tej przestrzeni są wnętrza kwadratów o bokach równoległych do osi współrzędnych.

**Rozwiązanie zadania 2.38.**

Niech $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ i $z = (z_1, z_2)$ będą dowolnymi punktami zbioru $\mathrm{R}^2$.

Ad (M1). Z postaci funkcji $\varrho$ wynika, że $\varrho(x, y) \geqslant 0$. Jeśli $x = y$, to oczywiście, $\varrho(x, y) = 0$. Jeśli zaś $\varrho(x, y) = 0$, to

$$\max\{2|x_1 - y_1|, 3|x_2 - y_2|\} = 0,$$

czyli $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$. Oznacza to, że $x = y$.

Ad (M2). Oczywiście

$$\varrho(x, y) = \max\{2|x_1 - y_1|, 3|x_2 - y_2|\} =$$
$$\max\{2|y_1 - x_1|, 3|y_2 - x_2|\} = \varrho(y, x).$$

Ad (M3). W dalszym ciągu wykorzystamy łatwą do uzasadnienia nierówność:

$$\max\{a+b, c+d\} \leqslant \max\{a, c\} + \max\{b, d\}$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b, c, d$. Stąd

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{2|x_1 - y_1|, 3|x_2 - y_2|\} =$$

$$\max\{2|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|, 3|x_2 - z_2 + z_2 - y_2|\} \leqslant$$

$$\max\{2|x_1 - z_1| + 2|z_1 - y_1|, 3|x_2 - z_2| + 3|z_2 - y_2|\} \leqslant$$

$$\max\{2|x_1 - z_1|, 3|x_2 - z_2|\} + \max\{2|z_1 - y_1|, 3|z_2 - y_2|\} =$$

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \varrho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}),$$

co kończy dowód warunku trójkąta.

Kulami otwartymi w tej przestrzeni są wnętrza prostokątów o bokach równoległych do osi współrzędnych i których stosunek wysokości do podstawy jest równy 2:3; przykładowo: kulą o środku w początku układu i promieniu 1 jest prostokąt o środku w początku układu i bokach leżących na prostych o równaniach

$$x_2 = \frac{1}{3}, \ x_2 = -\frac{1}{3}, \ x_1 = \frac{1}{2}, \ x_1 = -\frac{1}{2}.$$

**Rozwiązanie zadania 2.39.**

Niech $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ i $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)$ będą dowolnymi punktami zbioru $\mathrm{R}^2$.

Ad (M1). Z postaci funkcji $\varrho$ wynika, że $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant 0$. Jeśli $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, to oczywiście $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Jeśli zaś $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, to $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$, czyli $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$. Oznacza to, że $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Ad (M2). Oczywiście,

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = \varrho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

Ad (M3). Mamy:

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \leqslant$$

$$|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| =$$

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \varrho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}),$$

co kończy dowód warunku trójkąta.

Kule otwarte w tej przestrzeni mają postać wnętrza kwadratów o bokach równoległych do prostych $x_2 = x_1$ i $x_2 = -x_1$.

**Rozwiązanie zadania 2.40.**

Pokażemy, że jest to przestrzeń metryczna. Niech $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ oraz $z = (z_1, z_2)$ będą dowolnymi punktami zbioru $\mathsf{R}^2$.

Ad (M1). Z postaci funkcji $\varrho$ wynika, że $\varrho(x, y) \geqslant 0$.
Jeśli $x = y$, to oczywiście $\varrho(x, y) = 0$.
Jeśli zaś $\varrho(x, y) = 0$, to $3|x_1 - y_1| + \frac{1}{2}|x_2 - y_2| = 0$, czyli $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$. Oznacza to, że $x = y$.

Ad (M2). Oczywiście,

$$\varrho(x, y) = 3|x_1 - y_1| + \frac{1}{2}|x_2 - y_2| = 3|y_1 - x_1| + \frac{1}{2}|y_2 - x_2| = \varrho(y, x).$$

Ad (M3). Mamy:

$$\varrho(x, y) = 3|x_1 - y_1| + \frac{1}{2}|x_2 - y_2| =$$

$$3|x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + \frac{1}{2}|x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \leqslant$$

$$3|x_1 - z_1| + 3|z_1 - y_1| + \frac{1}{2}|x_2 - z_2| + \frac{1}{2}|z_2 - y_2| =$$

$$\varrho(x, z) + \varrho(z, y),$$

co kończy dowód warunku trójkąta.

Kule otwarte w tej przestrzeni mają postać wnętrza rombów o bokach równoległych do prostych $x_2 = 6x_1$ i $x_2 = -6x_1$.

**Rozwiązanie zadania 2.41.**

Niech $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ i $z = (z_1, z_2)$ będą dowolnymi punktami zbioru $\mathsf{R}^2$.

Ad (M1). Z postaci funkcji $\varrho$ wynika, że $\varrho(x, y) \geqslant 0$.
Jeśli $x = y$, to oczywiście $\varrho(x, y) = 0$.
Jeśli zaś $x \neq y$, to

$$\varrho(x, y) = |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| > 0,$$

bowiem przynajmniej jedna z wartości bezwzględnych jest różna od zera.

Ad (M2). Jeśli $x = y$, to $\varrho(x, y) = 0 = \varrho(y, x)$.
Jeśli $x \neq y$, to

$$\varrho(x, y) = |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1| + |x_1| + |y_2 - x_2| = \varrho(y, x).$$

W obu przypadkach $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$, co kończy tę część dowodu.

Ad (M3). Jeśli $x = y$, to oczywiście $\varrho(x,y) = 0$ i

$$\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Jeśli $x \neq y$ i $x = z$, to $y \neq z$ i wtedy

$$\varrho(x,y) = \varrho(z,y) \quad \text{oraz} \quad \varrho(x,z) = 0.$$

Stąd

$$\varrho(x,y) = \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Jeśli teraz $x \neq y$, $x \neq z$ i $z \neq y$, to

$$\varrho(x,y) = |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| \leqslant |x_1| + |z_1| + |z_1| + |y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \leqslant$$

$$|x_1| + |z_1| + |z_1| + |y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| =$$

$$\varrho(x,z) + \varrho(z,y),$$

co kończy dowód warunku trójkąta.

Kulą o środku w początku układu współrzędnych jest wnętrze kwadratu o środku w początku układu i bokach równoległych do prostych $x_2 = x_1$ i $x_2 = -x_1$ i średnicy o długości $2r$.

Niech $a = (a_1, a_2)$ będzie ustalonym punktem, $r$ - dowolną liczbą dodatnią.

Jeśli $|a_1| \leqslant r$, to $K(a,r) = \{a\}$.

Jeśli $|a_1| > r$, to $K(a,r)$ składa się z poziomego odcinka łączącego punkt $a$ z pionową osią współrzędnych i wnętrza kwadratu o środku w punkcie $(0, a_2)$, bokach równoległych do prostych $x_2 = x_1$ i $x_2 = -x_1$ i średnicy $2(r - |a_1|)$.

**Rozwiązanie zadania 2.42.**

Niech $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ i $z = (z_1, z_2)$ będą dowolnymi punktami zbioru $\mathrm{R}^2$.

Ad (M1). Z postaci funkcji $\varrho$ wynika, że $\varrho(x,y) \geqslant 0$.

Jeśli $x = y$, to oczywiście $\varrho(x,y) = 0$.

Jeśli $x \neq y$ i $x_2 = y_2$, to $x_1 \neq y_1$ i

$$\varrho(x,y) = |x_1 - y_1| > 0.$$

Jeśli zaś $x \neq y$ i $x_2 \neq y_2$, to

$$\varrho(x,y) = |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| > 0,$$

bowiem przynajmniej jedna z wartości bezwzględnych jest różna od zera.

Ad (M2). Jeśli $x = y$, to $\varrho(x,y) = 0 = \varrho(y,x)$.

Jeśli $x \neq y$ i $x_2 = y_2$, to

$$\varrho(x,y) = |x_1 - y_1| = |y_1 - x_1| = \varrho(y,x).$$

Jeśli $x \neq y$ i $x_2 \neq y_2$, to

$$\varrho(x,y) = |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1| + |x_1| + |y_2 - x_2| = \varrho(y,x).$$

Zatem we wszystkich przypadkach $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$, co kończy tę część dowodu.

Ad (M3). Jeśli $x = y$, to oczywiście $\varrho(x,y) = 0$ i

$$\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Jeśli $x \neq y$ i $x = z$, to $y \neq z$ i wtedy

$$\varrho(x,y) = \varrho(z,y) \quad \text{oraz} \quad \varrho(x,z) = 0.$$

Stąd

$$\varrho(x,y) = \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Jeśli teraz $x \neq y$, $x \neq z$ i $z \neq y$, to rozważając kilka przypadków zależnych od drugich współrzędnych tych punktów stwierdzamy również, że

$$\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x,z) + \varrho(z,y),$$

co kończy dowód warunku trójkąta.

Kulą o środku w początku układu im promieniu $r$ jest wnętrze kwadratu o środku w początku układu i bokach równoległych do prostych $x_2 = x_1$ i $x_2 = -x_1$ i średnicy o długości $2r$.

Niech $a = (a_1, a_2)$ będzie ustalonym punktem, $r$ – dowolną liczbą dodatnią.

Jeśli $|a_1| \leqslant r$, to kulą $K(a,r)$ jest odcinek poziomy o końcach $(a_1 - r, a_2)$ oraz $(a_1 + r, a_2)$.

Jeśli $|a_1| > r$, to niech $b = (a_1 + r, a_2)$. Wtedy kula $K(a,r)$ składa się z poziomego odcinka łączącego punkt $b$ z pionową osią współrzędnych i wnętrza kwadratu o środku w punkcie $(0, a_2)$, bokach równoległych do prostych $x_2 = x_1$ i $x_2 = -x_1$ i średnicy $2(r - |a_1|)$.

**Rozwiązanie zadania 2.43.**

Niech $I_1, I_2, I_3$ będą dowolnymi elementami zbioru $X$.

Ad (M1). Jeśli $I_1 = I_2$, to $I_1 \Delta I_2 = \emptyset$, więc $\varrho(I_1, I_2) = 0$.

Jeśli natomiast $I_1 \neq I_2$, to $I_1 \triangle I_2 \neq \emptyset$, więc $I_1 \triangle I_2$ jest niezdegenerowanym przedziałem lub sumą dwóch przedziałów niezdegenerowanych, więc o długości dodatniej. Mamy wówczas: $\varrho(I_1, I_2) > 0$.

Ad (M2). Ponieważ $I_1 \triangle I_2 = I_2 \triangle I_1$, więc $\varrho(I_1, I_2) = \varrho(I_2, I_1)$.

Ad (M3). Udowodnimy najpierw inkluzję:

$$I_1 \triangle I_2 \subset I_1 \triangle I_3 \cup I_3 \triangle I_2.$$

Nietrudno dowieść następującej inkluzji: $A \setminus B \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$ dla dowolnych zbiorów $A, B, C$. Wynikają stąd inkluzje:

$$I_1 \setminus I_2 \subset (I_1 \setminus I_3) \cup (I_3 \setminus I_2) \quad \text{oraz} \quad I_2 \setminus I_1 \subset (I_2 \setminus I_3) \cup (I_3 \setminus I_1),$$

i w konsekwencji

$$I_1 \triangle I_2 \subset (I_1 \triangle I_3) \cup (I_3 \triangle I_2).$$

Zatem suma długości przedziałów tworzących zbiór $I_1 \triangle I_2$ nie przekracza sumy długości przedziałów (co najwyżej czterech) tworzących zbiór $(I_1 \triangle I_3) \cup (I_3 \triangle I_2)$, która z kolei nie przekracza sumy długości przedziałów tworzących zbiory $I_1 \triangle I_3$ oraz $I_3 \triangle I_2$ z osobna (niektóre spośród tych przedziałów mogą na siebie zachodzić). Dowodzi to nierówności: $\varrho(I_1, I_2) \leqslant \varrho(I_1, I_3) + \varrho(I_3, I_2)$.

**Rozwiązanie zadania 2.44.**

Niech $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ i $z = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ będą dowolnymi elementami zbioru $l^p$.

Ad (M1). Oczywiście funkcja $\varrho$ przyjmuje tylko wartości nieujemne.
Jeśli $x = y$, to $x_i = y_i$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, zatem $\varrho(x, y) = 0$.
Jeśli $x \neq y$, to istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $x_i \neq y_i$. Stąd wynika nierówność

$$0 < |x_i - y_i| \leqslant \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \varrho(x, y).$$

Ad (M2). Oczywiście,

$$\varrho(x, y) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |y_n - x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \varrho(x, y).$$

Ad (M3). Z nierówności Minkowskiego:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

spełnionej dla dowolnych ciągów liczbowych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ wynika następujący ciąg nierówności:

$$\varrho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-z_n+z_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|z_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\varrho(x,z)+\varrho(z,y).$$

Zatem $l^p$ jest przestrzenią metryczną.

**Rozwiązanie zadania 2.45.**

Pokażemy, że tak. Niech $n$, $m$ i $k$ będą dowolnymi liczbami naturalnymi dodatnimi.

Ad (M1). Jeśli $n=m$, to $\frac{1}{n}=\frac{1}{m}$ i $\varrho(n,m)=0$.
Jeśli $n\neq m$, to $\frac{1}{n}\neq\frac{1}{m}$ i $\varrho(n,m)\neq 0$.

Ad (M2). Oczywiście,

$$\varrho(n,m)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|=\varrho(m,n).$$

Ad (M3). Mamy:

$$\varrho(n,m)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}-\frac{1}{m}\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right|+\left|\frac{1}{k}-\frac{1}{m}\right|=\varrho(n,k)+\varrho(k,m).$$

**Rozwiązanie zadania 2.46.**

Nie jest to przestrzeń metryczna, bowiem $\varrho(1,-1)=0$.
W zbiorze liczb nieujemnych funkcja $\varrho$ jest metryką, co sprawdzimy poniżej.
Niech $x$, $y$, i $z$ będą dowolnymi liczbami nieujemnymi.
Ad (M1). Jeśli $x=y$, to $x^2=y^2$ i $\varrho(x,y)=0$.
Jeśli $x\neq y$, to $x^2\neq y^2$ i $\varrho(x,y)\neq 0$.

Ad (M2). Oczywiście,

$$\varrho(x,y)=\left|x^2-y^2\right|=\left|y^2-x^2\right|=\varrho(y,x).$$

Ad (M3). Mamy:

$$\varrho(x,y)=\left|x^2-y^2\right|=\left|x^2-z^2+z^2-y^2\right|\leqslant$$

$$\left|x^2-z^2\right|+\left|z^2-y^2\right|=\varrho(x,z)+\varrho(z,y).$$

**Rozwiązanie zadania 2.47.**

Nie jest to przestrzeń metryczna: istotnie, $\varrho(2,1)=\left|1-\frac{1}{2}\cdot 2\right|=0$.

**Rozwiązanie zadania 2.48.**

Ponieważ ciąg rzeczywisty jest szczególnym przypadkiem funkcji rzeczywistej, więc zbiór $l^\infty$ jest przestrzenią postaci $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, (patrz zadanie 2.35.) jest więc przestrzenią metryczną.

**Rozwiązanie zadania 2.49.**

Ponieważ

$$\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leqslant 1,$$

więc, na mocy kryterium porównawczego Weierstrassa, wszystkie poniższe szeregi są bezwzględnie zbieżne; wykonalne są zatem wszystkie działania na tych szeregach, które w dalszym ciągu wykorzystujemy.

Niech $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^\infty$, $\boldsymbol{y} = (y_n)_{n=1}^\infty$ i $\boldsymbol{z} = (z_n)_{n=1}^\infty$ będą trzema dowolnymi ciągami ze zbioru $\boldsymbol{s}$.

Ad (M1). Jeśli $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, to $x_n = y_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.
Jeśli $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, to $x_k \neq y_k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, więc

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \geqslant \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} > 0.$$

Ad (M2). Oczywiście,

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|y_n - x_n|}{1 + |y_n - x_n|} = \varrho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

Ad (M3). Rozważmy funkcję $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, dla $t \in [0, \infty)$. Jest ona, jak łatwo sprawdzić, funkcją niemalejącą. Ponieważ dla $a, b \in [0, \infty)$ mamy:

$$\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b},$$

więc dla dowolnych $a, b \in [0, \infty)$ spełniona jest nierówność

$$\varphi(a+b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b).$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ spełnione są nierówności:

$$|x_n - y_n| \leqslant |x_n - z_n| + |z_n - y_n|,$$

więc

$$\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leqslant \varphi(|x_n - y_n| + |z_n - y_n|) \leqslant$$

$$\varphi(|x_n - y_n|) + \varphi(|z_n - y_n|) = \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|}.$$

Stąd już wynikają następujące nierówności:

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|} = \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \varrho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}),$$

co dowodzi nierówności trójkąta.

**Rozwiązanie zadania 2.50.**

Ponieważ wszystkie rozważane tu ciągi są ograniczone, więc na mocy kryterium porównawczego Weierstrassa wszystkie poniższe szeregi są bezwzględnie zbieżne; wykonalne są zatem wszystkie działania na tych szeregach, które w dalszym ciągu wykorzystujemy.

Niech $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ i $\boldsymbol{z} = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ będą dowolnymi ograniczonymi ciągami rzeczywistymi.

Ad (M1). Jeśli $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, to $x_n = y_n$ dla każdego $n \in \mathsf{N}$, więc $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.
Jeśli $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, to $x_k \neq y_k$ dla pewnego $k \in \mathsf{N}$, więc

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot |x_n - y_n| \geqslant \frac{1}{2^k} \cdot |x_k - y_k| > 0.$$

Ad (M2). Oczywiście,

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot |x_n - y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot |y_n - x_n| = \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Ad (M3). Dla każdego $n \in \mathsf{N}$ spełnione są nierówności:

$$|x_n - y_n| = |x_n - z_n + z_n - y_n| \leqslant |x_n - z_n| + |z_n - y_n|.$$

Stąd już wynikają następujące nierówności:

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot |x_n - y_n| \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot |x_n - z_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot |z_n - y_n| = \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \varrho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}),$$

co dowodzi nierówności trójkąta.

**Rozwiązanie zadania 2.51.**

Niech $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ będą dowolnymi elementami ze zbioru $X$.

Ad (M1). Ponieważ $\frac{1}{n} > 0$ dla każdej liczby naturalnej $n$, więc funkcja $\varrho$ jest nieujemna.

Jeśli $x = y$, to bezpośrednio z określenia funkcji $\varrho$ wynika równość $\varrho(x,y) = 0$.

Jeśli teraz $x \neq y$, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $x_k \neq y_k$. Niech

$$n = \inf\{m \in \mathbb{N} : x_m \neq y_m\},$$

wtedy $n \leqslant k$, czyli $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{k}$. Zatem

$$\varrho(x,y) = \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{k} > 0,$$

co dowodzi nierówności $\varrho(x,y) > 0$.

Ad (M2). Jeśli $x = y$, to

$$\varrho(x,y) = 0 = \varrho(y,x).$$

Jeśli $x \neq y$, to

$$\varrho(x,y) = \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \varrho(y,x) = \frac{1}{n},$$

gdzie $n = \inf\{m : x_m \neq y_m\}$.

Ad (M3). Jeśli $x = y$, to $\varrho(x,y) = 0$, więc z nieujemności funkcji $\varrho$ wynika nierówność

$$\varrho(x,x) \leqslant \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Jeśli $x \neq y$ i $x = z$, to

$$\varrho(x,y) = 0 + \varrho(z,y) = \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Jeśli teraz $x \neq y$, $x \neq z$ i $z \neq y$, to niech

$$n_{xy} = \min\{n : x_n \neq y_n\},$$

$$n_{xz} = \min\{n : x_n \neq z_n\},$$

$$n_{zy} = \min\{n : z_n \neq y_n\}.$$

Wówczas

$$\varrho(x,y) = \frac{1}{n_{xy}}, \quad \varrho(x,z) = \frac{1}{n_{xz}} \quad \text{oraz} \quad \varrho(z,y) = \frac{1}{n_{zy}}.$$

Jeśli $n_{xy} \geqslant n_{xz}$ lub $n_{xy} \geqslant n_{zy}$, to oczywiście $\frac{1}{n_{xy}} \leqslant \frac{1}{n_{xz}}$ lub $\frac{1}{n_{xy}} \leqslant \frac{1}{n_{zy}}$, co w obu przypadkach dowodzi nierówności

$$\varrho(x,y) = \frac{1}{n_{xy}} \leqslant \frac{1}{n_{xz}} + \frac{1}{n_{zy}} = \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Jeśli teraz $n_{xy} < n_{xz}$ i $n_{xy} < n_{zy}$, to

$$x_n = y_n \quad \text{dla} \quad n < n_{xy}$$

i $x_{n_{xy}} \neq y_{n_{xy}}$, a ponieważ $n_{xy} < n_{xz}$ i $n_{xy} < n_{zy}$, więc $x_{n_{xy}} = z_{n_{xy}}$ i $z_{n_{xy}} = y_{n_{xy}}$, co jest niemożliwe. Zatem prawdziwa jest przynajmniej jedna z równości:

$$n_{xy} = n_{xz}, \quad n_{xy} = n_{zy}.$$

Dowodzi to następującej relacji:

$$\varrho(x, y) = \frac{1}{n_{xy}} < \frac{1}{n_{xz}} + \frac{1}{n_{zy}} = \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

Rozważenie tych wszystkich przypadków dowodzi nierówności trójkąta.

**Rozwiązanie zadania 2.52.**

Niech $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ i $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ będą trzema dowolnymi elementami zbioru $X$.

Ad (M1). Ponieważ $\frac{1}{n} > 0$ dla każdej liczby naturalnej $n$ i

$$\max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\} \geqslant 0,$$

więc funkcja $\varrho$ jest nieujemna.

Jeśli $x = y$, to bezpośrednio z określenia funkcji $\varrho$ wynika równość

$$\varrho(x, y) = \inf\left\{\frac{1}{n} + \max\{|x_i - y_i| : i \leqslant n\} : n \in \mathrm{N}\right\} =$$

$$\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}\right\} = 0.$$

Jeśli teraz $x \neq y$, to istnieje $k \in \mathrm{N}$ takie, że $x_k \neq y_k$. Niech $r = |x_k - y_k|$. Dla $n < k$ spełniona jest nierówność

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{n} + \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\},$$

a dla $n \geqslant k$ spełniona jest nierówność

$$r < \frac{1}{n} + \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\},$$

zatem

$$\varrho(x, y) = \inf\left\{\frac{1}{n} + \max\{|x_i - y_i| : i \leqslant n\} : n \in \mathrm{N}\right\} \geqslant \min\left\{\frac{1}{k}, r\right\} > 0.$$

Ad (M2). Oczywiście,

$$\varrho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \inf\left\{\frac{1}{n} + \max\{|x_i - y_i| \,:\, i \leqslant n\} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$\inf\left\{\frac{1}{n} + \max\{|y_i - x_i| \,:\, i \leqslant n\} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\} = \varrho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}).$$

Ad (M3). Korzystając z warunku trójkąta dla wartości bezwzględnej i nierówności:

$$\max\{a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n\} \leqslant \max\{a_1, \dots, a_n\} + \max\{b_1, \dots, b_n\}$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, wnioskujemy, że

$$\max\{|x_i - y_i| \,:\, i \leqslant n\} = \max\{|x_i - z_i + z_i - y_i| \,:\, i \leqslant n\} \leqslant$$

$$\max\{|x_i - z_i| + |z_i - y_i| \,:\, i \leqslant n\} \leqslant$$

$$\max\{|x_i - z_i| \,:\, i \leqslant n\} + \max\{|z_i - y_i| \,:\, i \leqslant n\}.$$

Stąd wynika nierówność

$$\frac{1}{n} + \max\{|x_i - y_i| \,:\, i \leqslant n\} \leqslant$$

$$\frac{1}{n} + \max\{|x_i - z_i| \,:\, i \leqslant n\} + \max\{|z_i - y_i| \,:\, i \leqslant n\}.$$

Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej $n$ spełnione są nierówności:

$$\varrho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant \frac{1}{n} + \max\{|x_i - y_i| \,:\, i \leqslant n\},$$

$$\max\{|z_i - y_i| \,:\, i \leqslant n\} \leqslant \max\{|z_i - y_i| \,:\, i \leqslant k\} \text{ dla } k \geqslant n$$

Stąd wynika nierówność

$$\varrho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant \frac{1}{n} + \max\{|x_i - z_i| \,:\, i \leqslant n\} + \frac{1}{k} + \max\{|z_i - y_i| \,:\, i \leqslant k\}$$

dla dowolnych liczb naturalnych $n$ i $k$ spełniających nierówność $k \geqslant n$.

Podobnie można dowieść nierówności

$$\varrho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant \frac{1}{n} + \max\{|x_i - z_i| \,:\, i \leqslant n\} + \frac{1}{k} + \max\{|z_i - y_i| \,:\, i \leqslant k\}$$

dla liczb naturalnych, dla których $k < n$. Tak więc nierówność

$$\varrho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant \frac{1}{n} + \max\{|x_i - z_i| \,:\, i \leqslant n\} + \frac{1}{k} + \max\{|z_i - y_i| \,:\, i \leqslant k\}$$

jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych $n$ i $k$. Z definicji kresu dolnego wynika teraz nierówność

$$\varrho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant \varrho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + \varrho(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}).$$

**Rozwiązanie zadania 2.53.**

Pokażemy, że tak.
Niech $x, y$ i $z$ będą dowolnymi elementami z przedziału $[0,1]$.

Ad (M1). Z określenia funkcji $\varrho$ wynika nierówność $\varrho(x,y) \geqslant 0$.
Niezależnie, czy $x$ jest liczbą wymierną, czy niewymierną, $\varrho(x,x) = 0$.
Jeśli $x \neq y$ i $x - y \in \mathrm{Q}$, to $\varrho(x,y) = |x-y| > 0$.
Jeśli $x \neq y$ i $x - y \notin \mathrm{Q}$, to $\varrho(x,y) = 2 > 0$.

Ad (M2). Jeśli $x - y \in \mathrm{Q}$, to $\varrho(x,y) = |x-y| = |y-x| = \varrho(y,x)$.
Jeśli $x - y \notin \mathrm{Q}$, to $y - x \notin \mathrm{Q}$ i $\varrho(x,y) = 2 = \varrho(y,x)$.
W obu przypadkach spełniona jest więc równość $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$.

Ad (M3). Jeśli $x = y$, to $\varrho(x,y) = 0$, więc z uwagi na nieujemność funkcji $\varrho$ wynika nierówność

$$\varrho(x,y) = 0 \leqslant \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Niech teraz $x \neq y$. Jeśli teraz $x - y \in \mathrm{Q}$, to

$$\varrho(x,y) = |x-y| \leqslant |x-z| + |z-y| \leqslant \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Jeśli $x - y \notin \mathrm{Q}$, to przynajmniej jedna z zależności $x - z \notin \mathrm{Q}$, $z - y \notin \mathrm{Q}$ jest spełniona, czyli $\varrho(x,z) = 2$ lub $\varrho(z,y) = 2$. Zatem

$$\varrho(x,y) = 2 \leqslant \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Ostatecznie otrzymaliśmy nierówność $\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$ dla wszystkich $x, y, z \in [0,1]$. W ten sposób udowodniliśmy wszystkie warunki metryki, czyli $(X,\varrho)$ jest przestrzenią metryczną.

**Rozwiązanie zadania 2.54.**

Rozważmy funkcje $f : [a,b] \longrightarrow \mathrm{R}$, $g : [a,b] \longrightarrow \mathrm{R}$ i $h : [a,b] \longrightarrow \mathrm{R}$ określone następująco:

$$f(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in [a,b],$$
$$g(x) = 7 \quad \text{dla} \quad x \in [a,b],$$
$$h(x) = \frac{7}{b-a}x - \frac{7a}{b-a} \quad \text{dla} \quad x \in [a,b].$$

Należą one do naszego zbioru i

$$\varrho(f,g) = \max\{1,7\} = 7, \quad \varrho(h,g) = \max\{1,0\} = 1$$

oraz

$$\varrho(f,h) = \max\{1, \min\{|f(x) - h(x)| : x \in [a,b]\}\} = \max\{1,0\} = 1.$$

Tak więc nierówność

$$\varrho(f,g) = 7 > 1 + 1 = \varrho(f,h) + \varrho(h,g)$$

zaprzecza warunkowi (M3) metryki.

**Rozwiązanie zadania 2.55.**

Niech $f, g$ i $h$ będą dowolnymi funkcjami ciągłymi na przedziale $[a, b]$.

Ad (M1). Z własności całki wynika nierówność

$$\varrho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \geqslant 0.$$

Ponadto

$$\varrho(f, f) = \int_a^b |f(x) - f(x)|dx = \int_a^b 0 \cdot dx = 0.$$

Jeśli $f \neq g$, to z założenia ciągłości funkcji $f$ i $g$ wnioskujemy, że

$$|f(x) - g(x)| > \alpha$$

dla pewnej liczby dodatniej $\alpha$ i każdego $x$ z pewnego niezdegenerowanego przedziału $[c, d] \subset [a, b]$. Wtedy

$$\varrho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \geqslant \int_c^d |f(x) - g(x)|dx \geqslant \alpha \cdot (d - c) > 0.$$

Ad (M2). Oczywiście,

$$\varrho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx = \varrho(g, f).$$

Ad (M3). Z nierówności

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

dla wszystkich $x \in [a, b]$ i własności całki wynika

$$\varrho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \leqslant$$

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|dx + \int_a^b |h(x) - g(x)|dx = \varrho(f, h) + \varrho(h, g),$$

co dowodzi nierówności trójkąta.

**Rozwiązanie zadania 2.56.**

Niech $x, y$ i $z$ będą dowolnymi elementami zbioru $X$.

Ad (M1). Równość $\varrho^*(x, y) = 0$ jest równoważna równości $\varrho(x, y) = 0$, a ponieważ funkcja $\varrho$ jest metryką, więc ta ostatnia równość jest równoważna warunkowi $x = y$.

Ad (M2). Z faktu, że $\varrho$ jest metryką wynikają następujące równości:

$$\varrho^{\star}(x,y)=\frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)}=\frac{\varrho(y,x)}{1+\varrho(y,x)}=\varrho^{\star}(y,x).$$

Ad (M3). Oszacujemy wartość wyrażenia

$$\varrho^{\star}(x,z)+\varrho^{\star}(z,y)-\varrho^{\star}(x,y).$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy równość

$$\varrho^{\star}(x,z)+\varrho^{\star}(z,y)-\varrho^{\star}(x,y)=$$

$$\frac{\varrho(x,z)+\varrho(z,y)-\varrho(x,y)+2\varrho(x,z)\varrho(z,y)+\varrho(x,y)\varrho(x,z)\varrho(z,y)}{(1+\varrho(x,z))(1+\varrho(z,y))(1+\varrho(x,y))}.$$

Wiadomo, że metryka (w tym przypadku funkcja $\varrho$) jest nieujemna, zatem licznik powyższego wyrażenia jest nie mniejszy niż

$$\varrho(x,z)+\varrho(z,y)-\varrho(x,y),$$

a to z kolei ma też wartość nieujemną. Mianownik jest dodatni, więc

$$\varrho^{\star}(x,z)+\varrho^{\star}(z,y)-\varrho^{\star}(x,y)\geqslant 0,$$

a to dowodzi warunku trójkąta dla funkcji $\varrho^{\star}$.

**Rozwiązanie zadania 2.57.**

Niech $x,y$ i $z$ będą dowolnymi elementami zbioru $X$.

Ad (M1). Równość $\varrho^{\star}(x,y)=0$ jest równoważna równości $\varrho(x,y)=0$, a ponieważ funkcja $\varrho$ jest metryką, więc ta ostatnia równość jest równoważna warunkowi $x=y$.

Ad (M2). Z faktu, że $\varrho$ jest metryką wynikają następujące równości:

$$\varrho^{\star}(x,y)=a\cdot\varrho(x,y)=a\cdot\varrho(y,x)=\varrho^{\star}(y,x).$$

Ad (M3).

$$\varrho^{\star}(x,y)=a\cdot\varrho(x,y)\leqslant a\cdot\varrho(x,z)+a\cdot\varrho(z,y)=\varrho^{\star}(x,z)+\varrho^{\star}(z,y).$$

**Rozwiązanie zadania 2.58.**

Niech $x,y$ i $z$ będą dowolnymi elementami zbioru $X$.

Ad (M1). Oczywiście, $\varrho^{\star}(x,x)=\min\{1,\varrho(x,x)\}=\min\{1,0\}=0$.
Jeśli $x\neq y$, to $\varrho(x,y)>0$ i $\varrho^{\star}(x,y)=\min\{1,\varrho(x,y)\}>0$. Dowodzi to pierwszego warunku metryki.

Ad (M2). Oczywiście,

$$\varrho^*(x,y) = \min\{1, \varrho(x,y)\} = \min\{1, \varrho(y,x)\} = \varrho^*(y,x).$$

Ad (M3). Znana jest nierówność

$$\min\{a, b+c\} \leqslant \min\{a,b\} + \min\{a,c\}$$

dla dowolnych liczb nieujemnych. Wykorzystując ją otrzymujemy następujące zależności:

$$\varrho^*(x,y) = \min\{1, \varrho(x,y)\} \leqslant$$

$$\min\{1, \varrho(x,z)\} + \min\{1, \varrho(z,y)\} = \varrho^*(x,z) + \varrho^*(z,y).$$

**Rozwiązanie zadania 2.59.**

Niech $x, y$ i $z$ będą dowolnymi elementami zbioru $X$.

Ad (M1). Oczywiście, $\varrho^*(x,x) = 0$.
Jeśli $x \neq y$, to $x \neq x_0$ lub $y \neq x_0$ i wtedy $\varrho^*(x,y) = \varrho(x,x_0) + \varrho(y,x_0) > 0$.
Dowodzi to pierwszego warunku metryki.

Ad (M2). Jeśli $x = y$, to $\varrho^*(x,y) = 0 = \varrho^*(y,x)$.
Jeśli $x \neq y$, to

$$\varrho^*(x,y) = \varrho(x,x_0) + \varrho(y,x_0) = \varrho(y,x_0) + \varrho(x,x_0) = \varrho^*(y,x).$$

Ad (M3). Jeśli $x = y$, to $\varrho^*(x,y) = 0$ i z nieujemności funkcji $\varrho^*$ wynika nierówność

$$\varrho^*(x,y) = 0 \leqslant \varrho^*(x,z) + \varrho^*(z,y).$$

Jeśli $x \neq y$ i $z = y$, to

$$\varrho^*(x,y) = \varrho^*(x,z) + 0 = \varrho^*(x,z) + \varrho^*(z,y).$$

Jeśli $x \neq y$ i $x = z$, to

$$\varrho^*(x,y) = 0 + \varrho^*(z,y) = \varrho^*(x,z) + \varrho^*(z,y).$$

Niech na koniec $x \neq y$, $x \neq z$ i $z \neq y$. Wtedy

$$\varrho^*(x,y) = \varrho(x,x_0) + \varrho(y,x_0) <$$

$$\varrho(x,x_0) + \varrho(z,x_0) + \varrho(z,x_0) + \varrho(y,x_0) = \varrho^*(x,z) + \varrho^*(z,y),$$

co dowodzi nierówności trójkąta.

**Rozwiązanie zadania 2.60.**

Niech $x, y$ i $z$ będą dowolnymi elementami zbioru $X$.

Ad (M1). Równość $\varrho^*(x,y) = f(\varrho(x,y)) = 0$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $\varrho(x,y) = 0$, a ponieważ funkcja $\varrho$ jest metryką, więc ta ostatnia równość jest równoważna $x = y$.

Ad (M2). Z faktu, że $\varrho$ jest metryką wynikają następujące równości:

$$\varrho^*(x,y) = f(\varrho(x,y)) = f(\varrho(y,x)) = \varrho^*(y,x).$$

Ad (M3). Na podstawie założeń o funkcji $f$ wnioskujemy, że

$$\varrho^*(x,y) = f(\varrho(x,y)) \leqslant f(\varrho(x,z) + \varrho(z,y)) \leqslant$$
$$f(\varrho(x,z)) + f(\varrho(z,y)) = \varrho^*(x,z) + \varrho^*(z,y).$$

**Rozwiązanie zadania 2.61.**

Niech $x, y$ i $z$ będą dowolnymi elementami zbioru $X$.

Ad (M1). Z określenia funkcji $\varrho^*$ wynika jej nieujemność.
Oczywiście, $\varrho^*(x,x) = 0$.
Jeśli $x \neq y$, to

$$x \neq f(x) \text{ lub } f(x) \neq f(y) \text{ lub } y \neq f(y).$$

Zatem

$$\varrho^*(x,y) = \varrho(x, f(x)) + \varrho(f(x), f(y)) + \varrho(f(y), y) > 0,$$

gdyż przynajmniej jeden z powyższych składników jest dodatni.

Ad (M2). Jeśli $x = y$, to $\varrho^*(x,y) = 0 = \varrho^*(y,x)$.
Jeśli $x \neq y$, to

$$\varrho^*(x,y) = \varrho(x, f(x)) + \varrho(f(x), f(y)) + \varrho(f(y), y) =$$
$$\varrho(y, f(y)) + \varrho(f(y), f(x)) + \varrho(f(x), x) = \varrho^*(y,x).$$

Ad (M3). Jeśli $x = y$, to

$$\varrho^*(x,y) = 0 \leqslant \varrho^*(x,z) + \varrho^*(z,y)$$

z uwagi na nieujemność funkcji $\varrho^*$.
Jeśli $x \neq y$ i $z = y$, to

$$\varrho^*(x,y) = \varrho^*(x,z) + 0 = \varrho^*(x,z) + \varrho^*(z,y).$$

Jeśli $x \neq y$ i $x = z$, to

$$\varrho^*(x,y) = 0 + \varrho^*(z,y) = \varrho^*(x,z) + \varrho^*(z,y).$$

Niech na koniec $x \neq y$, $x \neq z$ i $z \neq y$. Wtedy

$$\begin{aligned}\varrho^*(x,y) = \varrho(x,f(x)) + \varrho(f(x),f(y)) + \varrho(f(y),y) \leqslant \\ \varrho(x,f(x)) + \varrho(f(x),f(z)) + \varrho(f(z),z) + \\ \varrho(z,f(z)) + \varrho(f(z),f(y)) + \varrho(f(y),y) = \\ \varrho^*(x,z) + \varrho^*(z,y),\end{aligned}$$

co dowodzi nierówności trójkąta.

**Rozwiązanie zadania 2.62.**

Niech $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ i $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)$ będą dowolnymi elementami zbioru $X_1 \times X_2$.

Ad (M1). Oczywiście, z uwagi na nieujemność obu metryk $\varrho_1$ i $\varrho_2$, wynika nierówność

$$\varrho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1,y_1) + \varrho_2^2(x_2,y_2)} \geqslant 0.$$

Bezpośrednio z określenia funkcji $\varrho$ wnioskujemy, że $\varrho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$.
Jeśli $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, to $x_1 \neq y_1$ lub $x_2 \neq y_2$. Stąd wynika

$$\varrho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1,y_1) + \varrho_2^2(x_2,y_2)} > 0.$$

Ad (M2). Oczywiście,

$$\varrho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1,y_1) + \varrho_2^2(x_2,y_2)} = \sqrt{\varrho_1^2(y_1,x_1) + \varrho_2^2(y_2,x_2)} = \varrho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}).$$

Ad (M3). Najpierw udowodnimy następującą nierówność

$$\sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2} \leqslant \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+d^2}$$

dla dowolnych liczb nieujemnych $a, b, c$ i $d$. Oczywiście, $(ad-bc)^2 \geqslant 0$. Zatem $2abcd \leqslant a^2d^2 + b^2c^2$. Dodając stronami $a^2b^2 + c^2d^2$, otrzymujemy nierówność

$$(ab+cd)^2 \leqslant (a^2+c^2)\cdot(b^2+d^2),$$

czyli

$$(ab+cd) \leqslant \sqrt{(a^2+c^2)\cdot(b^2+d^2)}.$$

Stąd wynika

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2cd \leqslant a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+c^2)\cdot(b^2+d^2)},$$

czyli

$$(a+b)^2+(c+d)^2 \leqslant \left(\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}\right)^2.$$

Stąd już bezpośrednio otrzymujemy zapowiedzianą nierówność.

Ostatecznie mamy (korzystając z poprzednio udowodnionej nierówności):

$$\varrho(x,y)=\sqrt{\varrho_1^2(x_1,y_1)+\varrho_2^2(x_2,y_2)} \leqslant$$

$$\sqrt{(\varrho_1(x_1,z_1)+\varrho_1(z_1,y_1))^2+(\varrho_2(x_2,z_2)+\varrho_2(z_2,y_2))^2} \leqslant$$

$$\sqrt{\varrho_1^2(x_1,z_1)+\varrho_2^2(x_2,z_2)}+\sqrt{\varrho_1^2(z_1,y_1)+\varrho_2^2(z_2,y_2)}=$$

$$\varrho(x,z)+\varrho(z,y).$$

Tak więc $(X,\varrho)$ jest przestrzenią metryczną. ◀

**Rozwiązanie zadania 2.63.**

Niech $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ i $z=(z_1,z_2)$ będą dowolnymi elementami zbioru $X_1 \times X_2$.

Ad (M1). Oczywiście, z uwagi na nieujemność obu metryk $\varrho_1$ i $\varrho_2$, wynika nierówność

$$\varrho(x,y)=\varrho_1(x_1,y_1)+\varrho_2(x_2,y_2) \geqslant 0.$$

Bezpośrednio z określenia funkcji $\varrho$ wnioskujemy, że

$$\varrho(x,x)=\varrho_1(x_1,x_1)+\varrho_2(x_2,x_2)=0.$$

Jeśli $x \neq y$, to $x_1 \neq y_1$ lub $x_2 \neq y_2$. Stąd wynika

$$\varrho(x,y)=\varrho_1(x_1,y_1)+\varrho_2(x_2,y_2)>0.$$

Ad (M2). Oczywiście,

$$\varrho(x,y)=\varrho_1(x_1,y_1)+\varrho_2(x_2,y_2)=\varrho_1(y_1,x_1)+\varrho_2(y_2,x_2)=\varrho(y,x).$$

Ad (M3). Z warunku trójkąta dla obu metryk $\varrho_1$ i $\varrho_2$ wynikają następujące nierówności:

$$\varrho(x,y)=\varrho_1(x_1,y_1)+\varrho_2(x_2,y_2) \leqslant$$

$$\varrho_1(x_1,z_1)+\varrho_1(z_1,y_1)+\varrho_2(x_2,z_2)+\varrho_2(z_2,y_2)=$$

$$\varrho(x,z)+\varrho(z,y).$$

Tak więc $(X,\varrho)$ jest przestrzenią metryczną.

**Rozwiązanie zadania 2.64.**

Niech $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ i $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)$ będą dowolnymi elementami zbioru $X_1 \times X_2$.

Ad (M1). Oczywiście, z uwagi na nieujemność obu metryk $\varrho_1$ i $\varrho_2$ wynika nierówność

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2)\} \geqslant 0.$$

Bezpośrednio z określenia funkcji $\varrho$ wnioskujemy, że

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \max\{\varrho_1(x_1, x_1), \varrho_2(x_2, x_2)\} = 0.$$

Jeśli $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, to $x_1 \neq y_1$ lub $x_2 \neq y_2$. Stąd wynika

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2)\} > 0.$$

Ad (M2). Z warunku (M2) dla obu metryk $\varrho_1$ i $\varrho_2$ wynikają następujące równości:

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2)\} =$$

$$\max\{\varrho_1(y_1, x_1), \varrho_2(y_2, x_2)\} = \varrho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

Ad (M3). W dalszym ciągu wykorzystamy łatwą do uzasadnienia nierówność

$$\max\{a + b, c + d\} \leqslant \max\{a, c\} + \max\{b, d\}$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b, c, d$.

Z warunku trójkąta dla obu metryk $\varrho_1$ i $\varrho_2$ i powyższej nierówności wynikają następujące nierówności:

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2)\} \leqslant$$

$$\max\{\varrho_1(x_1, z_1) + \varrho_1(z_1, y_1), \varrho_2(x_2, z_2) + \varrho_2(z_2, y_2)\} \leqslant$$

$$\max\{\varrho_1(x_1, z_1), \varrho_2(x_2, z_2)\} + \max\{\varrho_1(z_1, y_1), \varrho_2(z_2, y_2)\} =$$

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \varrho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}).$$

Tak więc $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną.

**Rozwiązanie zadania 2.65.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną i $K(a, r)$ dowolną kulą w tej przestrzeni. Dla dowolnych $x, y \in K(a, r)$ spełnione są nierówności:

$$\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, a) + \varrho(a, y) < r + r = 2r,$$

zatem również

$$\delta(K(a,r)) = \sup\{\varrho(x,y) \, : \, x,y \in K(a,r)\} \leqslant 2r.$$

Stąd już wynika, że kula jest zbiorem ograniczonym.

Jeśli $\overline{K}(a,r)$ jest kulą domkniętą, to dla dowolnych $x,y \in \overline{K}(a,r)$ spełnione są nierówności:

$$\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x,a) + \varrho(a,y) \leqslant r + r = 2r,$$

zatem również

$$\delta(\overline{K}(a,r)) = \sup\left\{\varrho(x,y) \, : \, x,y \in \overline{K}(a,r)\right\} \leqslant 2r.$$

Niech $(X,\varrho)$ będzie niejednoelementową przestrzenią z metryką zero-jedynkową. Wówczas dla każdego elementu $a \in X$

$$K(a,1) = \{a\} \quad \text{i} \quad \delta(K(a,1)) = 0 < 2.$$

**Rozwiązanie zadania 2.66.**

Dowolne elementy $a$, $b$ zbioru $A$ należą też do zbioru $B$, więc

$$\varrho(a,b) \leqslant \sup\{\varrho(x,y) \, : \, x,y \in B\}.$$

Z dowolności wyboru elementów $a$ i $b$ wynika nierówność

$$\delta(A) = \sup\{\varrho(x,y) \, : \, x,y \in A\} \leqslant \sup\{\varrho(x,y) \, : \, x,y \in B\} = \delta(B).$$

**Rozwiązanie zadania 2.67.**

Załóżmy najpierw, że zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej $(X,\varrho)$ jest ograniczony. Niech $a$ będzie ustalonym elementem zbioru $A$ i $r$ – średnicą tego zbioru. Wówczas $\varrho(x,a) \leqslant \delta(A) < r+1$ dla każdego $x \in A$. Stąd wnioskujemy, że

$$A \subset K(a,r+1),$$

czyli zbiór $A$ jest podzbiorem pewnej kuli.

Załóżmy teraz, że zbiór $A$ jest podzbiorem pewnej kuli, powiedzmy kuli $K(a,r)$. Wtedy, na mocy zadania 2.65, $\delta(A) \leqslant 2r < \infty$, co oznacza, że zbiór $A$ jest ograniczony.

**Rozwiązanie zadania 2.68.**

Niech $x$ i $y$ będą dowolnymi elementami zbioru $A \cup B$. Z założenia istnieje element $a \in A \cap B$.

Jeśli $x,y \in A$, to $\varrho(x,y) \leqslant \delta(A) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.

Jeśli $x,y \in B$, to $\varrho(x,y) \leqslant \delta(B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.

Jeśli teraz $x \in A$ i $y \in B$, to

$$\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x,a) + \varrho(a,y) \leqslant \delta(A) + \delta(B).$$

W każdym więc przypadku spełniona jest nierówność

$$\varrho(x,y) \leqslant \delta(A) + \delta(B),$$

czyli również

$$\delta(A \cup B) = \sup\{\varrho(x,y) \; : \; x, y \in A \cup B\} \leqslant \delta(A) + \delta(B).$$

**Rozwiązanie zadania 2.69.**

Nie wynika. Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną niejednoelementową. Jeśli $a$ i $b$ są różnymi elementami zbioru $X$, to $\delta(\{a\}) = 0$, i $\delta(\{b\}) = 0$, natomiast $\delta(\{a,b\}) = \varrho(a,b) > 0$.

**Rozwiązanie zadania 2.70.**

Pierwsza z nierówności nie jest spełniona dla zbiorów z poprzedniego zadania.
Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną z metryką zero-jedynkową. Jeśli $a$ i $b$ są różnymi elementami zbioru $X$, to niech $A = B = \{a, b\}$. Wtedy

$$\delta(A) = \delta(\{a,b\}) = \varrho(a,b) \quad \text{i} \quad \delta(B) = \delta(\{a,b\}) = \varrho(a,b),$$

zatem

$$\delta(A \cup B) = \varrho(a,b) < \varrho(a,b) + \varrho(a,b) = \delta(A) + \delta(B).$$

**Rozwiązanie zadania 2.71.**

Jeśli zbiory $A$ i $B$ nie są rozłączne, to (na mocy zadania 2.68) mamy:

$$\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B) \leqslant \delta(A) + \delta(B) + \varrho(A,B).$$

Załóżmy teraz, że $A \cap B = \emptyset$.
Niech $a$ i $b$ będą dowolnymi elementami zbioru $A \cup B$.
Jeśli $a, b \in A$, to

$$\varrho(a,b) \leqslant \delta(A) \leqslant \delta(A) + \varrho(A,B) + \delta(B).$$

Podobnie, jeśli $a, b \in B$, to

$$\varrho(a,b) \leqslant \delta(B) \leqslant \delta(A) + \varrho(A,B) + \delta(B).$$

Niech teraz $a \in A$ i $b \in B$. Dla dowolnych $c \in A$ i $d \in B$ spełniona jest nierówność

$$\varrho(a,b) \leqslant \varrho(a,c) + \varrho(c,d) + \varrho(d,b),$$

a zatem

$$\varrho(a,b) \leqslant \delta(A) + \varrho(c,d) + \delta(B).$$

Z dowolności wyboru elementów $c$ i $d$ i własności kresu dolnego wynika nierówność

$$\varrho(a,b) \leqslant \delta(A) + \varrho(A,B) + \delta(B);$$

Ponownie korzystając z własności kresu (tym razem górnego) i nierówności udowodnionych powyżej otrzymujemy ostatecznie nierówność

$$\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \varrho(A,B) + \delta(B).$$

**Rozwiązanie zadania 2.72.**

Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą zbiorami ograniczonymi. Istnieją punkty

$$a_1, \ldots, a_n \text{ i liczby } r_1, \ldots, r_n$$

takie, że

$$A_1 \subset K(a_1, r_1), \ldots, A_n \subset K(a_n, r_n).$$

Niech teraz

$$r = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$$

i

$$d = \max\{\varrho(a_i, a_j) \ : \ i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Oczywiście $r < \infty$ i $d < \infty$. Zauważmy, że

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_n \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(a_i, r_i),$$

zatem na podstawie zadania 2.71

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) \leqslant 2r + d.$$

**Rozwiązanie zadania 2.73.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie niejednoelementową przestrzenią z metryką zero-jedynkową. Jeśli $a$ i $b$ są dwoma różnymi elementami tej przestrzeni, to $K(a,2) = X = K(b,3)$.

**Rozwiązanie zadania 2.74.**

Przedział $[0,1)$ jest podzbiorem przestrzeni metrycznej zbioru liczb rzeczywistych z naturalną metryką, więc sam też jest przestrzenią metryczną. Dla tej przestrzeni

$$K\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad \text{natomiast } K\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) = \left[0, \frac{7}{12}\right).$$

**Rozwiązanie zadania 2.75.**

Przypuśćmy, że istnieją kule $A = K(a, s)$ i $B = K(b, t)$ takie, że

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \subset K(x_0, r), \quad B \subset K(x_0, r), \quad r < s \quad \text{i} \quad r < t.$$

Wynika stąd, że $a, b \in K(x_0, r)$, zatem

$$\varrho(a, x_0) < r < s \quad \text{i} \quad \varrho(b, x_0) < r < t.$$

Tak więc $x_0 \in A \cap B$, co jest sprzeczne z rozłącznością zbiorów $A$ i $B$.

**Rozwiązanie zadania 2.76.**

Niech $A$ będzie dowolnym zbiorem niepustym. Jeśli jest on nieograniczony, to i jego domknięcie też, zatem obie średnice są równe $+\infty$.

Jeśli zbiór $A$ jest jednoelementowy, to jego domknięcie jest jemu równe i takie też są ich średnice.

Jeśli zbiór $A$ jest ograniczony i niejednoelementowy, to niech $d > 0$ będzie średnicą zbioru $\overline{A}$ i $\varepsilon$ dowolną liczbą dodatnią. Dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieją punkty $x_n \in \overline{A}$ i $y_n \in \overline{A}$ takie, że

$$\varrho(x_n, y_n) > d - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Z własności domknięcia wnioskujemy, że dla każdego naturalnego $n$ istnieją punkty $u_n \in A$ i $v_n \in A$ takie, że

$$\varrho(x_n, u_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \quad \text{i} \quad \varrho(y_n, v_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}.$$

Stąd wynika nierówność

$$\varrho(u_n, v_n) > d - \frac{\varepsilon}{2^n},$$

czyli

$$\delta(A) = \sup\{\varrho(a, b) : a, b \in A\} \geqslant d.$$

Ponieważ $\delta(A) \leqslant d$, więc otrzymujemy stąd równość

$$\delta(\overline{A}) = \delta(A).$$

**Rozwiązanie zadania 2.77.**

Zauważmy najpierw, że zbiór $A(r)$ jest sumą pewnej rodziny kul otwartych, więc na mocy własności zbiorów otwartych jest on zbiorem otwartym.

Niech $\delta(A) = d$. Pokażemy, że $\delta(A(r)) \leqslant d + 2r$.

Dla dowolnych elementów $x$ i $y$ ze zbioru $A(r)$ istnieją $u \in A$ i $v \in A$ takie, że $x \in K(u, r)$ i $y \in K(v, r)$. Stąd wynikają następujące nierówności:

$$\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, u) + \varrho(u, v) + \varrho(v, y) < r + d + r.$$

Tak więc zbiór $A(r)$ jest ograniczony.

**Rozwiązanie zadania 2.78.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią $\mathsf{R}^2$ z metryką euklidesową. Rozważmy zbiory:

$$A = \left\{\left(-x, \frac{1}{x}\right) \in \mathsf{R}^2 : x \in (0, \infty)\right\},$$

$$B = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \in \mathsf{R}^2 : x \in (0, \infty)\right\}.$$

Zbiory te są domknięte i rozłączne, natomiast ich odległość jest równa 0.

**Rozwiązanie zadania 2.79.**

Niech $x_1$ będzie dowolnym elementem przestrzeni $X$. Kula $K(x_1, 1)$ jest ograniczona, więc istnieje punkt $x_2$ taki, że

$$x_2 \in X \setminus K(x_1, 1).$$

Ponieważ zbiór $K(x_1, 1) \cup K(x_2, 1)$ jest zbiorem ograniczonym, więc istnieje

$$x_3 \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{2} K(x_i, 1).$$

Postępując tak dalej, otrzymujemy nieskończony ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów przestrzeni $X$ taki, że

$$x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, 1) \quad \text{dla} \quad n \in \mathsf{N}.$$

Wynikają stąd nierówności

$$\varrho(x_i, x_j) \geqslant 1 \quad \text{dla} \quad i \neq j, \quad i, j \in \mathsf{N},$$

co kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 2.80.**

Załóżmy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do pewnego punktu $x \in X$. Istnieje indeks $n_0 \in \mathsf{N}$ taki, że

$$\varrho(x_n, x) < 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Oznacza to, że

$$x_n = x \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Wnioskujemy stąd, że ciąg zbieżny musi być ciągiem stałym od pewnego miejsca.

Prawdziwa jest również i zależność odwrotna, mianowicie każdy ciąg prawie stały, tzn. stały od pewnego miejsca, jest zbieżny.

**Rozwiązanie zadania 2.81.**

Ponieważ $K(a,1) = \{a\}$, więc każdy zbiór $A$ w przestrzeni z metryką zero-jedynkową jest otwarty, bowiem

$$A = \bigcup_{a \in A} K(a,1),$$

czyli jest sumą pewnej rodziny kul otwartych. Zatem każdy podzbiór tej przestrzeni jest domknięty. Stąd wnioskujemy, że

$$\mathrm{Int}\,(A) = A, \quad \overline{A} = A.$$

Z tych równości wynika też $\mathrm{Fr}\,(A) = \emptyset$.

**Rozwiązanie zadania 2.82.**

Rozważmy najpierw przestrzeń $l^p$, gdy $p > 1$. Niech $\Theta = (0, 0, \ldots)$.

Ad (1). Ciąg nie jest ograniczony, gdyż

$$\varrho\left(x^{(n)}, \Theta\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{n^{p+1}} = n \cdot \sqrt[p]{n}.$$

Nie jest więc to ciąg zbieżny.

Ad (2). Ciąg nie jest ograniczony, gdyż

$$\varrho\left(x^{(n)}, \Theta\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} 1^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{n}.$$

Nie jest więc to ciąg zbieżny.

Ad (3). Ciąg jest zbieżny do punktu $\Theta$, gdyż

$$\varrho\left(x^{(n)}, \Theta\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{n}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{n\left(\frac{1}{n}\right)^p} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt[p]{n}.$$

Rozważmy teraz przestrzeń $l^1$.

Ad (1). Ciąg nie jest ograniczony, gdyż

$$\varrho\left(x^{(n)}, \Theta\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)}\right| = \sum_{k=1}^{n} n = n^2,$$

gdzie $\Theta = (0, 0, \ldots)$. Nie jest więc to ciąg zbieżny.

Ad (2). Ciąg nie jest ograniczony, gdyż

$$\varrho\left(x^{(n)},\Theta\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}\right|=\sum_{k=1}^{n}1=n,$$

gdzie $\Theta=(0,0,\ldots)$. Nie jest więc to ciąg zbieżny.

Ad (3). Ciąg nie jest zbieżny, gdyż nie spełnia warunku Cauchy'ego. Dla każdego $n\in\mathsf{N}$ mamy:

$$\varrho\left(x^{(2n)},x^{(n)}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(2n)}-x_k^{(n)}\right|=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right|+\sum_{k=n+1}^{2n}\left|\frac{1}{2n}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Rozważmy teraz przestrzeń $l^{\infty}$.

Ad (1). Ciąg nie jest ograniczony, gdyż

$$\varrho\left(x^{(n)},\Theta\right)=\sup\left\{\left|x_k^{(n)}-0\right|\ :\ n\in\mathsf{N}\right\}=n.$$

Nie jest więc to ciąg zbieżny.

Ad (2). Ciąg nie jest zbieżny, gdyż nie spełnia warunku Cauchy'go. Istotnie, dla każdego $n\in\mathsf{N}$

$$\varrho\left(x^{(n)},x^{(n+1)}\right)=1.$$

Ad (3). Ciąg jest zbieżny do punktu $\Theta$, gdyż

$$\varrho\left(x^{(n)},\Theta\right)=\sup\left\{\left|x_k^{(n)}-0\right|\ :\ k\in\mathsf{N}\right\}=\sup\left\{\left|\frac{1}{n}-0\right|\right\}=\frac{1}{n}.$$

**Rozwiązanie zadania 2.83.**

Załóżmy, że ciąg funkcji $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do funkcji $f$ w metryce $\varrho$. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje liczba $n_0\in\mathsf{N}$ taka, że

$$\varrho(f_n,f)<\varepsilon\quad\text{dla}\quad n\geqslant n_0.$$

Z powyższej zależności wynika nierówność

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)|\ :\ x\in E\}<\varepsilon\quad\text{dla}\quad n\geqslant n_0,$$

czyli

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\quad\text{dla}\quad n\geqslant n_0\quad\text{i}\quad x\in E.$$

Wynika stąd jednostajna zbieżność ciągu funkcji $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ do funkcji $f$.

Niech teraz ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f$ i niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0 \quad \text{i} \quad x \in E.$$

Z powyższej zależności wynika nierówność

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in E\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0,$$

czyli

$$\varrho(f_n, f) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

**Rozwiązanie zadania 2.84.**

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x_n = (\xi_n, \eta_n)$ będzie ustalonym ciągiem punktów w rozważanej przestrzeni i niech $\Theta = (0,0)$ będzie początkiem układu współrzędnych.

Zauważmy, że jeśli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $\Theta$, to

$$\varrho(x_n, \Theta) \longrightarrow 0,$$

$$|\xi_n| + |\eta_n| \longrightarrow 0,$$

czyli oba ciągi $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(\eta_n)_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne do zera.

Odwrotnie, jeśli oba ciągi $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(\eta_n)_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne do zera, to również

$$\varrho(x_n, \Theta) \longrightarrow 0,$$

czyli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do początku układu.

Niech teraz $x$ będzie postaci $x = (0, \eta)$, gdzie $\eta \neq 0$. Jeśli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$, to

$$\varrho(x_n, x) = |\xi_n| + |\eta_n - \eta| \longrightarrow 0,$$

czyli

$$|\xi_n| \longrightarrow 0 \quad \text{i} \quad |\eta_n - \eta| \longrightarrow 0.$$

Wnioskujemy stąd, że

$$\xi_n \longrightarrow 0 \quad \text{i} \quad \eta_n \longrightarrow \eta.$$

Odwrotnie, jeśli ciągi $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(\eta_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniają warunek

$$\xi_n \longrightarrow 0 \quad \text{i} \quad \eta_n \longrightarrow \eta,$$

to

$$\varrho(x_n, x) = |\xi_n| + |\eta_n - \eta| \longrightarrow 0,$$

czyli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$.

Niech teraz $x$ będzie postaci $x = (\xi, \eta)$, gdzie $\xi \neq 0$, a ponadto niech $\varepsilon$ będzie liczbą dodatnią spełniającą nierówność $0 < \varepsilon < |\xi|$. Jeśli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$, to z uwagi na fakt

$$K(x, \varepsilon) = \{x\},$$

istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$x_n = x \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Oczywiście każdy ciąg prawie stały (stały od pewnego miejsca) jest zbieżny. Rozważyliśmy w ten sposób wszystkie przypadki.

**Rozwiązanie zadania 2.85.**

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje wskaźnik $n_0 \in \mathbb{N}$ taki, że

$$\varrho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieje element $y_n \in A$ taki, że

$$\varrho(x_n, y_n) < \varrho(x_n, A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teraz wnioskujemy, że dla $n \geqslant n_0$ spełnione są równości:

$$\varrho(x_0, A) \leqslant \varrho(x_0, y_n) \leqslant \varrho(x_0, x_n) + \varrho(x_n, y_n) <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \varrho(x_n, A) + \frac{\varepsilon}{2} = \varrho(x_n, A) + \varepsilon.$$

Podobnie dowodzi się, że dla $n \geqslant n_0$ spełniona jest nierówność

$$\varrho(x_n, A) \leqslant \varrho(x_0, A) + \varepsilon,$$

z czego wynika, iż

$$|\varrho(x_n, A) - \varrho(x_0, A)| < \varepsilon.$$

Z dowolności wyboru liczby $\varepsilon$ wnioskujemy, że

$$\varrho(x_n, A) \to \varrho(x_0, A).$$

**Rozwiązanie zadania 2.86.**

Z nierówności

$$\left|x_1^{(n)} - x_1\right| \leqslant \sqrt{|x_1^{(n)} - x_1|^2 + |x_2^{(n)} - x_2|^2}$$

i

$$\left|x_2^{(n)} - x_2\right| \leqslant \sqrt{|x_1^{(n)} - x_1|^2 + |x_2^{(n)} - x_2|^2}$$

wynika, że jeśli ciąg $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$, to oba ciągi $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ i $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne do punktów $x_1$ i $x_2$, odpowiednio.

Załóżmy teraz, że oba ciągi $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ i $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne do punktów $x_1$ i $x_2$, odpowiednio.

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z założenia wynika, że istnieją liczby $n_1 \in \mathsf{N}$ i $n_2 \in \mathsf{N}$ takie, że

$$\left|x_1^{(n)} - x_1\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_1$$

i

$$\left|x_2^{(n)} - x_2\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_2.$$

Zatem dla $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$ spełnione są następujące zależności:

$$\varrho\left(x^{(n)}, x\right) = \sqrt{|x_1^{(n)} - x_1|^2 + |x_2^{(n)} - x_2|^2} \leqslant \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności $x^{(n)} \longrightarrow x$.

**Rozwiązanie zadania 2.87.**

Z nierówności

$$\left|x_1^{(n)} - x_1\right| \leqslant |x_1^{(n)} - x_1| + |x_2^{(n)} - x_2|$$

i

$$\left|x_2^{(n)} - x_2\right| \leqslant |x_1^{(n)} - x_1| + |x_2^{(n)} - x_2|$$

wynika, że jeśli ciąg $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$, to oba ciągi $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ i $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne do punktów $x_1$ i $x_2$, odpowiednio.

Załóżmy teraz, że oba ciągi $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ i $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne do punktów $x_1$ i $x_2$, odpowiednio.

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z założenia wynika, że istnieją liczby $n_1 \in \mathsf{N}$ i $n_2 \in \mathsf{N}$ takie, że

$$\left|x_1^{(n)} - x_1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_1$$

i

$$\left|x_2^{(n)} - x_2\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_2.$$

Zatem dla $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$ spełnione są następujące zależności:

$$\varrho\left(x^{(n)}, x\right) = |x_1^{(n)} - x_1| + |x_2^{(n)} - x_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności $x^{(n)} \longrightarrow x$.

**Rozwiązanie zadania 2.88.**

Z nierówności

$$\left|x_1^{(n)} - x_1\right| \leqslant \max\left\{|x_1^{(n)} - x_1|, |x_2^{(n)} - x_2|\right\}$$

i

$$\left|x_2^{(n)} - x_2\right| \leqslant \max\left\{|x_1^{(n)} - x_1|, |x_2^{(n)} - x_2|\right\}$$

wynika, że jeśli ciąg $(\boldsymbol{x}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $\boldsymbol{x}$, to oba ciągi $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ i $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne do punktów $x_1$ i $x_2$, odpowiednio.

Załóżmy teraz, że oba ciągi $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ i $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne do punktów $x_1$ i $x_2$, odpowiednio.

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z założenia wynika, że istnieją liczby $n_1 \in \mathsf{N}$ i $n_2 \in \mathsf{N}$ takie, że

$$\left|x_1^{(n)} - x_1\right| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_1$$

i

$$\left|x_2^{(n)} - x_2\right| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_2.$$

Zatem dla $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$ spełnione są następujące zależności:

$$\varrho\left(\boldsymbol{x}^{(n)}, \boldsymbol{x}\right) = \max\left\{|x_1^{(n)} - x_1|, |x_2^{(n)} - x_2|\right\} < \varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności $\boldsymbol{x}^{(n)} \longrightarrow \boldsymbol{x}$.

**Rozwiązanie zadania 2.89.**

Rozwiązanie polega na modyfikacji rozwiązania zadania 2.86.

**Rozwiązanie zadania 2.90.**

Rozwiązanie polega na modyfikacji rozwiązania zadania 2.87.

**Rozwiązanie zadania 2.91.**

Rozwiązanie polega na modyfikacji rozwiązania zadania 2.88.

**Rozwiązanie zadania 2.92.**

Jeśli zbiór $A$ jest domknięty, to $\overline{A} = A$, więc $A^d \cup A = A$. Dowodzi to inkluzji

$$A^d \subset A.$$

Jeśli teraz $A^d \subset A$, to $\overline{A} = A \cup A^d = A$, a to z kolei dowodzi domkniętości zbioru $A$.

**Rozwiązanie zadania 2.93.**

Niech $x \in A^d$. Na mocy definicji punktu skupienia wnioskujemy, że istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$x_n \in A, \quad x_n \neq x \quad \text{i} \quad x_n \longrightarrow x.$$

Z założenia $A \subset B$ wynika, że

$$x_n \in B, \quad x_n \neq x \quad \text{i} \quad x_n \longrightarrow x,$$

co dowodzi relacji $x \in B^d$.

**Rozwiązanie zadania 2.94.**

Ad 1. Z zadania poprzedniego wnioskujemy, że

$$A^d \subset (A \cup B)^d \quad \text{i} \quad B^d \subset (A \cup B)^d.$$

Załóżmy teraz, że $x \notin A^d \cup B^d$. Na mocy zadania 2.23 wnioskujemy, że istnieją liczby dodatnie $\varepsilon$ i $\delta$ takie, że

$$(K(x, \varepsilon) \cap A) \setminus \{x\} = \emptyset$$

i

$$(K(x, \delta) \cap B) \setminus \{x\} = \emptyset.$$

Jeśli $\alpha = \min\{\varepsilon, \delta\}$, to

$$(K(x, \alpha) \cap (A \cup B)) \setminus \{x\} = \emptyset,$$

skąd wynika, że $x \notin (A \cup B)^d$.

Ad 2. Ponieważ

$$A \cap B \subset A \quad \text{i} \quad A \cap B \subset B,$$

więc

$$(A \cap B)^d \subset A^d \cap B^d.$$

Ad 3. Niech $x$ będzie dowolnym elementem zbioru $(A^d)^d$. Dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje element $y \in A^d$ taki, że $y \neq x$ i $\varrho(x, y) = r < \varepsilon$. Dla liczby $s = \min\{\varepsilon - r, \varrho(x, y)\}$ (dodatniej) istnieje element $z \in A$ taki, że $\varrho(z, y) < s$. Dowodzi to nierówności $\varrho(x, z) < \varepsilon$, skąd wnioskujemy, że $x \in A^d$.

Załóżmy teraz, że dla liczby $n \in \mathbb{N}$

$$A^{(n+1)} \subset A^{(n)}.$$

Udowodnimy, że

$$A^{(n+2)} \subset A^{(n+1)}.$$

Niech $x$ będzie dowolnym elementem zbioru $A^{n+2}$. Ponieważ

$$A^{(n+2)} = \left(A^{(n+1)}\right)^d,$$

więc na mocy założenia indukcyjnego wnioskujemy, że

$$A^{(n+2)} \subset \left(A^{(n)}\right)^d = A^{(n+1)}.$$

Na mocy zasady indukcji otrzymujemy żądaną zależność.

**Rozwiązanie zadania 2.95.**

Ad 1. Określmy zbiór

$$A_2 = \left\{2 + \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} : m_1, m_2, \in \mathrm{N},\ \mathrm{i}\ m_1 < m_2\right\}.$$

Zbiór ten ma, jak łatwo sprawdzić, trzy kolejne pochodne równe odpowiednio:

$$A_2^{(1)} = \left\{2 + \frac{1}{2^{m_1}} : m_1 \in \mathrm{N}\right\},$$

$$A_2^{(2)} = \{2\},$$

$$A_2^{(3)} = \emptyset.$$

Ad 2. Niech $(a_m)_{m=1}^{\infty}$ będzie ciągiem, w którym $a_m = \frac{1}{2^m}$ dla każdego $m \in \mathrm{N}$. Określmy teraz zbiór

$$A_n = \{n + a_{m_1} + \cdots + a_{m_n} : m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathrm{N},\ \mathrm{i}\ m_1 < m_2 < \ldots < m_n\}.$$

Wtedy $k$-tą pochodną tego zbioru jest

$$A_n^{(k)} = \{n + a_{m_1} + \cdots + a_{m_{n-k}} : m_1, m_2, \ldots, m_{n-k} \in \mathrm{N},\ m_1 < m_2 < \ldots < m_{n-k}\}$$

dla $k < n$ i

$$A_n^{(n)} = \{n\}, \quad A_n^{(l)} = \emptyset$$

dla $l > n$.

Zbiór ten ma więc $n + 1$ różnych pochodnych.

Ad 3. Jak poprzednio, niech

$$A_n = \{n + a_{m_1} + \cdots + a_{m_n} : m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathrm{N}\ \mathrm{i}\ m_1 < m_2 < \ldots < m_n\}$$

i

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Zauważmy, że $m$-ta pochodna zbioru $A$ zawiera liczbę $m$, natomiast następne pochodne tej liczby nie zawierają. Tak więc, jeśli $m \neq k$, to $A^{(m)} \neq A^{(k)}$, co oznacza, że zbiór $A$ ma nieskończenie wiele różnych pochodnych.

**Rozwiązanie zadania 2.96.**

Ponieważ $A_t \subset \bigcup_{t\in T} A_t$ dla każdego $t \in T$, więc $A_t^d \subset \left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)^d$ dla każdego $t \in T$. Stąd wynika inkluzja

$$\bigcup_{t\in T} A_t^d \subset \left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)^d .$$

Niech $A_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Mamy więc

$$A_n^d = \emptyset \quad \text{dla} \quad n \in \mathsf{N}$$

oraz

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^d = \{0\} .$$

**Rozwiązanie zadania 2.97.**

Ad (1). Ponieważ $A \subset A \cup B$, więc $\operatorname{Int}(A) \subset \operatorname{Int}(A \cup B)$.
Podobnie $\operatorname{Int}(B) \subset \operatorname{Int}(A \cup B)$, a stąd wnioskujemy, że

$$\operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(B) \subset \operatorname{Int}(A \cup B) .$$

W przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką niech $A = \mathsf{Q}$, i $B = \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}$. Wtedy

$$\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\mathsf{Q}) = \emptyset, \quad \operatorname{Int}(B) = \operatorname{Int}(\mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}) = \emptyset,$$

natomiast $\operatorname{Int}(A \cup B) = \operatorname{Int}(\mathsf{R}) = \mathsf{R}$.
Ad (2). Niech $x \in \operatorname{Int}(A \setminus B)$. Istnieje więc dodatnia liczba $\varepsilon$ taka, że

$$K(x, \varepsilon) \subset (A \setminus B).$$

Oznacza to, że $K(x, \varepsilon) \subset A$ i $K(x, \varepsilon) \cap B = \emptyset$. Wynika stąd, że

$$x \in \operatorname{Int}(A) \qquad \text{i} \qquad x \notin \operatorname{Int}(B) .$$

W przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką niech $A = \mathsf{R}$, i $B = \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}$. Wtedy

$$\operatorname{Int}(A \setminus B) = \operatorname{Int}(\mathsf{Q}) = \emptyset, \quad \operatorname{Int}(A) \setminus \operatorname{Int}(B) = \mathsf{R} \setminus \emptyset = \mathsf{R}.$$

**Rozwiązanie zadania 2.98.**

Ad (1). Z inkluzji $A \subset \overline{A}$ i $B \subset \overline{B}$ wynika $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Ponieważ zbiór $\overline{A} \cap \overline{B}$ jest domknięty, więc

$$\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

W przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką niech $A = \mathsf{Q}$, i $B = \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}$. Wtedy

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{\emptyset} = \emptyset, \quad \overline{A} \cap \overline{B} = \mathsf{R} \cap \mathsf{R} = \mathsf{R}.$$

Ad (2). Niech $x$ będzie dowolnym elementem zbioru $\overline{A} \setminus \overline{B}$. Istnieje dodatnia liczba $\varepsilon$ taka, że $K(x,\varepsilon) \cap B = \emptyset$ oraz istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $x_n \in A$ i $x_n \longrightarrow x$. Prawie wszystkie wyrazy ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ należą do kuli $K(x,\varepsilon)$, zatem prawie wszystkie wyrazy tego ciągu nie należą do zbioru $B$. Stąd $x \in \overline{A \setminus B}$.

W przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką niech $A = \mathsf{R}$ i $B = \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}$. Wtedy

$$\overline{A \setminus B} = \overline{\mathsf{Q}} = \mathsf{R}, \quad \overline{A} \setminus \overline{B} = \mathsf{R} \setminus \mathsf{R} = \emptyset.$$

**Rozwiązanie zadania 2.99.**

Ad (1). Ponieważ operacje wnętrza i domknięcia są monotoniczne, więc dowód wynika z następującego ciągu inkluzji:

$$\mathrm{Int}\,(A) \subset A,$$

$$\overline{\mathrm{Int}\,(A)} \subset \overline{A},$$

$$\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{Int}\,(A)}\right) \subset \mathrm{Int}\left(\overline{A}\right).$$

W przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką niech $A = \mathsf{Q}$. Wtedy $\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{Int}\,(A)}\right) = \emptyset$, natomiast $\mathrm{Int}\left(\overline{A}\right) = \mathsf{R}$.

Ad (2). Oczywiście,

$$\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{Int}\,(A)}\right) \subset \overline{\mathrm{Int}\,(A)},$$

a ponieważ zbiór po prawej stronie powyższej inkluzji jest domknięty, więc

$$\overline{\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{Int}\,(A)}\right)} \subset \overline{\mathrm{Int}\,(A)}.$$

Inkluzja przeciwna wynika z następującego ciągu inkluzji:

$$\mathrm{Int}\,(A) \subset \overline{\mathrm{Int}\,(A)},$$

$$\mathrm{Int}\,(A) = \mathrm{Int}\,(\mathrm{Int}\,(A)) \subset \mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{Int}\,(A)}\right),$$

$$\overline{\mathrm{Int}\,(A)} \subset \overline{\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{Int}\,(A)}\right)}.$$

**Rozwiązanie zadania 2.100.**

Ponieważ przekrój dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym, zatem dowód inkluzji wynika z następującego ciągu zależności

$$A_t \subset \overline{A_t} \quad \text{dla każdego} \quad t \in T,$$

$$\bigcap_{t\in T} A_t \subset \bigcap_{t\in T} \overline{A_t},$$

$$\overline{\bigcap_{t\in T} A_t} \subset \overline{\bigcap_{t\in T} \overline{A_t}} = \bigcap_{t\in T} \overline{A_t}.$$

Podobnie

$$A_t \subset \bigcup_{t\in T} A_t \quad \text{dla każdego} \quad t \in T,$$

$$\overline{A_t} \subset \overline{\bigcup_{t\in T} A_t} \quad \text{dla każdego} \quad t \in T,$$

$$\bigcup_{t\in T} \overline{A_t} \subset \overline{\bigcup_{t\in T} A_t}.$$

Pierwszej inkluzji nie można zastąpić równością już dla rodziny złożonej z dwóch zbiorów (patrz zadanie 2.98), dla drugiej – niech

$$A_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

Wtedy

$$\bigcup_{n\in \mathbb{N}} \overline{A_n} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

gdy

$$\overline{\bigcup_{n\in \mathbb{N}} A_n} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}.$$

**Rozwiązanie zadania 2.101.**

Nie. Niech $(X, \varrho)$ będzie niejednoelementową przestrzenią z metryką zero-jedynkową. Jeśli

$$A = K(a, 1), \quad B = \overline{K}(a, 1) = \{x \in X : \varrho(x, a) \leqslant 1\},$$

to

$$\overline{A} = A = \{a\} \neq X = B.$$

**Rozwiązanie zadania 2.102.**

Równoważność ta wynika z definicji i zadania 2.23.

**Rozwiązanie zadania 2.103.**

Równoważność ta wynika z definicji i zadania 2.23.

**Rozwiązanie zadania 2.104.**

Równoważność ta wynika z definicji.

**Rozwiązanie zadania 2.105.**

Równoważność ta wynika z definicji i zadania 2.23.

**Rozwiązanie zadania 2.106.**

Dowody równoważności (1) $\Longleftrightarrow$ (2) i (1) $\Longleftrightarrow$ (4) znajdują się w zadaniu 2.23.
Udowodnimy teraz implikację (1) $\Longrightarrow$ (3). Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z założenia istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $x_n \in A$ dla $n \in \mathsf{N}$ i $x_n \to x$. Istnieje więc liczba $n_0 \in \mathsf{N}$ taka, że $\varrho(x_n, x) < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Wynika stąd

$$\varrho(x, A) = \inf\{\varrho(x, y) : y \in A\} \leqslant \varrho(x, x_{n_0}) < \varepsilon.$$

Z dowolności wyboru liczby $\varepsilon$ wynika, że $\varrho(x, A) = 0$.

Przechodząc do dowodu implikacji (3) $\Longrightarrow$ (1) zauważmy, że dla każdej liczby $n \in \mathsf{N}$ istnieje punkt $x_n \in A$ taki, że

$$0 = \varrho(x, A) \leqslant \varrho(x, x_n) < \frac{1}{n}.$$

Oznacza to, że $x_n \to x$, czyli $x \in \overline{A}$.

**Rozwiązanie zadania 2.107.**

Zauważmy, że dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$ prawdziwa jest równoważność

$$(A \cup B = A) \Longleftrightarrow (B \subset A).$$

Na tej podstawie równość

$$A = \overline{A} = A \cup A^d$$

jest równoważna inkluzji $A^d \subset A$.

Odpowiedź na drugie pytanie brzmi: NIE.

Jeśli $\overline{A} = A$, to oczywiście

$$\left(A^d\right)^d \subset A^d \subset \overline{A} = A.$$

W przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką niech

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathsf{N}\right\}.$$

Wtedy $A^d = \{0\}$, natomiast $\left(A^d\right)^d = \emptyset$, czyli $\left(A^d\right)^d \subset A$, mimo że zbiór $A$ nie jest domknięty.

**Rozwiązanie zadania 2.108.**

Ad (1). Równość wynika bezpośrednio z definicji.

Ad (2). $\operatorname{Fr}(\overline{A}) = \overline{\overline{A}} \cap \overline{X \setminus \overline{A}} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus \overline{A}} \subset \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \operatorname{Fr}(A)$.

W przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką niech $A = \mathsf{Q}$. Wtedy $\operatorname{Fr}(\overline{A}) = \emptyset$, natomiast $\operatorname{Fr}(A) = \mathsf{R}$.

Ad (3).

$$\operatorname{Fr}(A \cup B) = \overline{A \cup B} \cap \overline{X \setminus (A \cup B)} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)} \subset$$

$$(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B} =$$

$$\left(\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B}\right) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B}\right) \subset$$

$$\left(\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}\right) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{X \setminus B}\right) = \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B).$$

W przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką niech $A = \mathsf{Q}$ i $B = \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}$. Wtedy $\operatorname{Fr}(A \cup B) = \operatorname{Fr}(\mathsf{R}) = \emptyset$, natomiast $\operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B) = \mathsf{R}$.

Ad (4). Udowodnimy najpierw inkluzję

$$\operatorname{Fr}(A \cap B) \subset \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B).$$

Z własności domknięcia wynikają następujące zależności:

$$\operatorname{Fr}(A \cap B) = \overline{A \cap B} \cap \overline{X \setminus (A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)} =$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \left(\overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}\right) = \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{X \setminus A}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{X \setminus B}\right) \subset$$

$$\left(\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}\right) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{X \setminus B}\right) = \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B).$$

Teraz zauważamy bez trudu, że

$$\operatorname{Fr}(A \cup B) \cup \operatorname{Fr}(A \cap B) \cup (\operatorname{Fr}(A) \cap \operatorname{Fr}(B)) \subset \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B).$$

Załóżmy teraz, że $x \in \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$. Niech np. $x \in \operatorname{Fr}(A)$. Istnieją więc dwa ciągi zbieżne do punktu $x$, jeden w zbiorze $A$, drugi w zbiorze $X \setminus A$.

Jeśli $x \in \operatorname{Fr}(A \cup B)$, to $x$ należy do zbioru stojącego po prawej strony dowodzonej zależności. Przypuśćmy więc, że $x \notin \operatorname{Fr}(A \cup B)$. Wówczas, ponieważ w zbiorze $A \cup B$ istnieje ciąg zbieżny do $x$, więc żaden taki ciąg nie może być wybrany ze zbioru $X \setminus (A \cup B)$. Gdyby $x$ należał do zbioru $\operatorname{Fr}(A \cap B)$, to punkt ten należałby do prawej strony. Przypuśćmy, że $x \notin \operatorname{Fr}(A \cap B)$. Ponieważ w zbiorze

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

istnieje ciąg zbieżny do punktu $x$, więc nie ma takiego ciągu w zbiorze $A \cap B$. Ponieważ taki ciąg znajduje się w zbiorze $A$, więc jego elementy należą do zbioru

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \subset X \setminus B.$$

Ponieważ w zbiorze $X \setminus A$ znajduje się ciąg zbieżny do punktu $x$, a nie ma takiego ciągu w zbiorze $X \setminus (A \cup B)$, więc leży on w zbiorze $(X \setminus A) \setminus (X \setminus B) = B \setminus A$.

Dowodzi to, że $x \in \overline{B}$ i $x \in \overline{X \setminus B}$, zatem $x \in \mathrm{Fr}(B)$. W ten sposób udowodniliśmy, że $x \in \mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B)$, czyli prawdziwa jest inkluzja

$$\mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B) \subset \mathrm{Fr}(A \cup B) \cup \mathrm{Fr}(A \cap B) \cup (\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B)).$$

Ad (5). Z własności domknięcia wynikają następujące zależności:

$$A \setminus \mathrm{Fr}(A) = A \setminus \left(\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}\right) = A \cap \left[(X \setminus \overline{A}) \cup \left(X \setminus \overline{X \setminus A}\right)\right] =$$

$$\left[A \cap (X \setminus \overline{A})\right] \cup \left[A \cap \left(X \setminus \overline{X \setminus A}\right)\right] = \emptyset \cup (A \cap \mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A).$$

Ad (6). Oczywiście $A \subset \overline{A}$ i $\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{A}$. Zatem

$$A \cup \mathrm{Fr}(A) \subset \overline{A}.$$

Jeśli teraz $x$ jest dowolnym punktem ze zbioru $\overline{A} \setminus A$, to $x \in X \setminus A \subset \overline{X \setminus A}$ i, oczywiście, $x \in \overline{A}$, zatem $x \in \mathrm{Fr}(A)$. Dowodzi to inkluzji $\overline{A} \subset A \cup \mathrm{Fr}(A)$.

Ad (7). Z zadania 2.24. wynikają równości:

$$\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Int}(A) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}\right) =$$

$$\left[\mathrm{Int}(A) \cup \overline{A}\right] \cap \left[\mathrm{Int}(A) \cup \overline{X \setminus A}\right] =$$

$$\overline{A} \cap \left[\left(X \setminus \overline{X \setminus A}\right) \cup \overline{X \setminus A}\right] = \overline{A} \cap X = \overline{A}.$$

Ad (8). Ponieważ (na mocy punktu (5)) zbiory $\mathrm{Int}(A)$ i $\mathrm{Fr}(A)$ są rozłączne, więc na podstawie punktu (7) wnioskujemy, że

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A).$$

Ad (9). Ponieważ

$$\overline{X \setminus \mathrm{Int}(A)} = \overline{X \setminus \left(X \setminus \overline{X \setminus A}\right)} = \overline{\overline{X \setminus A}} = \overline{X \setminus A},$$

więc

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) = \overline{\mathrm{Int}(A)} \cap \overline{X \setminus \mathrm{Int}(A)} \subset \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \mathrm{Fr}(A).$$

W przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką niech $A = \mathsf{Q}$. Wtedy $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) = \emptyset$, natomiast $\mathrm{Fr}(A) = \mathsf{R}$.

Ad (10).

$$\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A) = \mathrm{Int}(A) \cup (\overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A) =$$

$$\overline{A} \cup \mathrm{Int}(X \setminus A) = (X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A) = X.$$

**Rozwiązanie zadania 2.109.**

Zauważmy najpierw, że zbiór skończony ma pustą pochodną. Istotnie, jeśli

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

jest zbiorem skończonym, przy czym $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$, to żaden z tych punktów nie jest punktem skupienia tego zbioru, bo gdy

$$\alpha = \min\{\varrho(a_i, a_j) : i, j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ i \neq j\},$$

to $a_j \notin K(a_i, \alpha)$ dla $i \neq j$.

Jeśli $x$ jest punktem przestrzeni $X$ różnym od wszystkich punktów $a_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to niech

$$\beta = \min\{\varrho(x, a_i) : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Wtedy $a_i \notin K(x, \beta)$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Jeśli $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ jest zbiorem skończonym, to oba zbiory $(A \setminus B)$ i $(B \setminus A)$ są skończone, zatem na mocy poprzednio udowodnionej własności mamy:

$$A^d = ((A \cap B) \cup (A \setminus B))^d = (A \cap B)^d \cup (A \setminus B)^d =$$

$$(B \cap A)^d \cup \emptyset = (B \cap A)^d \cup (B \setminus A)^d = B^d.$$

**Rozwiązanie zadania 2.110.**

Oczywiście, dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

więc

$$\overline{A_n} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k},$$

skąd już bezpośrednio wynika inkluzja

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}.$$

Zauważmy teraz, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k},$$

zatem

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k},$$

co dowodzi inkluzji

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}.$$

Załóżmy teraz, że

$$x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \text{ i } x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}.$$

Wynika stąd, że istnieje liczba $m \in \mathrm{N}$ taka, że $x \notin \overline{\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k}$. Ponieważ

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^{m-1} A_n \cup \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^{m-1} A_n} \cup \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n},$$

więc

$$x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{m-1} A_n} = \bigcup_{n=1}^{m-1} \overline{A_n} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n},$$

a to uzupełnia dowód.

**Rozwiązanie zadania 2.111.**

Niech $x$ będzie dowolnym elementem zbioru $A(r)$. Jeśli $x \in A$, to $K(x,r) \subset A(r)$, co oznacza, że $x$ jest punktem wewnętrznym zbioru $A(r)$.

Niech teraz $x \in A(r) \setminus A$. Oznaczmy przez $\alpha$ odległość punktu $x$ od zbioru $A$ i niech $\beta = \frac{1}{2}(r - \alpha)$. Oczywiście, $\beta > 0$. Pokażemy, że

$$K(x,\beta) \subset A(r).$$

Niech $y$ będzie dowolnym elementem kuli $K(x,\beta)$. Ponieważ $\alpha = \varrho(x,A)$, więc istnieje punkt $z \in A$ taki, że

$$\varrho(x,z) < \alpha + \beta.$$

Zatem

$$\varrho(y,z) \leqslant \varrho(y,x) + \varrho(x,z) < \beta + \alpha + \beta = r.$$

Tak więc każdy punkt $x$ zbioru $A(r)$ jest punktem wewnętrznym zbioru tego zbioru, co oznacza, że zbiór ten jest otwarty.

Jeśli teraz $x \in \overline{A}$, to (patrz zadanie 2.106) $\varrho(x,A) = 0$. Zatem dla każdego $r_n$ (dodatniego) $\varrho(x,A) < r_n$, dla każdego $n$, więc

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A(r_n).$$

Jeśli zaś $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A(r_n)$, to $\varrho(x,A) < r_n$, dla każdego $n \in \mathrm{N}$, więc $\varrho(x,A) = 0$. Warunek ten oznacza, że $x \in \overline{A}$.

**Rozwiązanie zadania 2.112.**

Udowodnimy najpierw, że zbiór $F$ jest domknięty. Zbiór jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego punkt skupienia do niego należy. Niech więc $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem punktów ze zbioru $F$ zbieżnym do pewnego punktu $x \in X$. Wtedy

$$\varrho(x_n, A) \leqslant \varrho(x_n, B),$$

na mocy zadania 2.85 wnioskujemy stąd, że

$$\varrho(x, A) \leqslant \varrho(x, B).$$

Oznacza to, że $x \in F$, czyli zbiór $F$ jest domknięty.

Zbiór $G$ jest dopełnieniem zbioru

$$\{x \in X \,:\, \varrho(x, B) \leqslant \varrho(x, A)\},$$

który na mocy poprzedniej części zadania jest domknięty. W ten sposób zbiór $G$ jest otwarty.

**Rozwiązanie zadania 2.113.**

Jeśli jeden ze zbiorów jest pusty, to za parę zbiorów otwartych można przyjąć zbiór pusty i całą przestrzeń, co daje odpowiednią parę.

Załóżmy teraz, że zbiory $E$ i $F$ są niepuste. Rozważmy zbiory:

$$G = \{x \in X \,:\, \varrho(x, E) < \varrho(x, F)\}.$$

$$H = \{x \in X \,:\, \varrho(x, F) < \varrho(x, E)\}.$$

Łatwo zauważamy, że $E \subset G$ i $F \subset H$ oraz $G \cap H = \emptyset$.

**Rozwiązanie zadania 2.114.**

Jeśli jeden ze zbiorów $A$ lub $B$ jest pusty lub równy $X$, to odpowiednią parę zbiorów domkniętych stanowią zbiór pusty i $X$.

Załóżmy teraz, że zbiory $A$ i $B$ są niepuste i nie pokrywają się z całą przestrzenią. Korzystając z zadania 2.112 wiemy, że zbiory:

$$F = \{x \in X \,:\, \varrho(x, X \setminus A) \leqslant \varrho(x, X \setminus B)\},$$

$$E = \{x \in X \,:\, \varrho(x, X \setminus A) \geqslant \varrho(x, X \setminus B)\}$$

są domknięte. Łatwo zauważyć, że $E \cup F = X$. Ponadto $E \subset A$ i $F \subset B$. Istotnie, niech $x \in E$.

Jeśli $x \in X \setminus B$, to $x \in A$.

Jeśli zaś $x \notin X \setminus B$, to z domkniętości zbioru $X \setminus B$ wynika, że $\varrho(x, X \setminus B) > 0$. Z określenia zbioru $E$ wynika nierówność $\varrho(x, X \setminus A) > 0$, czyli $x \notin X \setminus A$, co kończy dowód zawierania $E \subset A$.

Podobnie dowodzi się inkluzji $F \subset B$.

**Rozwiązanie zadania 2.115.**

Jeśli $A = \emptyset$, to para zbiorów $\emptyset, X$ spełnia warunki zadania.
Jeśli $A = X$, to para zbiorów $X, B$ spełnia warunki zadania.
Niech $\emptyset \neq A \neq X$ i $\emptyset \neq B \neq X$. Określmy teraz zbiory:

$$E = \{x \in X : \varrho(x, A) \leqslant \varrho(x, B)\},$$

$$F = \{x \in X : \varrho(x, A) \geqslant \varrho(x, B)\}.$$

Są one domknięte (zadanie 2.112) i $E \cup F = X$.
Udowodnimy teraz równość

$$E \cap (A \cup B) = A.$$

Jeśli $x \in A$, to $\varrho(x, A) = 0$ i $\varrho(x, A) \leqslant \varrho(x, B)$, czyli $x \in E$. Tak więc

$$A \subset E \cap (A \cup B).$$

Niech teraz $x \in E \cap (A \cup B)$. Wiemy, że

$$\varrho(x, A) \leqslant \varrho(x, B) \quad \text{i} \quad x \in A \text{ lub } x \in B.$$

Gdyby $x \notin A$, to z domkniętości tego zbioru wynikałoby, że $\varrho(x, A) > 0$, a jednocześnie $\varrho(x, B) = 0$, gdyż $x \in B$; to zaś jest niemożliwe. Zatem $x \in A$. Inkluzja

$$E \cap (A \cup B) \subset A$$

łącznie z poprzednią dowodzi żądanej równości.
Podobnie dowodzi się drugiej z zapowiedzianych równości.

**Rozwiązanie zadania 2.116.**

Zbiór $G$ jest otwarty, zatem $\mathrm{Fr}(G) \subset \overline{X \setminus G} = X \setminus G$.
Pozostaje udowodnić tylko pierwszą część inkluzji.
Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Niech $x \in \mathrm{Fr}(G_n)$. Wtedy $x \in \overline{G_n}$ i $x \notin G_n$. Zatem $x \in \overline{G}$.
Jeśli $x \notin G$, to $x \in \mathrm{Fr}(G)$, co kończy dowód w tym przypadku.
Jeśli zaś $x \in G$, to istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $k \neq n$ i $x \in G_k$. Istnieje więc pewna kula $K(x, \varepsilon)$ zawarta w zbiorze $G_k$. Z rozłączności zbiorów $G_n$ i $G_k$ wynika teraz, że $K(x, \varepsilon) \cap G_n = \emptyset$. Tak więc $x \notin \mathrm{Fr}(G_n)$ – sprzeczność.
Wynika stąd inkluzja $\mathrm{Fr}(G_n) \subset \mathrm{Fr}(G)$, która kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 2.117.**

W dalszym ciągu zadania $K_1(x_1, \varepsilon)$ i $K_2(x_2, \varepsilon)$ oznaczać będą kule w przestrzeniach $X_1$ i $X_2$, odpowiednio.
Rozważmy najpierw metrykę

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \varrho_2^2(x_2, y_2)}$$

dla $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ zbioru $X$.

Ad (1). Niech $x = (x_1, x_2)$ będzie dowolnym elementem zbioru $\mathrm{Int}(A \times B)$. Istnieje więc dodatnia liczba $\varepsilon$ taka, że $K(x, \varepsilon) \subset A \times B$. Wtedy

$$K_1(x_1, \varepsilon) \times \{x_2\} \subset A \times B \quad \text{i} \quad \{x_2\} \times K_2(x_2, \varepsilon) \subset A \times B,$$

co oznacza, że

$$K_1(x_1, \varepsilon) \subset A \quad \text{i} \quad K_2(x_2, \varepsilon) \subset B,$$

czyli $x_1 \in \mathrm{Int}(A)$ i $x_2 \in \mathrm{Int}(B)$. Stąd wynika $x \in \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$.

Pokażemy teraz, że jeśli $x_1 \in \mathrm{Int}(A)$ i $x_2 \in \mathrm{Int}(B)$, to

$$x = (x_1, x_2) \in \mathrm{Int}(A \times B).$$

Istotnie, istnieją liczby $\varepsilon_1$ i $\varepsilon_2$ dodatnie i takie, że

$$K_1(x_1, \varepsilon_1) \subset A \quad \text{i} \quad K_2(x_2, \varepsilon_2) \subset B.$$

Niech $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Wówczas dla $y = (y_1, y_2) \in K(x, \varepsilon)$ mamy:

$$\varrho_1(x_1, y_1) \leqslant \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \varrho_2^2(x_2, y_2)} < \varepsilon.$$

Podobnie

$$\varrho_2(x_2, y_2) \leqslant \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \varrho_2^2(x_2, y_2)} < \varepsilon.$$

Stąd

$$y_1 \in K_1(x_1, \varepsilon) \subset A, \quad y_2 \in K_2(x_2, \varepsilon) \subset B.$$

Zatem $K(x, \varepsilon) \subset K_1(x_1, \varepsilon) \times K_2(x_2, \varepsilon) \subset A \times B$.

Dowodzi to relacji $x \in \mathrm{Int}(A \times B)$.

Ad (2). Jeśli $x = (x_1, x_2) \in \overline{A \times B}$, to istnieje ciąg $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right), \quad x^{(n)} \in A \times B \quad \text{i} \quad x^{(n)} \longrightarrow x.$$

Na podstawie zadania 2.89. zbieżność ciągu w przestrzeni $X$ jest równoważna zbieżnościom obu ciągów współrzędnych w przestrzeniach $X_1$ i $X_2$. Oznacza to, że

$$x_1^{(n)} \longrightarrow x_1 \quad \text{i} \quad x_2^{(n)} \longrightarrow x_2,$$

czyli $x_1 \in \overline{A}$ i $x_2 \in \overline{B}$, tzn. $x \in \overline{A} \times \overline{B}$.

Odwrotnie, jeśli $x \in \overline{A} \times \overline{B}$, czyli $x_1 \in \overline{A}$ i $x_2 \in \overline{B}$, to istnieją ciągi $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ i $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ takie, że $x_1^{(n)} \in A$, $x_2^{(n)} \in B$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$x_1^{(n)} \longrightarrow x_1 \quad \text{i} \quad x_2^{(n)} \longrightarrow x_2.$$

Połóżmy $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście, $x^{(n)} \in A \times B$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $x^{(n)} \longrightarrow x$, a to oznacza relację

$$x = (x_1, x_2) \in \overline{A \times B}.$$

Ad (3). Na podstawie udowodnionej równości dotyczącej domknięcia zbioru $A \times B$, otrzymujemy ciąg równości:

$$\mathrm{Fr}\,(A \times B) = \overline{A \times B} \cap \overline{X \setminus (A \times B)} =$$

$$[\overline{A} \times \overline{B}] \cap \overline{[(X_1 \setminus A) \times B \cup A \times (X_2 \setminus B)]} =$$

$$[\overline{A} \times \overline{B}] \cap \left[\overline{(X_1 \setminus A) \times B} \cup \overline{A \times (X_2 \setminus B)}\right] =$$

$$[\overline{A} \times \overline{B}] \cap \left[(\overline{X_1 \setminus A} \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \overline{X_2 \setminus B})\right] =$$

$$\left[(\overline{A} \times \overline{B}) \cap \left(\overline{X_1 \setminus A} \times \overline{B}\right)\right] \cup \left[(\overline{A} \times \overline{B}) \cap \left(\overline{A} \times \overline{X_2 \setminus B}\right)\right] =$$

$$\left[\left(\overline{A} \cap \overline{X_1 \setminus A}\right) \times \overline{B}\right] \cup \left[\overline{A} \times \left(\overline{B} \cap \overline{X_2 \setminus B}\right)\right] =$$

$$(\mathrm{Fr}\,(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \mathrm{Fr}\,(B))\,.$$

Dla metryk

$$\varrho(x, y) = \varrho_1(x_1, y_1) + \varrho_2(x_2, y_2), \quad \text{gdy} \quad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in X$$

i

$$\varrho(x, y) = \max\{\varrho_1(x_1, y_1), \varrho_2(x_2, y_2)\}, \quad \text{gdy} \quad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in X,$$

dowody przebiegają bardzo podobnie.

**Rozwiązanie zadania 2.118.**

$$\mathrm{Int}\,(\mathbb{Q}) = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Fr}\,(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}.$$

**Rozwiązanie zadania 2.119.**

$$\mathrm{Int}\,(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}, \quad \mathrm{Fr}\,(\mathbb{Q}) = \emptyset.$$

**Rozwiązanie zadania 2.120.**

Ad (M1). Oczywiście $\varrho(x,y) \geqslant 0$ i $\varrho(x,x) = 0$. Jeśli $x \neq y$, to niezależnie czy są to liczby wymierne, czy niewymierne, czy też jedna wymierna a druga niewymierna, to $\varrho(x,y) > 0$.

Ad (M2). Niech $x, y \in \mathrm{Q}$. Wtedy $\varrho(x,y) = |x-y| = |y-x| = \varrho(y,x)$.

Niech $x, y \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$. Wtedy $\varrho(x,y) = |x-y| = |y-x| = \varrho(y,x)$.

Niech $x \in \mathrm{Q}$ i $y \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$. Wtedy $\varrho(x,y) = |x| + |y| = |y| + |x| = \varrho(y,x)$.

Ad (M3). Postępując podobnie jak wyżej, poprzez rozważenie ośmiu przypadków przekonujemy się o warunku trójkąta.

$$\operatorname{Int}(\mathrm{Q} \cap [0,1]) = \mathrm{Q} \cap [0,1], \quad \overline{\mathrm{Q} \cap [0,1]} = \mathrm{Q} \cap [0,1].$$

$$\operatorname{Int}([0,1] \setminus \mathrm{Q}) = [0,1] \setminus \mathrm{Q}, \quad \overline{[0,1] \setminus \mathrm{Q}} = [0,1] \setminus \mathrm{Q}.$$

# Rozdział 3

# Różne rodzaje zbiorów

**Rozwiązanie zadania 3.1.**

Ad (1). Na podstawie inkluzji $(A^d)^d \subset A^d$ i równości $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$ (patrz zadanie 2.94) wnioskujemy łatwo, że

$$\overline{A^d} = (A^d)^d \cup A^d = A^d$$

i

$$(\overline{A})^d = (A \cup A^d)^d = A^d \cup (A^d)^d = A^d.$$

Ad (2). Na podstawie pierwszej części zadania mamy:

$$\overline{\left(\overline{(A^d)}\right)^d} = \overline{(A^d)^d} = (A^d)^d \cup \left((A^d)^d\right)^d = (A^d)^d,$$

$$\left(\overline{(\overline{A})^d}\right)^d = \left(\overline{A^d}\right)^d = (A^d)^d.$$

**Rozwiązanie zadania 3.2.**

Niech $\overline{A} \subset \mathrm{Int}\,(B)$. Wtedy

$\mathrm{Int}\,(B) \cup \mathrm{Int}\,(X \setminus A) \supset \overline{A} \cup \mathrm{Int}\,(X \setminus A) = (X \setminus \mathrm{Int}\,(X \setminus A)) \cup \mathrm{Int}\,(X \setminus A) = X.$

Niech teraz $\mathrm{Int}\,(B) \cup \mathrm{Int}\,(X \setminus A) = X$. Wtedy $X \setminus \mathrm{Int}\,(X \setminus A) \subset \mathrm{Int}\,(B)$, czyli

$$\overline{A} \subset \mathrm{Int}\,(B).$$

**Rozwiązanie zadania 3.3.**

Ad (1). Niech $x$ będzie dowolnym elementem zbioru $G \cap \overline{A}$. Istnieje dodatnia liczba $\alpha$ taka, że $K(x,\alpha) \subset G$. Ponieważ $x \in \overline{A}$, więc dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ (możemy przyjąć, że jest ona mniejsza niż $\alpha$) $K(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Ponieważ $K(x,\varepsilon) \subset G$, więc $K(x,\varepsilon) \cap (A \cap G) \neq \emptyset$. Stąd wynika, że $x \in \overline{G \cap A}$.

Ad (2). Z własności (1) wynika

$$\overline{G \cap \overline{A}} \subset \overline{\overline{G \cap A}} = \overline{G \cap A}.$$

Oczywista inkluzja $\overline{G \cap A} \subset \overline{G \cap \overline{A}}$ dowodzi zapowiadanej równości.

Ad (3). Z (1) wynikają zależności:

$$G \cap \overline{A} \subset \overline{G \cap A} = \overline{\emptyset} = \emptyset,$$

co dowodzi tezy.

**Rozwiązanie zadania 3.4.**

Ad (1). Ponieważ $G \subset \overline{G}$ i $G$ jest zbiorem otwartym, więc

$$G = \operatorname{Int}(G) \subset \operatorname{Int}(\overline{G}).$$

Ad (2). Ponieważ $\operatorname{Int}(F) \subset F$ i $F$ jest zbiorem domkniętym, więc

$$\overline{\operatorname{Int}(F)} \subset \overline{F} = F.$$

**Rozwiązanie zadania 3.5.**

Ad (1). Niech $x \in \operatorname{Int}(F \cup A)$. Istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że $K(x,\varepsilon) \subset F \cup A$. Przypuśćmy, że $x \notin F = \overline{F}$. Istnieje więc liczba dodatnia $\alpha$ taka, że $K(x,\alpha) \cap F = \emptyset$. Jeśli $\eta = \min\{\alpha,\varepsilon\}$, to $K(x,\eta) \cap F = \emptyset$ i $K(x,\eta) \subset F \cup A$, co implikuje inkluzję $K(x,\eta) \subset A$, czyli $x \in \operatorname{Int}(A)$.

Ad (2). Z relacji (1) wynika

$$\operatorname{Int}(F \cup A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(F \cup A)) \subset \operatorname{Int}(F \cup \operatorname{Int}(A)).$$

Ponieważ $F \cup \operatorname{Int}(A) \subset F \cup A$, więc $\operatorname{Int}(F \cup \operatorname{Int}(A)) \subset \operatorname{Int}(F \cup A)$, co wraz z inkluzją poprzednią dowodzi równości (2).

**Rozwiązanie zadania 3.6.**

$$\operatorname{Fr}(G) = \overline{G} \cap \overline{X \setminus G} \subset \overline{X \setminus G} = X \setminus G.$$

**Rozwiązanie zadania 3.7.**

Ponieważ

$$\overline{G} \setminus F = (G \cup \mathrm{Fr}(G)) \setminus F = (G \setminus F) \cup (\mathrm{Fr}(G) \setminus F) = G \setminus F = G \cap (X \setminus F),$$

więc zbiór $\overline{G} \setminus F$ jest otwarty jako przekrój dwóch zbiorów otwartych.

**Rozwiązanie zadania 3.8.**

Zauważmy, że

$$\mathrm{Int}(F \setminus H) = \mathrm{Int}(F \cap (X \setminus H)) = \mathrm{Int}(F) \cap \mathrm{Int}(X \setminus H) =$$

$$\mathrm{Int}(F) \cap (X \setminus H) = \mathrm{Int}(F) \setminus H = (F \setminus \mathrm{Fr}(F)) \setminus H =$$

$$F \setminus (\mathrm{Fr}(F) \cup H).$$

Na podstawie równoważności $A \cup B = B \iff A \subset B$ wnioskujemy teraz, że zbiór $F \setminus H$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Fr}(F) \subset H$.

**Rozwiązanie zadania 3.9.**

Ad (1). $\mathrm{Fr}(H) = \overline{H} \cap \overline{X \setminus H} \subset \overline{H} \cap \overline{X \setminus G} = \overline{H} \cap (X \setminus G) = \overline{H} \setminus G = F \subset \overline{H}$.

Ad (2). Bezpośrednio z definicji zbioru $F$ i inkluzji $G \subset \overline{H}$ wynika równość

$$G = \overline{H} \setminus F.$$

Ad (3). Z założeń zadania wynika, że $F \subset \overline{H}$ i $\overline{G} \subset \overline{H}$, a to implikuje

$$\overline{G} \cup F \subset \overline{H}.$$

Z założenia i warunku (2) wynika

$$\overline{H} = G \cup F \subset \overline{G} \cup F,$$

co uzupełnia dowód odpowiedniej równości.

Ad (4).

$$\mathrm{Fr}(G) = \overline{G} \cap \overline{X \setminus G} = \overline{G} \cap (X \setminus G) = \overline{G} \cap (\overline{H} \setminus G) = \overline{G} \cap F,$$

gdyż $\overline{G} \subset \overline{H}$.

**Rozwiązanie zadania 3.10.**

Załóżmy, że zbiór $A$ jest gęsty. Niech $U$ będzie dowolnym niepustym zbiorem otwartym. Jeśli $U \cap A = \emptyset$, to dla każdego punktu $x \in U$ istnieje dodatnia liczba $\varepsilon$ taka, że $K(x,\varepsilon) \subset U$, czyli $K(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Dowodzi to, że $x \notin \overline{A}$, czyli $A$ nie jest gęsty w przestrzeni $X$.

Jeśli teraz założymy, że zbiór $A$ nie jest gęsty, to zbiór $X \setminus \overline{A}$ jest otwartym zbiorem niepustym i, oczywiście, rozłącznym ze zbiorem $A$.

**Rozwiązanie zadania 3.11.**

Dowód wynika z równości: $\mathrm{Int}\,(A) = X \setminus \overline{X \setminus A}$.

**Rozwiązanie zadania 3.12.**

Ponieważ

$$\overline{(X \setminus \overline{A})} = X \setminus \mathrm{Int}\,((X \setminus (X \setminus \overline{A}))) = X \setminus \mathrm{Int}\,(\overline{A}),$$

więc $\overline{X \setminus \overline{A}} = X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Int}\,(\overline{A}) = \emptyset$.

**Rozwiązanie zadania 3.13.**

Z zadania 2.25 mamy $X \setminus \overline{A} = \mathrm{Int}(X \setminus A)$, więc $\overline{X \setminus \overline{A}} = \overline{\mathrm{Int}(X \setminus A)}$. Stąd i z poprzedniego zadania wynika teza.

**Rozwiązanie zadania 3.14.**

Dowód wynika bezpośrednio z definicji.

**Rozwiązanie zadania 3.15.**

Przypuśćmy najpierw, że istnieje niepusty zbiór otwarty $U$ taki, że dla każdego jego otwartego podzbioru $V$ mamy $V \cap A \neq \emptyset$. Niech $x$ będzie dowolnym punktem zbioru $U$. Dla każdego otoczenia $V$ punktu $x$ mamy więc

$$(V \cap U) \cap A \neq \emptyset,$$

skąd wynika, że $x \in \overline{A}$, czyli $U \subset \overline{A}$. Dowodzi to, że zbiór $A$ nie jest nigdzie gęsty, gdyż $U = \mathrm{Int}\,(U) \subset \mathrm{Int}\,(\overline{A})$.

Załóżmy teraz, że zbiór $A$ nie jest nigdzie gęsty, tzn. $\mathrm{Int}\,(\overline{A}) \neq \emptyset$. Zbiór $U = \mathrm{Int}\,(\overline{A})$ jest niepusty. Niech $x$ będzie jego dowolnym elementem i $V$ dowolnym otoczeniem punktu $x$ zawartym w $U$. Wtedy

$$x \in V \subset U = \mathrm{Int}\,(\overline{A}) \subset \overline{A}.$$

Dowodzi to, że $V \cap A \neq \emptyset$.

**Rozwiązanie zadania 3.16.**

Przypuśćmy, że istnieje zbiór niepusty i otwarty $U$ taki, że $U \setminus A = \emptyset$. Oznacza to, że $U \subset \operatorname{Int}(A)$. Tak więc $\operatorname{Int}(A) \neq \emptyset$, czyli $A$ nie jest brzegowy.

Jeśli teraz zbiór $A$ nie jest brzegowy, to $\operatorname{Int}(A) \neq \emptyset$. Niech $U = \operatorname{Int}(A)$. Wtedy $U \setminus A \subset U \setminus \operatorname{Int}(A) = \emptyset$.

**Rozwiązanie zadania 3.17.**

Dowód wynika bezpośrednio z definicji i inkluzji $A \subset \overline{A}$.

**Rozwiązanie zadania 3.18.**

Dowód wynika bezpośrednio z definicji i równoważności: $A$ jest zbiorem domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \overline{A}$ (por. zadanie 2.26).

**Rozwiązanie zadania 3.19.**

Niech $A$ i $B$ będą dwoma zbiorami nigdzie gęstymi w pewnej przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$. Dla dowolnego niepustego podzbioru otwartego $U$ przestrzeni $X$ istnieje niepusty zbiór otwarty $V$ taki, że $V \subset U$ i $V \cap A = \emptyset$. Dla zbioru $V$ istnieje zbiór otwarty i niepusty $W$ taki, że $W \subset V \subset U$ i $W \cap B = \emptyset$. Zatem również $W \cap (A \cup B) = \emptyset$, skąd wynika, że zbiór $A \cup B$ jest nigdzie gęsty.

II sposób. Mamy

$$\operatorname{Int}(\overline{A \cup B}) = \operatorname{Int}(\overline{A} \cup \overline{B}) \overset{3.5}{=} \operatorname{Int}(\overline{A} \cup \operatorname{Int}(\overline{B})) = \operatorname{Int}(\overline{A} \cup \emptyset) = \operatorname{Int}(\overline{A}) = \emptyset.$$

**Rozwiązanie zadania 3.20.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią liczb rzeczywistych z naturalną metryką i $A = \mathrm{Q}$, $B = \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$. Oba zbiory $A$ i $B$ są brzegowe, natomiast ich suma nie jest zbiorem brzegowym.

**Rozwiązanie zadania 3.21.**

Posłużymy się charakteryzacjami zbiorów brzegowych i nigdzie gęstych z zadań 3.15 i 3.16. Niech $A$ będzie zbiorem nigdzie gęstym, natomiast $B$ zbiorem brzegowym w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$. Dla dowolnego niepustego zbioru otwartego $U$ istnieje niepusty zbiór otwarty $V$ taki, że $V \subset U$ i $V \cap A = \emptyset$. Ponieważ $B$ jest zbiorem brzegowym, więc $V \setminus B \neq \emptyset$. Z obu zależności wynika teraz:

$$U \setminus (A \cup B) \supset V \setminus (A \cup B) = (V \setminus A) \cap (V \setminus B) = V \cap (V \setminus B) \neq \emptyset.$$

Dowodzi to, że zbiór $A \cup B$ jest brzegowy.

II sposób. Ponieważ

$$\operatorname{Int}(A \cup B) \subset \operatorname{Int}(\overline{A} \cup B) \overset{3.5}{=} \operatorname{Int}(\overline{A} \cup \operatorname{Int}(B)) = \operatorname{Int}(\overline{A} \cup \emptyset) = \operatorname{Int}(\overline{A}) = \emptyset,$$

więc zbiór $A \cup B$ jest brzegowy.

**Rozwiązanie zadania 3.22.**

Dowód wynika bezpośrednio z definicji i monotoniczności operacji domknięcia i wnętrza.

**Rozwiązanie zadania 3.23.**

Dowód wynika bezpośrednio z definicji i monotoniczności operacji wnętrza.

**Rozwiązanie zadania 3.24.**

Jeśli $\overline{A}$ jest zbiorem nigdzie gęstym, to i $A$ jako podzbiór swojego domknięcia jest nigdzie gęsty (zadanie 3.22).

Jeśli zbiór $A$ jest nigdzie gęsty, to

$$\operatorname{Int}\left(\overline{\overline{A}}\right) = \operatorname{Int}\left(\overline{A}\right) = \emptyset,$$

skąd wynika, że i $\overline{A}$ jest zbiorem nigdzie gęstym.

**Rozwiązanie zadania 3.25.**

Dowód wynika z następującej zależności:

$$U = \operatorname{Int}(U) \subset \operatorname{Int}\left(\overline{U}\right)$$

dla dowolnego zbioru otwartego $U$.

**Rozwiązanie zadania 3.26.**

Przypuśćmy, że zbiory $\operatorname{Int}\left(\overline{A}\right)$ i $\operatorname{Int}\left(\overline{B}\right)$ nie są rozłączne. Tak więc istnieje punkt $x$ taki, że $x \in \operatorname{Int}\left(\overline{A}\right) \cap \operatorname{Int}\left(\overline{B}\right)$, czyli istnieje dodatnia liczba $r$ taka, że

$$K(x,r) \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Niech $K = K(x,r)$. Wtedy $\overline{K} \subset \overline{A}$. Rozważmy zbiór $E = \overline{K} \setminus A$. Zatem

$$\overline{X \setminus E} = \overline{X \setminus (\overline{K} \setminus A)} = \overline{(X \setminus \overline{K}) \cup A} = \overline{(X \setminus \overline{K})} \cup \overline{A} \supset \overline{(X \setminus \overline{K})} \cup \overline{K} = X.$$

Na podstawie zadania 3.11 wnioskujemy stąd, że zbiór $E$ jest brzegowy i domknięty, więc nigdzie gęsty. Zbiór $K \cap B$ jest zawarty w $\overline{K} \setminus A$; jest zatem też nigdzie gęsty (zadanie 3.22). Ponieważ jest to też zbiór otwarty, więc na mocy zadania poprzedniego, jest to zbiór pusty. Z tego wynika, że $\varrho(x, B) \geqslant r > 0$, czyli $x \notin \overline{B}$, wbrew inkluzji $\overline{K} \subset \overline{B}$.

**Rozwiązanie zadania 3.27.**

Niech $A$ będzie dowolnym zbiorem (niepustym). Gdyby (patrz zadanie 3.16) istniał niepusty zbiór otwarty $U$ taki, że $U \setminus (A \setminus \operatorname{Int}(A)) = \emptyset$, czyli $U \subset A$, to $U$ byłby podzbiorem wnętrza tego zbioru (zadanie 2.13), co jest niemożliwe.

Można podać trochę inny dowód.

Przypuśćmy, że zbiór $A \setminus \operatorname{Int}(A)$ nie jest brzegowy. Zgodnie z zadaniem 3.16 istnieje niepusty zbiór otwarty $U$ zawarty w $A \setminus \operatorname{Int}(A)$. Ponieważ $U \subset A$ i jest zbiorem otwartym, więc jest on podzbiorem jego wnętrza (zadanie 2.13), sprzeczność.

**Rozwiązanie zadania 3.28.**

Ponieważ $\operatorname{Fr}(A) = A \setminus \operatorname{Int}(A)$, więc na mocy zadania poprzedniego zbiór $\operatorname{Fr}(A)$ jest brzegowy, a stąd i faktu, że jest domknięty wynika, iż jest nigdzie gęsty.

**Rozwiązanie zadania 3.29.**

Dla zbioru otwartego $A$

$$\overline{A} \setminus A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = \operatorname{Fr}(A).$$

Ponieważ $\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Fr}(X \setminus A)$, więc na mocy zadania poprzedniego wnioskujemy, że zbiór $\overline{A} \setminus A$ jest nigdzie gęsty.

**Rozwiązanie zadania 3.30.**

Ponieważ

$$A \cap \overline{X \setminus \overline{A}} \subset \overline{A} \cap \overline{X \setminus \overline{A}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{X \setminus \overline{A}} = \operatorname{Fr}(\overline{A}),$$

więc na mocy zadania 3.28 wnioskujemy, że zbiór $A \cap \overline{X \setminus \overline{A}}$ jest nigdzie gęsty.

**Rozwiązanie zadania 3.31.**

Przypuśćmy, że zbiór $A$ nie jest w sobie gęsty. Istnieje więc punkt izolowany w zbiorze $A$, tzn. $x \in A$ taki, że $x \notin A^d$. Zatem $K(x,r) \cap A = \{x\}$ dla pewnej dodatniej liczby $r$.

Pokażemy, że jest to punkt izolowany w całej przestrzeni $X$. W przeciwnym razie istniałby punkt $y$ taki, że $y \in K(x,r)$ i $y \neq x$. Wtedy dla liczby

$$s = \min\{\varrho(x,y), r - \varrho(x,y)\}$$

(dodatniej) mielibyśmy: $K(y,s) \subset K(x,r)$, co oznaczałoby, że $y \notin \overline{A}$. To zaś jest niemożliwe.

Tak więc $K(x,r) = \{x\}$. Wobec tego

$$x \in \operatorname{Int}(A),$$

co jest sprzeczne z faktem, iż $A$ jest zbiorem brzegowym.

**Rozwiązanie zadania 3.32.**

Zbiór $\overline{A}$ jest domknięty, a ponieważ (zadanie 3.1) $\overline{A} = A \cup A^d \subset (\overline{A})^d$, więc zbiór $\overline{A}$ jest też w sobie gęsty.

**Rozwiązanie zadania 3.33.**

Niech $\{A_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną zbiorów w sobie gęstych i $A = \bigcup_{t\in T} A_t$. Dla dowolnego punktu $x \in A$ istnieje $t \in T$ takie, że $x \in A_t$. Jeśli $\varepsilon$ jest dowolną liczbą dodatnią, to istnieje punkt $y \in K(x,\varepsilon) \cap A_t \subset K(x,\varepsilon) \cap A$. Dowodzi to, że zbiór $A$ jest w sobie gęsty.

**Rozwiązanie zadania 3.34.**

Suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym, więc (na mocy zadania poprzedniego) suma skończonej liczby zbiorów doskonałych jest zbiorem doskonałym.

**Rozwiązanie zadania 3.35.**

Jeśli $x$ jest jest punktem izolowanym w przestrzeni $X$, to istnieje liczba dodatnia $r$ taka, że $K(x,r) = \{x\}$. Kula jest zbiorem otwartym, więc, na mocy zadania 3.10, mamy $K(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Oznacza to, że $x \in A$.

**Rozwiązanie zadania 3.36.**

Zauważmy najpierw, że (na podstawie zadania 3.32) podzbiór zbioru nigdzie gęstego jest też nigdzie gęsty.

Jeśli teraz $A \subset B$ i zbiór $B$ jest $I$ kategorii, to istnieje przedstawienie zbioru $B$ w postaci

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

gdzie wszystkie zbiory $B_n$ są nigdzie gęste. Wtedy

$$A = A \cap B = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n).$$

co dowodzi, że $A$ też jest zbiorem $I$ kategorii, gdyż wszystkie zbiory $A \cap B_n$ są nigdzie gęste.

**Rozwiązanie zadania 3.37.**

Ponieważ suma dwóch rodzin przeliczalnych jest rodziną przeliczalną, więc suma dwóch zbiorów $I$ kategorii jest też takim zbiorem.

**Rozwiązanie zadania 3.38.**

Ponieważ suma przeliczalnej rodziny rodzin przeliczalnych jest rodziną przeliczalną[1], więc suma przeliczalnej rodziny zbiorów $I$ kategorii jest też takim zbiorem.

**Rozwiązanie zadania 3.39.**

Dowód wynika z zadania 3.36 i wzorów de Morgana.

**Rozwiązanie zadania 3.40.**

Dowód wynika z zadania 3.37 i wzorów de Morgana.

**Rozwiązanie zadania 3.41.**

W tej przestrzeni każdy zbiór jest otwarty, więc też i domknięty.

Zbiorem gęstym jest tylko zbiór $X$, bowiem każdy punkt tej przestrzeni jest izolowany.

Każdy niepusty zbiór ma niepuste wnętrze, więc jedynym zbiorem brzegowym (oraz nigdzie gęstym) jest zbiór pusty.

Jedynym zbiorem w sobie gęstym jest zbiór pusty.

**Rozwiązanie zadania 3.42.**

Dowód wynika z definicji zbiorów regularnie otwartych i równości (por. zadanie 2.25)

$$\operatorname{Int}\left(\overline{A}\right) = \operatorname{Int}\left(X \setminus \operatorname{Int}\left(X \setminus A\right)\right).$$

**Rozwiązanie zadania 3.43.**

Dowód wynika z definicji zbiorów regularnie otwartych i równości

$$\operatorname{Int}\left(\overline{A}\right) = X \setminus \overline{X \setminus \overline{A}}.$$

**Rozwiązanie zadania 3.44.**

Niech $A$ i $B$ będą dwoma dowolnymi zbiorami regularnie otwartymi. Są one, oczywiście, zbiorami otwartymi. Ponieważ $A = \operatorname{Int}\left(\overline{A}\right)$ i $B = \operatorname{Int}\left(\overline{B}\right)$, więc

$$A \cap B = \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int}\left(\overline{A \cap B}\right).$$

Ponadto

$$\operatorname{Int}\left(\overline{A \cap B}\right) \subset \operatorname{Int}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \operatorname{Int}\left(\overline{A}\right) \cap \operatorname{Int}\left(\overline{B}\right) = A \cap B.$$

[1] Fakt ten wynika z pewnika wyboru.

**Rozwiązanie zadania 3.45.**

Ponieważ $\operatorname{Int}(\overline{A}) \subset \overline{\operatorname{Int}(\overline{A})}$, więc

$$\operatorname{Int}(\overline{A}) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(\overline{A})) \subset \operatorname{Int}\left(\overline{\operatorname{Int}(\overline{A})}\right).$$

Z drugiej strony, ponieważ $\operatorname{Int}(\overline{A}) \subset \overline{A}$, więc

$$\operatorname{Int}\left(\overline{\operatorname{Int}(\overline{A})}\right) \subset \operatorname{Int}(\overline{A}).$$

Otrzymaliśmy w ten sposób równość

$$\operatorname{Int}\left(\overline{\operatorname{Int}(\overline{A})}\right) = \operatorname{Int}(\overline{A}),$$

która dowodzi, że ten ostatni zbiór jest regularnie otwarty.

**Rozwiązanie zadania 3.46.**

Zbiór $A$ jest otwarty, więc $A \subset \operatorname{Int}(\overline{A})$. Z poprzedniego zadania wiemy, że zbiór $\operatorname{Int}(\overline{A})$ jest regularnie otwarty i różnica $\operatorname{Int}(\overline{A}) \setminus A$ jest zawarta w $\overline{A} \setminus A$, który jest zbiorem nigdzie gęstym (zadanie 3.29). Wobec tego

$$A = \operatorname{Int}(\overline{A}) \setminus (\operatorname{Int}(\overline{A}) \setminus A),$$

co kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 3.47.**

Zbiór domknięty i brzegowy jest nigdzie gęsty, więc w sumie z drugim zbiorem brzegowym jest (zadanie 3.21) zbiorem brzegowym.

Założenie domkniętości jednego z tych zbiorów jest istotne (patrz zadanie 3.20).

**Rozwiązanie zadania 3.48.**

Załóżmy najpierw, że $x$ jest punktem izolowanym w zbiorze $A$, czyli $x \in A \setminus A^d$. Ponieważ $x \notin A^d$, więc (na mocy zadania 2.23) istnieje dodatnia liczba $r$ taka, że $(K(x,r) \cap A) \setminus \{x\} = \emptyset$. Wynika stąd, że $K(x,r) \cap A = \{x\}$.

Załóżmy teraz, że istnieje dodatnia liczba $r$ taka, że $K(x,r) \cap A = \{x\}$. Wtedy $x \in A$ i $(K(x,r) \cap A) \setminus \{x\} = \emptyset$. Oznacza to, że $x \in A \setminus A^d$, czyli, że $x$ jest punktem izolowanym w zbiorze $A$.

Rozwiązanie zadania 3.49.

Ad (1). Skoro w każdym otoczeniu punktu $x$ jest nieprzeliczalnie wiele punktów zbioru $A$, więc jest ich nieskończenie wiele.

Ad (2). W dowolnym otoczeniu punktu $x$ ze zbioru $A^c$ jest nieprzeliczalnie wiele punktów zbioru $A$, więc jest też nieprzeliczalnie wiele punktów należących do jego nadzbioru $B$.

Ad (3). Z własności (2) wynikają inkluzje: $A^c \subset (A \cup B)^c$ i $B^c \subset (A \cup B)^c$. Stąd już bezpośrednio wnioskujemy, że $A^c \cup B^c \subset (A \cup B)^c$.

Przypuśćmy teraz, że $x \notin A^c \cup B^c$. Wtedy $x \notin A^c$ i $x \notin B^c$. Istnieją więc liczby dodatnie $r_1$ i $r_2$ takie, że zbiory

$$K(x, r_1) \cap A \quad \text{i} \quad K(x, r_2) \cap B$$

są co najwyżej przeliczalne. Dla $r = \min\{r_1, r_2\}$ zbiór

$$K(x, r_1) \cap (A \cup B)$$

jest co najwyżej przeliczalny, a to dowodzi, że $x \notin (A \cup B)^c$. Wynika stąd inkluzja

$$(A \cup B)^c \subset A^c \cup B^c.$$

W ten sposób otrzymaliśmy żądaną równość.

Ad (4). Niech $x \in (A^c)^d$. Istnieje więc ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$x_n \neq x, \quad x_n \in A^c, \quad x_n \longrightarrow x.$$

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Zbiór $A \cap K\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ jest nieprzeliczalny, więc $K(x, \varepsilon) \cap A$ jako jego nadzbiór jest zbiorem nieprzeliczalnym.

Ad (5). Na mocy (4) wnioskujemy, że $\overline{(A^c)} = A^c \cup (A^c)^d = A^c$, a to dowodzi jednocześnie, że zbiór $A^c$ jest domknięty.

# Rozdział 4

# Funkcje ciągłe

**Rozwiązanie zadania 4.1.**

Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie dowolną funkcją, gdzie $(X, \varrho)$ i $(Y, \rho)$ są dwiema przestrzeniami metrycznymi i niech $x_0$ będzie punktem skupienia zbioru $X$.

Załóżmy najpierw, że spełniony jest warunek Heinego granicy funkcji $f$ w punkcie $x_0 \in X$, tzn. dla każdego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ takiego, że $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, ciąg $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny i jego granicą jest $y$.

Przypuśćmy, że warunek Cauchy'ego nie jest spełniony, tzn.

$$\exists_{\varepsilon>0}\forall_{\delta>0}\exists_{x\in X}\,(0 < \varrho(x, x_0) < \delta \wedge \rho(f(x), y)) \geqslant \varepsilon)\,.$$

W szczególności, dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieje punkt $x_n \in X$ taki, że

$$0 < \varrho(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \ \text{ i } \ \rho(f(x_n), y) \geqslant \varepsilon.$$

W ten sposób skonstruowaliśmy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniający warunki

$$x_n \longrightarrow x_0, \quad x_n \neq x_0, \quad \text{i} \quad \rho(f(x_n), y) \geqslant \varepsilon.$$

Ciąg ten jest zbieżny do punktu $x_0$, składa się z punktów różnych od $x_0$ i odpowiadający mu ciąg wartości funkcji nie jest zbieżny do punktu $y$. Sprzeczność kończy tę część dowodu.

Załóżmy teraz, że dla funkcji $f$ spełniony jest warunek Cauchy'ego granicy; tzn.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\,((0 < \varrho(x, x_0) < \delta) \Longrightarrow (\rho(f(x), y) < \varepsilon))\,.$$

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Ustalmy liczbę dodatnią $\varepsilon$. Z założenia wynika istnienie liczby dodatniej $\delta$ o tej własności, że

$$\rho(f(x), y) < \varepsilon \ \text{ jeśli } \ 0 < \varrho(x, x_0) < \delta.$$

Ze zbieżności $x_n \longrightarrow x_0$ wnioskujemy teraz, że istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że spełniona jest nierówność

$$0 < \varrho(x_n, x_0) < \delta \text{ dla } n \geqslant n_0.$$

Tak więc dla $n \geqslant n_0$ spełniona jest nierówność $\rho(f(x_n), y) < \varepsilon$.

Wnioskujemy zatem, że ciąg $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $y$. To dowodzi warunku Heinego.

**Rozwiązanie zadania 4.2.**

Przypuśćmy, że funkcja $f : X \longrightarrow Y$ ma dwie (czyli różne) granice w pewnym punkcie $x_0 \in X$. Niech to będą punkty $y$ i $z$. Wówczas $\eta = \frac{1}{2}\rho(y, z)$ jest liczbą dodatnią. Z założenia o dwóch granicach wiemy, że dla liczby $\eta$ istnieją: liczba $\delta_1 > 0$ taka, że

$$\rho(f(x), y) < \eta \text{ jeśli } 0 < \varrho(x, x_0) < \delta_1$$

i liczba $\delta_2 > 0$ taka, że

$$\rho(f(x), z) < \eta \text{ jeśli } 0 < \varrho(x, x_0) < \delta_2.$$

Niech teraz $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Jest ona liczbą dodatnią i dla punktów $x$ spełniających nierówność $0 < \varrho(x, x_0) < \delta$ spełnione są również obie nierówności:

$$\rho(f(x), y) < \eta,$$

$$\rho(f(x), z) < \eta.$$

Zatem

$$2\eta = \rho(y, z) \leqslant \rho(y, f(x)) + \rho(f(x), z) < \eta + \eta = 2\eta.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób sprzeczność, co kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 4.3.**

Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie dowolną funkcją, gdzie $(X, \varrho)$ i $(Y, \rho)$ są dwiema przestrzeniami metrycznymi i niech $x_0$ będzie dowolnym punktem zbioru $X$.

Załóżmy najpierw, że spełniony jest warunek Heinego ciągłości funkcji $f$ w punkcie $x_0 \in X$, tzn. dla każdego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ takiego, że $x_n \to x_0$, również ciąg $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny i jego granicą jest $f(x_0)$.

Przypuśćmy, że warunek Cauchy'ego nie jest spełniony, tzn.

$$\exists_{\varepsilon>0}\forall_{\delta>0}\exists_{x\in X}\,(\varrho(x, x_0) < \delta \ \wedge \ \rho(f(x), f(x_0)) \geqslant \varepsilon).$$

W szczególności, dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieje punkt $x_n \in X$ taki, że

$$\varrho(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ i } \rho(f(x_n), f(x_0)) \geqslant \varepsilon.$$

W ten sposób skonstruowaliśmy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniający warunki

$$x_n \longrightarrow x_0, \quad \rho(f(x_n), f(x_0)) \geqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ciąg ten jest zbieżny do punktu $x_0$ i odpowiadający mu ciąg wartości funkcji nie jest zbieżny do punktu $f(x_0)$. Sprzeczność kończy tę część dowodu.

Załóżmy teraz, że dla funkcji $f$ spełniony jest warunek Cauchy'ego ciągłości, tzn.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\left((\varrho(x, x_0) < \delta) \Longrightarrow (\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)\right).$$

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do punktu $x_0$. Ustalmy pewną dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Z założenia wynika istnienie liczby dodatniej $\delta$ o tej własności, że

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ jeśli } \varrho(x, x_0) < \delta.$$

Ze zbieżności $x_n \longrightarrow x_0$ wnioskujemy teraz, że istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że spełniona jest nierówność

$$\varrho(x_n, x_0) < \delta \text{ dla } n \geqslant n_0.$$

Tak więc dla $n \geqslant n_0$ spełniona jest nierówność $\rho(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$. Wnioskujemy zatem, że ciąg $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $f(x_0)$. To dowodzi warunku Heinego.

**Rozwiązanie zadania 4.4.**

Załóżmy, że funkcja $f$ jest ciągła w przestrzeni $X$, tzn. jest ciągła w każdym punkcie tej przestrzeni. Niech $V$ będzie dowolnym zbiorem otwartym w przestrzeni $Y$. Jeśli $f^{-1}(V) = \emptyset$, to jest on zbiorem otwartym. Niech teraz $f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Rozważmy dowolny punkt $x_0$ należący do zbioru $f^{-1}(V)$. Wtedy $f(x_0) \in V$ i istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że $K(f(x_0), \varepsilon) \subset V$.

Funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x_0$, więc istnieje liczba dodatnia $\delta$ taka, że

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon, \text{ gdy } \varrho(x, x_0) < \delta.$$

Dla wszystkich punktów $x$ z kuli $K(x_0, \delta)$ punkt $f(x)$ należy do kuli $K(f(x_0), \varepsilon)$, czyli

$$K(x_0, \delta) \subset f^{-1}\left(K(f(x_0), \varepsilon)\right) \subset f^{-1}(V).$$

Dowodzi to, że zbiór $f^{-1}(V)$ jest otwarty.

Załóżmy teraz, że zbiór $f^{-1}(V)$ jest otwarty dla każdego zbioru otwartego w przestrzeni $Y$. Niech $x_0$ będzie dowolnym punktem przestrzeni $X$, a $\varepsilon$ – dowolną liczbą dodatnią. Kula $K(f(x_0), \varepsilon)$ jest zbiorem otwartym, więc również zbiór $f^{-1}(K(f(x_0), \varepsilon))$ jest otwarty i $x_0$ do niego należy. Istnieje więc dodatnia liczba $\delta$ taka, że

$$K(x_0, \delta) \subset f^{-1}\left(K(f(x_0), \varepsilon)\right),$$

co dowodzi, że

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon, \text{ gdy } \varrho(x, x_0) < \delta.$$

Stąd wynika ciągłość funkcji $f$ w punkcie $x_0$. Z dowolności wyboru punktu $x_0$ wynika ciągłość tej funkcji w każdym punkcie przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 4.5.**

Jeśli funkcja $f$ jest ciągła, to dla dowolnego zbioru $D$ domkniętego w przestrzeni $Y$ zbiór $Y \setminus D$ jest otwarty, więc na mocy zadań 1.13 i 4.4 zbiór

$$X \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(Y \setminus D)$$

jest otwarty, a to dowodzi domkniętości zbioru $f^{-1}(D)$.

Jeśli zaś zbiór $f^{-1}(D)$ jest domknięty dla każdego zbioru domkniętego w przestrzeni $Y$, to dla dowolnego zbioru otwartego $U$ w przestrzeni $Y$ zbiór $Y \setminus U$ jest domknięty i

$$X \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus U)$$

jest domknięty, zatem zbiór $f^{-1}(U)$ jest otwarty (dla dowolnego zbioru otwartego $U$ w przestrzeni X), co dowodzi ciągłości funkcji $f$.

**Rozwiązanie zadania 4.6.**

Niech $X = Y = \mathsf{R}$ i w obu tych zbiorach rozważmy metrykę naturalną. Funkcja $\sin : \mathsf{R} \longrightarrow \mathsf{R}$ jest ciągła i $\mathsf{R}$ jest zbiorem otwartym, natomiast jego obraz jest przedziałem $[-1, 1]$, który nie jest zbiorem otwartym w $\mathsf{R}$.

Teraz dla funkcji wykładniczej $f : \mathsf{R} \longrightarrow \mathsf{R}$ postaci

$$f(x) = 2^x \quad \text{dla} \quad x \in \mathsf{R}$$

obrazem zbioru (domkniętego) $(-\infty, 0]$ jest przedział $(0, 1]$, który nie jest zbiorem domkniętym.

**Rozwiązanie zadania 4.7.**

Niech $f$ będzie funkcją ciągłą w punkcie $x$ i $E$ niech będzie dowolnym zbiorem zawartym w $Y$. Załóżmy, że $f(x) \in \operatorname{Int}(E)$. Istnieje dodatnia liczba $\varepsilon$ taka, że $K(f(x), \varepsilon) \subset \operatorname{Int}(E)$. Z ciągłości funkcji $f$ w punkcie $x$ wynika, że istnieje dodatnia liczba $\delta$ o tej własności, że

$$f(K(x,\delta)) \subset K(f(x), \varepsilon) \subset E.$$

Zatem

$$K(x,\delta) \subset f^{-1}(K(f(x),\varepsilon)) \subset f^{-1}(E).$$

Stąd wnioskujemy, że $x \in \operatorname{Int}(f^{-1}(E))$, co kończy tę część dowodu.

Niech $x$ będzie ustalonym punktem przestrzeni $X$. Załóżmy teraz, że dla dowolnego zbioru $E$ w przestrzeni $Y$ prawdziwa jest implikacja

$$f(x) \in \operatorname{Int}(E) \Longrightarrow x \in \operatorname{Int}(f^{-1}(E)).$$

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Oczywiście,

$$f(x) \in K(f(x),\varepsilon) = \operatorname{Int}(K(f(x),\varepsilon)).$$

Z założenia wynika, że $x \in \operatorname{Int}(f^{-1}(K(f(x),\varepsilon)))$, czyli istnieje dodatnia liczba $\delta$ taka, że $x \in K(x,\delta) \subset f^{-1}(K(f(x),\varepsilon))$. Wynika stąd, że

$$f(K(x,\delta)) \subset K(f(x),\varepsilon),$$

a to dowodzi ciągłości funkcji $f$ w punkcie $x$.

**Rozwiązanie zadania 4.8.**

Załóżmy najpierw, że funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x$. Jeśli $E$ jest dowolnym zbiorem w przestrzeni $Y$ i $x \in \overline{f^{-1}(E)}$, to istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$x_n \longrightarrow x, \quad \text{i} \quad x_n \in f^{-1}(E).$$

Zatem $f(x_n) \in E$ i z ciągłości funkcji $f$ w punkcie $x$ wynika, że $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, skąd już bezpośrednio otrzymujemy relację $f(x) \in \overline{E}$, co kończy tę część dowodu.

Załóżmy teraz, że dla każdego zbioru $V \subset Y$ ma miejsce implikacja

$$x \in \overline{f^{-1}(V)} \Longrightarrow f(x) \in \overline{V}.$$

Niech teraz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do punktu $x$. Określmy zbiór

$$B = \{f(x_n) \, : \, n \in \mathsf{N}\}.$$

Oczywiście, $x_n \in f^{-1}(B)$, czyli $x \in \overline{f^{-1}(B)}$, skąd na mocy założenia stwierdzamy, że $f(x) \in \overline{B}$. Istnieje zatem podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, dla którego

$$f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x).$$

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnego podciągu $(x_{m_l})_{l=1}^{\infty}$ ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Otrzymamy stąd wniosek, że każdy podciąg ciągu $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg zbieżny do punktu $f(x)$. Na mocy zadania 2.20 stwierdzamy, że cały ciąg $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do $f(x)$. Dowodzi to, że funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x$.

**Rozwiązanie zadania 4.9.**

Załóżmy, że funkcja $f$ jest ciągła. Niech $A$ będzie dowolnym zbiorem zawartym w $X$. Jeśli $y \in f(\overline{A})$, to istnieje punkt $x \in \overline{A}$ taki, że $y = f(x)$. Zatem istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w zbiorze $A$ zbieżny do punktu $x$. Stąd wnioskujemy, że (funkcja $f$ jest ciągła)

$$f(x_n) \longrightarrow f(x) \quad \text{i} \quad f(x_n) \in f(A).$$

Tak więc $f(x) \in \overline{f(A)}$.

Załóżmy, że spełniona jest inkluzja $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ dla każdego podzbioru $E$ zbioru $X$ i przypuśćmy ponadto, że funkcja $f$ nie jest ciągła w pewnym punkcie $x \in X$. Istnieje więc ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniający warunki:

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{i} \quad f(x_n) \not\longrightarrow f(x).$$

Dla pewnej liczby dodatniej $\varepsilon$ i każdej liczby naturalnej $k$ istnieje liczba naturalna $n_k$ taka, że

$$\rho(f(x_{n_k}), f(x)) \geqslant \varepsilon. \tag{4.1}$$

Możemy przy tym wybrać ciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ w taki sposób, że $n_{k+1} > n_k$.

Powstały w ten sposób podciąg ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest więc też zbieżny do punktu $x$. Oznaczmy ten podciąg dla skrócenia zapisu jako $(u_k)_{k=1}^{\infty}$. Oznaczając teraz przez $E$ zbiór $\{u_k : k \in \mathrm{N}\}$, zauważamy, że $\overline{E} = E \cup \{x\}$ i $f(E) = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, \}$. Z uwagi na nierówność (4.1) stwierdzamy, że $\rho(f(x), f(E)) \geqslant \varepsilon$, czyli $f(x) \notin \overline{f(E)}$ wbrew założeniu. Sprzeczność kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 4.10.**

Niech $V$ będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni $X$. Jeśli funkcja $f$ jest ciągła i $x$ jest dowolnym punktem zbioru $\overline{f^{-1}(V)}$, to istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w zbiorze $f^{-1}(V)$ zbieżny do $x$. Wynika stąd, że $f(x_n) \in V$. Z ciągłości funkcji $f$ wynika, że $f(x) \in \overline{V}$, czyli

$$x \in f^{-1}(\overline{V}).$$

Załóżmy teraz, że dla każdego zbioru $V \subset Y$ ma miejsce inkluzja

$$\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\overline{V}).$$

Przypuśćmy, że funkcja $f$ nie jest ciągła w pewnym punkcie $x \in X$. Istnieje więc ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniający warunki:

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{i} \quad f(x_n) \not\longrightarrow f(x).$$

Dla pewnej liczby dodatniej $\varepsilon$ i każdej liczby naturalnej $k$ istnieje liczba naturalna $n_k$ taka, że

$$\rho(f(x_{n_k}), f(x)) \geqslant \varepsilon. \tag{4.2}$$

Możemy przy tym wybrać ciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ w taki sposób, że $n_{k+1} > n_k$. Powstały w ten sposób podciąg ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest też zbieżny do punktu $x$. Oznaczmy ten podciąg dla skrócenia zapisu jako $(u_k)_{k=1}^{\infty}$. Oznaczając teraz przez $V$ zbiór $\{f(u_k) : k \in \mathrm{N}\}$, zauważamy, że z uwagi na nierówność (4.2) $\rho(f(x), V) \geqslant \varepsilon$, czyli

$$f(x) \notin \overline{V}.$$

Natomiast $u_k \in f^{-1}(V)$, więc ze zbieżności $u_k \longrightarrow x$, wynika relacja $x \in \overline{f^{-1}(V)}$, co z zależnością $x \notin f^{-1}(\overline{V})$ zaprzecza założeniu.

Sprzeczność kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 4.11.**

Załóżmy najpierw, że funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x$. Dla dowolnej liczby dodatniej $r$ istnieje dodatnia liczba $\delta$ taka, że

$$f(K(x,\delta)) \subset K(f(x),r),$$

a to oznacza, że $K(x,\delta) \subset f^{-1}(K(f(x),r))$, zatem

$$x \in \operatorname{Int}\left(f^{-1}(K(f(x),r))\right).$$

Załóżmy teraz, że zbiór $\operatorname{Int}\left(f^{-1}(K(f(x),r))\right)$ zawiera punkt $x$ dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej $r$.

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje na mocy założenia liczba dodatnia $\delta$ taka, że $K(x,\delta) \subset f^{-1}(K(f(x),\varepsilon))$, czyli

$$f(K(x,\delta)) \subset K(f(x),\varepsilon),$$

a to oznacza ciągłość funkcji $f$ w punkcie $x$.

**Rozwiązanie zadania 4.12.**

Jeśli funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x$, to warunek z zadania wynika z zadania poprzedniego.

Jeśli spełniony jest warunek

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \left(x \in \operatorname{Int}\left(f^{-1}\left(K\left(f(x),\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right),$$

to dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$ taka, że $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Zatem spełniony jest warunek z zadania poprzedniego i na tej podstawie wnioskujemy, że funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x$.

**Rozwiązanie zadania 4.13.**

Niech $x$ będzie dowolnym punktem przestrzeni $X$. Z założenia (zbiór $A$ jako brzegowy ma dopełnienie będące zbiorem gęstym w przestrzeni $X$) wynika, że istnieją ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ takie, że

$$x_n \longrightarrow x, \quad x_n \in A, \quad u_n \longrightarrow x \quad \text{i} \quad u_n \in X \setminus A.$$

Zatem

$$f(x_n) \longrightarrow 0, \quad \text{i} \quad f(u_n) \longrightarrow 1,$$

co dowodzi, że nie istnieje granica funkcji $f$ w punkcie $x$.

**Rozwiązanie zadania 4.14.**

Oczywiście $B \subset A^d$.

Niech $x$ będzie ustalonym punktem zbioru $A$ i $\varepsilon$ – dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ $f$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x$, więc istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\rho(g(u), g(x)) = \rho(f(u), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{gdy} \quad u \in A \cap K(x, 2\delta). \tag{4.3}$$

Niech teraz $v$ należy do zbioru $B \cap K(x, \delta)$. Ponieważ w punkcie $v$ istnieje granica funkcji $f$, więc w każdym otoczeniu tego punktu, w szczególności w kuli $K(v, \delta)$ istnieją punkty $t \in A$ takie, że $\rho(g(v), f(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd i z relacji $t \in K(x, 2\delta)$ wynika

$$\rho(g(v), f(x)) \leqslant \rho(g(v), f(t)) + \rho(f(t), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dowodzi to nierówności

$$\rho(g(v), g(x)) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad v \in B \cap K(x, \delta).$$

Stąd i z nierówności 4.3 wynika

$$\rho(g(w), g(x)) < \varepsilon. \quad \text{dla} \quad w \in (A \cup B) \cap K(x, \delta),$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $g$ w punkcie $x$ należącym do zbioru $A$.

Niech teraz $x$ będzie ustalonym punktem zbioru $B$, $\varepsilon$ niech będzie dowolną liczbą dodatnią. Z istnienia granicy funkcji $f$ w punkcie $x$ wynika istnienie liczby dodatniej $\delta$ takiej, że

$$\rho(f(t), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad t \in A \cap K(x, 2\delta). \tag{4.4}$$

Niech teraz $v$ należy do zbioru $B \cap K(x, \delta)$. Ponieważ w punkcie $v$ istnieje granica funkcji $f$, więc w każdym otoczeniu tego punktu, w szczególności w kuli $K(v, \delta)$ istnieją punkty $t \in A$ takie, że $\rho(g(v), f(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd i z relacji $t \in K(x, 2\delta)$ wynika

$$\rho(g(v), g(x)) \leqslant \rho(g(v), f(t)) + \rho(f(t), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dowodzi to nierówności

$$\rho(g(v), g(x)) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad v \in B \cap K(x, \delta).$$

Stąd i z nierówności 4.4 wynika

$$\rho(g(w), g(x)) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad w \in (A \cup B) \cap K(x, \delta),$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $g$ w punkcie $x$ należącym do zbioru $B$.

W każdym punkcie zbioru $A \cup B$ funkcja $g$ jest ciągła, co kończy nasze rozważania.

**Rozwiązanie zadania 4.15.**

Dowód wynika z definicji Heinego i zadania 2.85.

**Rozwiązanie zadania 4.16.**

Dowód wynika z definicji Heinego i zadania 2.85.

**Rozwiązanie zadania 4.17.**

Niech $V$ będzie dowolnym zbiorem otwartym w przestrzeni $Y$. Wtedy

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap (A \cup B) = (f^{-1}(V) \cap A) \cup (f^{-1}(V) \cap B) =$$
$$= \left((f_{|A})^{-1}(V) \cap A\right) \cup \left((f_{|B})^{-1}(V) \cap B\right).$$

Ponieważ ostatnie dwa zbiory są otwarte i ich suma też, więc funkcja $f$ jest ciągła (patrz zadanie 4.4.)

Można podać kilka innych dowodów tego faktu.

Niech $x$ będzie dowolnym punktem zbioru $X$. Wtedy $x \in A$ lub $x \in B$; niech np. $x \in A$. Ponieważ zbiór $A$ jest otwarty, więc istnieje dodatnia liczba $r$ taka, że $K(x,r) \subset A$. Z ciągłości funkcji $f_{|A}$ wynika, że dla dowolnej liczby $\varepsilon$ istnieje dodatnia liczba $\delta$ taka, że

$$\rho(f(u), f(x)) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad u \in A \cap K(x,\delta).$$

Można przyjąć, że $\delta < r$. Wtedy $A \cap K(x,\delta) = K(x,\delta)$, a stąd już wnioskujemy, że funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x$. Z dowolności wyboru punktu $x$ wnioskujemy o ciągłości funkcji $f$ w przestrzeni $X$.

Niech $x$ będzie dowolnym punktem zbioru $X$. Wtedy $x \in A$ lub $x \in B$; niech np. $x \in A$. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do punktu $x$. Ponieważ zbiór $A$ jest otwarty, więc istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że $x_n \in A$ dla wszystkich $n \geqslant n_1$. Ciąg $(x_n)_{n=n_1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$ i jego wyrazy należą do zbioru $A$. Z ciągłości funkcji $f_{|A}$ wynika, że $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, a to implikuje ciągłość funkcji $f$ w punkcie $x$. Z dowolności wyboru punktu $x$ wnioskujemy o ciągłości funkcji $f$ w przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 4.18.**

Dowód polega na powtórzeniu któregoś z dowodów poprzedniego zadania. Np. Niech $x$ będzie dowolnym punktem zbioru $X$. Wtedy $x \in G_t$ dla pewnego $t \in T$. Ponieważ zbiór $G_t$ jest otwarty, więc istnieje dodatnia liczba $r$ taka, że $K(x,r) \subset G_t$. Z ciągłości funkcji $f_{|G_t}$ wynika, że dla dowolnej liczby $\varepsilon$ istnieje dodatnia liczba $\delta$ taka, że

$$\rho(f(u), f(x)) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad u \in G_t \cap K(x,\delta).$$

Można przyjąć, że $\delta < r$. Wtedy $G_t \cap K(x,\delta) = K(x,\delta)$, a stąd już wnioskujemy, że funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x$. Z dowolności wyboru punktu $x$ wnioskujemy o ciągłości funkcji $f$ w przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 4.19.**

Niech $D$ będzie dowolnym zbiorem domkniętym w przestrzeni $(Y, \rho)$. Wtedy

$$f^{-1}(D) = f^{-1}(D) \cap (A \cup B) = (f^{-1}(D) \cap A) \cup (f^{-1}(D) \cap B) =$$

$$= \left((f_{|A})^{-1}(D) \cap A\right) \cup \left((f_{|B})^{-1}(D) \cap B\right).$$

Ponieważ ostatnie dwa zbiory są domknięte i ich suma też, więc funkcja $f$ jest ciągła (patrz zadanie 4.5).

Załóżmy teraz, że $X = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, gdzie wszystkie zbiory $F_k$ są domknięte. Niech $D$ będzie dowolnym zbiorem domkniętym w przestrzeni $(Y, \rho)$. Wtedy

$$f^{-1}(D) = f^{-1}(D) \cap \bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcup_{k=1}^{n} (f^{-1}(D) \cap F_k) = \bigcup_{k=1}^{n} \left((f_{|F_k})^{-1}(D) \cap F_k\right).$$

Ponieważ zbiory w ostatniej sumie są domknięte, więc ich (skończona) suma też, zatem funkcja $f$ jest ciągła (patrz zadanie 4.5).

**Rozwiązanie zadania 4.20.**

Nie można poprzedniego zadania uogólnić na nieskończoną rodzinę zbiorów domkniętych.

Niech $X = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$. W zbiorze $X$ rozważmy naturalną metrykę. Zbiór $X$ można przedstawić w postaci

$$X = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{n}\right\},$$

Określmy teraz funkcję $f : X \longrightarrow \mathrm{R}$ następująco

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla} \quad x = \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0, \end{cases}$$

Funkcja ta jest ciągła na każdym zbiorze $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ jak również na zbiorze $\{0\}$. Nie jest jednak ciągła na zbiorze $X$.

**Rozwiązanie zadania 4.21.**

Zauważmy, że z założeń zadania wynika równość $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Int}(E_n)$. Na mocy zadania 4.18 wnioskujemy, że funkcja $f$ jest ciągła.

Można też podać dowód bezpośredni.

Niech $x$ będzie dowolnym elementem zbioru $X$. Istnieje $k \in \mathrm{N}$ takie, że

$$x \in E_k \subset \mathrm{Int}(E_{k+1}).$$

Dla pewnej liczby dodatniej $r$ mamy

$$x \in K(x,r) \subset E_{k+1}.$$

Funkcja $f_{|E_{k+1}}$ jest ciągła, więc również funkcja $f_{|K(x,r)}$ jest ciągła. Dowodzi to ciągłości funkcji $f$ w punkcie $x$. Z dowolności wyboru punktu $x$ wynika ciągłość tej funkcji w przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 4.22.**

Niech $x$ będzie dowolnym punktem przestrzeni $X$ i $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dowolnym ciągiem zbieżnym do punktu $x$. Zbiór $E = \{x, x_1, x_2, \ldots\}$ jest ograniczony, zatem funkcja $f_{|E}$ jest ciągła, a ponieważ $x_n \longrightarrow x$, więc $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. Z ciągłości funkcji $f$ w dowolnym punkcie $x$ przestrzeni $X$ wynika ciągłość tej funkcji w całej przestrzeni.

**Rozwiązanie zadania 4.23.**

Niech $(X, \varrho)$, $(Y, \rho)$ i $(Z, \sigma)$ będą trzema przestrzeniami metrycznymi. Niech dalej $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ będą funkcjami ciągłymi. Oznaczmy jeszcze $h = g \circ f$. Dla dowolnego zbioru otwartego $V$ w przestrzeni $Z$ mamy (na mocy zadania 1.20):

$$h^{-1}(V) = f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right).$$

Na podstawie zadania 4.4 wnioskujemy, że $g^{-1}(V)$ jest otwarty w przestrzeni $(Y, \rho)$, w konsekwencji również zbiór $h^{-1}(V)$ jest otwarty w przestrzeni $(X, \varrho)$. Dowodzi to ciągłości funkcji $g \circ f$.

**Rozwiązanie zadania 4.24.**

Niech $g = f^{-1}$. Załóżmy najpierw, że funkcja $f$ jest homeomorfizmem. Zatem obie funkcje $f$ i $g$ są ciągłe; na mocy zadania 4.9, dla dowolnego zbioru $A \subset X$ mamy

$$f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)},$$

oznaczając teraz $B = f(A)$ mamy znów na podstawie zadania 4.9

$$g\left(\overline{B}\right) \subset \overline{g(B)}.$$

Stąd wynika

$$\overline{f(A)} = \overline{B} = f\left(g\left(\overline{B}\right)\right) \subset f\left(\overline{g(B)}\right) = f\left(\overline{g(f(A))}\right) = f\left(\overline{A}\right).$$

Teraz już otrzymujemy żądaną równość.

Załóżmy teraz, że dla dowolnego zbioru $A \subset X$ spełniona jest równość

$$\overline{f(A)} = f\left(\overline{A}\right). \tag{4.5}$$

Na podstawie zadania 4.9 otrzymujemy ciągłość funkcji $f$. Ponieważ dla dowolnego zbioru $B \subset Y$ istnieje zbiór $A \subset X$ taki, że $B = f(A)$ i jednocześnie $A = g(B)$. Wtedy z równości 4.5 i zadania 1.31 wynika

$$\overline{B} = \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{f(A)} = f(\overline{A}) = f\left(\overline{g(B)}\right),$$

a stąd

$$g(\overline{B}) = g\left(f\left(\overline{g(B)}\right)\right) = \overline{g(B)}.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $g$, czyli ostatecznie wnioskujemy, że $f$ jest homeomorfizmem.

**Rozwiązanie zadania 4.25.**

Ponieważ $f$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną, więc ma funkcję odwrotną; niech to będzie funkcja $g : Y \longrightarrow X$.

Załóżmy najpierw, że funkcja $f$ jest homeomorfizmem; Funkcja $g$ też jest homeomorfizmem. Dla dowolnego zbioru $B \subset Y$ spełniona jest równość

$$g(\overline{B}) = \overline{g(B)},$$

a ta jest równoważna równości

$$f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}.$$

Odwrotnie, jeśli spełniona jest równość

$$f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$$

dla każdego zbioru $B \subset Y$, to również

$$g(\overline{B}) = \overline{g(B)}$$

dla każdego zbioru $B$. Stąd wnioskujemy (na podstawie zadania 4.24), że funkcja $g$ (a zatem i $f$) jest homeomorfizmem.

**Rozwiązanie zadania 4.26.**

Załóżmy, że funkcja $f$ jest homeomorfizmem. Z zadania 4.24 wynika równość

$$f\left(\overline{X \setminus A}\right) = \overline{f(X \setminus A)}$$

dla dowolnego zbioru $A \subset X$. Tak więc

$$f(\operatorname{Int}(A)) = f\left(X \setminus \overline{X \setminus A}\right) = f(X) \setminus f\left(\overline{X \setminus A}\right) =$$

$$Y \setminus \overline{f(X \setminus A)} = Y \setminus \overline{Y \setminus f(A)} = \mathrm{Int}\,(f(A)).$$

Odwrotnie, niech teraz spełniona będzie równość

$$f(\mathrm{Int}\,(A)) = \mathrm{Int}\,(f(A))$$

dla dowolnego zbioru $A \subset X$. Dla każdego zbioru $A \subset X$ mamy więc:

$$f(\overline{A}) = f(X \setminus \mathrm{Int}\,(X \setminus A)) = f(X) \setminus f(\mathrm{Int}\,(X \setminus A)) =$$

$$Y \setminus \mathrm{Int}\,(f(X \setminus A)) = Y \setminus \mathrm{Int}\,(Y \setminus f(A)) = \overline{f(A)}.$$

Na podstawie zadania 4.24 wnioskujemy teraz, że funkcja $f$ jest homeomorfizmem.

**Rozwiązanie zadania 4.27.**

Ponieważ $f$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną, więc ma funkcję odwrotną; niech to będzie funkcja $g : Y \longrightarrow X$.

Załóżmy najpierw, że funkcja $f$ jest homeomorfizmem; Funkcja $g$ też jest homeomorfizmem. Z zadania 4.26 wynika, że dla dowolnego zbioru $B \subset Y$ spełniona jest równość

$$g(\mathrm{Int}\,(B)) = \mathrm{Int}\,(g(B)),$$

a ta jest równoważna równości

$$f^{-1}(\mathrm{Int}\,(B)) = \mathrm{Int}\,(f^{-1}(B)).$$

Odwrotnie, jeśli spełniona jest równość

$$f^{-1}(\mathrm{Int}\,(B)) = \mathrm{Int}\,(f^{-1}(B))$$

dla każdego zbioru $B \subset Y$, to również

$$g(\mathrm{Int}\,(B)) = \mathrm{Int}\,(g(B))$$

dla każdego zbioru $B$. Stąd wnioskujemy, że funkcja $g$ (a zatem i $f$) jest homeomorfizmem.

**Rozwiązanie zadania 4.28.**

Ponieważ $f$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną, więc

$$f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$$

dla dowolnych zbiorów $C, D \subset X$. Stąd otrzymujemy na podstawie zadania 4.24

$$f(\mathrm{Fr}\,(A)) = f\left(\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}\right) = f(\overline{A}) \cap f\left(\overline{X \setminus A}\right) =$$

$$\overline{f(A)} \cap \overline{f(X \setminus A)} = \overline{f(A)} \cap \overline{Y \setminus f(A)} = \mathrm{Fr}\,(f(A)).$$

**Rozwiązanie zadania 4.29.**

Załóżmy najpierw, że $f : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ jest homeomorfizmem. Ponieważ $f$ jest funkcją ciągłą, więc z warunku (1) wynika bezpośrednio warunek (2). Jeśli spełniony jest warunek (2), to z ciągłości funkcji odwrotnej do $f$ wynika warunek (1).

Załóżmy teraz, że warunki (1) i (2) są równoważne. Udowodnimy najpierw, że jest to funkcja różnowartościowa. Istotnie, gdyby $f(x) = f(u)$ dla pewnych $x$ i $u$ ze zbioru $X$, to ciąg

$$(f(x), f(u), f(x), f(u), f(x), f(u), \ldots)$$

byłby zbieżny (stały), natomiast ciąg

$$(x, u, x, u, x, u, \ldots)$$

jest zbieżny jedynie wtedy, gdy $x = u$.

Tak więc funkcja $f$ jest wzajemnie jednoznaczna. Ma zatem funkcję odwrotną. Implikacja (1) $\Longrightarrow$ (2) dowodzi ciągłości funkcji $f$, natomiast implikacja odwrotna dowodzi ciągłości funkcji $f^{-1}$.

**Rozwiązanie zadania 4.30.**

Ad (1). Funkcja tożsamościowa na zbiorze $X$ jest szukanym homeomorfizm.

Ad (2). Jeśli funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest homeomorfizmem z przestrzeni $X$ do przestrzeni $Y$, to funkcja odwrotna $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ istnieje i jest też homeomorfizmem (warunki (1) i (2) z zadania 4.29 są równoważne) przekształcającym przestrzeń $Y$ na przestrzeń $X$.

Ad (3). Niech $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ będą homeomorfizmami. Złożenie $g \circ f$ jest wzajemnie jednoznaczną funkcją przekształcającą zbiór $X$ na zbiór $Z$. Jest to też funkcja ciągła i odwrotna do niej też jest funkcją ciągłą, gdyż $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (zadanie 1.20).

**Rozwiązanie zadania 4.31.**

Przykład jest podany w zadaniu następnym.

**Rozwiązanie zadania 4.32.**

Ciągłość funkcji $f$ w przedziale $[0, 1)$ nie wymaga dowodu. W punkcie 2, izolowanym w przestrzeni, funkcja też jest ciągła. Łatwo zauważamy, że funkcja ta jest wzajemnie jednoznaczna i funkcja odwrotna do niej jest dana wzorem

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{dla} \quad y \in [0, 1), \\ 2 & \text{dla} \quad y = 1. \end{cases}$$

Ta funkcja nie jest ciągła w punkcie 1, gdyż $1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1$, natomiast

$$f^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1 \neq 2 = f^{-1}(1).$$

**Rozwiązanie zadania 4.33.**

Ad (1). Niech $A$ będzie zbiorem gęstym w przestrzeni $X$. Udowodnimy gęstość zbioru $f(A)$ w przestrzeni $Y$. Niech $V$ będzie dowolnym niepustym zbiorem otwartym w przestrzeni $Y$ i $U = f^{-1}(V)$. Jest to zbiór otwarty i niepusty, bo $f$ jest surjekcją, zatem $A \cap U \neq \emptyset$, czyli $f(A) \cap V \neq \emptyset$. Stąd wnioskujemy, że zbiór $f(A)$ jest gęsty w przestrzeni $Y$.

Można ten fakt udowodnić krócej: Jeśli $A$ jest zbiorem gęstym w przestrzeni $X$, to (na mocy zadania 4.24)

$$\overline{f(A)} = f\left(\overline{A}\right) = f(X) = Y,$$

co dowodzi, że zbiór $f(A)$ jest gęsty w przestrzeni $Y$.

W tym przypadku wystarczy założenie, że funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest wzajemnie jednoznaczna i ciągła. Mamy wówczas (patrz zadanie 4.9):

$$\overline{f(A)} \supset f\left(\overline{A}\right) = f(X) = Y,$$

co dowodzi, że zbiór $f(A)$ jest gęsty w przestrzeni $Y$.

Ad (2). Jeśli $A$ jest zbiorem brzegowym w przestrzeni $X$, to (patrz zadanie 4.9)

$$\operatorname{Int}(f(A)) = Y \setminus \overline{Y \setminus f(A)} = Y \setminus \overline{f(X \setminus A)} \subset Y \setminus f\left(\overline{X \setminus A}\right) =$$

$$f\left(X \setminus \overline{X \setminus A}\right) = f(\operatorname{Int}(A)) = f(\emptyset) = \emptyset.$$

W tym przypadku korzystaliśmy z założenia, że funkcja $f$ jest wzajemnie jednoznaczna i ciągła.

Ad (3). Dla zbioru $A$ nigdzie gęstego w przestrzeni $X$ mamy:

$$\operatorname{Int}\left(\overline{f(A)}\right) = \operatorname{Int}\left(f\left(\overline{A}\right)\right) = f\left(\operatorname{Int}\left(\overline{A}\right)\right) = f(\emptyset) = \emptyset.$$

Tu korzystamy z własności homeomorfizmu. Przykładem na istotność założenia homeomorfizmu jest funkcja Cantora (omówiona później).

Ad (4). Niech $A \subset X$ będzie zbiorem w sobie gęstym. Pokażemy, że zbiór $f(A)$ jest też w sobie gęsty. Niech $y$ będzie dowolnym elementem zbioru $f(A)$. Istnieje punkt $x \in A$ taki, że $y = f(x)$. Z założenia, że zbiór $A$ jest w sobie gęsty, wynika istnienie ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o tej własności, że $x_n \longrightarrow x$, $x_n \in A$ i $x_n \neq x$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $f(x_n) \in f(A)$. Ponieważ funkcja $f$ jest różnowartościowa, więc $f(x_n) \neq f(x)$ dla $n \in \mathbb{N}$, a ponadto $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, gdyż funkcja $f$ jest ciągła. Dowodzi to, że zbiór $f(A)$ jest w sobie gęsty.

Przykład funkcji stałej wskazuje na istotność założenia, że $f$ jest homeomorfizmem.

Ad (5). Homeomorfizm przekształca zbiór domknięty na zbiór domknięty, więc na mocy poprzedniej własności, obraz zbioru doskonałego jest zbiorem doskonałym.

Ad (6). Jeśli $A$ jest zbiorem regularnie otwartym w przestrzeni $X$, to zbiór $f(A)$ jest regularnie otwarty w przestrzeni $Y$. Istotnie, z własności zadań 4.24 i 4.26. wynika

$$\operatorname{Int}\left(\overline{f(A)}\right) = \operatorname{Int}\left(f\left(\overline{A}\right)\right) = f\left(\operatorname{Int}\left(\overline{A}\right)\right) = f(A).$$

Poniższy przykład pokazuje istotność założenia, że funkcja $f$ jest homeomorfizmem. Niech $X = (0,3)$, $Y = (0,2)$ i funkcja $f : X \longrightarrow Y$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (0,1), \\ 1 & \text{dla } x \in [1,2], \\ x-1 & \text{dla } x \in (2,3) \end{cases}$$

Zbiór $(0,1) \cup (2,3)$ jest regularnie otwarty, natomiast jego obraz, czyli $(0,1) \cup (1,2)$, nie jest zbiorem regularnie otwartym.

**Rozwiązanie zadania 4.34.**

Podamy tylko funkcje ustalające odpowiednie homeomorfizmy.

Ad (1). $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x-a}{b-a} \cdot \pi - \frac{\pi}{2}\right)$ dla $x \in (a,b)$.

Ad (2). $f(x) = \ln(b-x)$ dla $x \in (-\infty, b)$.

Ad (3). $f(x) = c + \operatorname{tg}\left(\frac{x-a}{2(b-a)} \cdot \pi - \frac{\pi}{2}\right)$ dla $x \in (a,b]$.

Ad (4). $f(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot (d-c) + c$ dla $x \in [a,b]$.

**Rozwiązanie zadania 4.35.**

Niech

$$U = \left\{(x,y) \;:\; x \in \mathsf{R},\ y \in \mathsf{R},\ x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}\right\},$$

$$V = U \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Wtedy zauważamy, że $X \subset Y$ i $V \subset X$.

W pierwszym przypadku homeomorfizmem jest funkcja tożsamościowa.

W drugim określamy funkcję $f : Y \longrightarrow U$ następująco:

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

Jest ona, oczywiście, szukanym homeomorfizmem.

Oczywiście, przestrzenie $X$ i $Y$ nie są homeomorficzne, gdyż druga z tych przestrzeni zawiera zbiór otwarty złożony z jednego elementu, a pierwsza z nich nie ma punktów izolowanych.

**Rozwiązanie zadania 4.36.**

Rozważmy najpierw przestrzenie $A$ i $B$. Gdyby istniał homeomorfizm $f : A \longrightarrow B$, to istniałaby liczba naturalna $k$ taka, że $f(0) = \frac{1}{k}$. Ponieważ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, więc

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{k}.$$

Z uwagi na fakt, że punkt $\frac{1}{k}$ jest izolowany w zbiorze $B$, wynioskowalibyśmy, że ciąg $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ musiałby być prawie stały (od pewnego miejsca stały); to zaś jest niemożliwe, bowiem $f$ miał być homeomorfizmem.

Przypuśćmy teraz, że $f : C \longrightarrow B$ jest homeomorfizmem. Zbiór $\{1\}$ jest otwarty w przestrzeni $B$, natomiast jego przeciwobraz też będący zbiorem jednoelementowym nie jest otwarty w przestrzeni $C$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Podobnie jak w poprzednim przypadku, jeśli $f : C \longrightarrow A$ jest homeomorfizmem, to zbiór $\{1\}$ jest otwarty w przestrzeni $A$, natomiast jego przeciwobraz też będący zbiorem jednoelementowym nie jest otwarty w przestrzeni $C$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

**Rozwiązanie zadania 4.37.**

Przestrzenie $B$ i $C$ są homeomorficzne.
Niech $f : C \longrightarrow B$ będzie funkcją daną wzorem

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} (2x_1, 0) & \text{dla} \quad x_1 \in [0,1],\ x_2 = 0, \\ (0, -2x_1) & \text{dla} \quad x_1 \in [-1,0),\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Jest to, jak nietrudno zauważyć, homeomorfizm.

Przestrzeń $A$ nie jest homeomorficzna z żadną z pozostałych. Łatwy dowód może być podany przy badaniu przestrzeni spójnych. (Rozdział 8.)

**Rozwiązanie zadania 4.38.**

Niech

$$X = \left\{(x, y) : x \in \mathsf{R},\ y \in \mathsf{R},\ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$

i dla każdej liczby naturalnej $n$ niech

$$X_n = X \cup \{(1,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}.$$

Żadne dwie przestrzenie $X_n$ i $X_k$ nie są homeomorficzne dla $k \neq n$. Istotnie, jeśli $k < n$, to przestrzeń $X_n$ ma $n$ punktów izolowanych, gdy przestrzeń $X_k$ ma tylko $k$ takich punktów. Funkcja $f_n : X_n \longrightarrow X$ dana wzorem

$$f_n(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{2n}, \frac{x_2}{2n}\right)$$

przekształca homeomorficznie przestrzeń $X_n$ w podprzestrzeń przestrzeni $X$, czyli też i przestrzeni $X_k$.

**Rozwiązanie zadania 4.39.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną. Określmy w zbiorze $X$ metrykę $\varrho^*$ następująco $\varrho^*(x, y) = \min\{\varrho(x, y), 1\}$. Zauważamy bez trudu, że dla punktów $x, y \in X$, dla których $\varrho(x, y) \leqslant 1$ spełniona jest równość $\varrho^*(x, y) = \varrho(x, y)$, a to dowodzi, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny względem metryki $\varrho$ do punktu $x$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny do $x$ względem metryki $\varrho^*$. Funkcja tożsamościowa spełnia więc warunek z zadania 4.29, jest więc poszukiwanym homeomorfizmem.

**Rozwiązanie zadania 4.40.**

Załóżmy, że funkcja $f$ jest jednostajnie ciągła. Niech ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniają warunek

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, z_n) = 0$$

i niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z założenia wynika, że istnieje dodatnia liczba $\delta$ taka, że

$$\rho(f(x), f(z)) < \varepsilon, \quad \text{gdy} \quad \varrho(x, z) < \delta.$$

Istnieje liczba naturalna $n_0$ taka, że

$$\varrho(x_n, z_n) < \delta \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Dla tychże liczb $n$, które są nie mniejsze niż $n_0$, spełniona jest więc nierówność

$$\rho(f(x_n), f(z_n)) < \varepsilon,$$

a to już dowodzi zbieżności

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f(x_n), f(z_n)) = 0.$$

Załóżmy teraz, że spełniona jest implikacja

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, z_n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(f(x_n), f(z_n)) = 0.$$

Przypuśćmy, że funkcja $f$ nie jest jednostajnie ciągła. Istnieje więc dodatnia liczba $\varepsilon$ taka, że dla każdej liczby dodatniej $\delta$ istnieją punkty $x, z \in X$ takie, że

$$\varrho(x, z) < \delta \quad \text{i} \quad \rho(f(x), f(z)) \geqslant \varepsilon.$$

W szczególności, dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieją punkty $x_n, z_n \in X$ takie, że

$$\varrho(x_n, z_n) < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \rho(f(x_n), f(z_n)) \geqslant \varepsilon.$$

Oznacza to, że dla ciągów $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniony jest poprzednik implikacji z założenia, natomiast nie jest spełniony następnik. Sprzeczność kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 4.41.**

Wiemy, że, niezależnie od sposobu ((1) – (3)) określenia metryki w przestrzeni $X$, zbieżność ciągu $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ do punktu $x = (x_1, x_2)$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest równoważna zbieżnościom obu ciągów $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ i $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ do punktów $x_1$, $x_2$, odpowiednio (patrz zadania 2.89, 2.90 i 2.91). W związku z tym dowody we wszystkich trzech przypadkach są takie same.

Załóżmy najpierw, że funkcja $f$ jest ciągła. Niech $y$ będzie dowolnym punktem przestrzeni $Y$ i $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – dowolnym ciągiem z przestrzeni $Y$ zbieżnym do punktu $y$. Z ciągłości funkcji $f$ wynika $f(y_n) \longrightarrow f(y)$, zatem

$$(f_1(y_n), f_2(y_n)) \longrightarrow (f_1(y), f_2(y)),$$

więc na podstawie powyższej uwagi oznacza to obie zbieżności

$$f_1(y_n) \longrightarrow f_1(y) \quad \text{i} \quad f_2(y_n) \longrightarrow f_2(y).$$

Zbieżności te dowodzą, że obie funkcje $f_1$ i $f_2$ są ciągłe w punkcie $y$. Z dowolności wyboru punktu $y$ z przestrzeni $Y$ wynika ciągłość obu funkcji $f_1$ i $f_2$ w przestrzeni $Y$.

Załóżmy teraz, że obie funkcje $f_1$ i $f_2$ są ciągłe. Niech $y$ będzie dowolnym punktem przestrzeni $Y$ i $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – dowolnym ciągiem z przestrzeni $Y$ zbieżnym do punktu $y$. Wtedy

$$f_1(y_n) \longrightarrow f_1(y) \quad \text{i} \quad f_2(y_n) \longrightarrow f_2(y).$$

Zatem na podstawie powyższej uwagi

$$(f_1(y_n), f_2(y_n)) \longrightarrow (f_1(y), f_2(y)),$$

co oznacza ciągłość funkcji $f$ w punkcie $y$. Z dowolności wyboru punktu $y$ z przestrzeni $Y$ wynika ciągłość tej funkcji w całej przestrzeni.

**Rozwiązanie zadania 4.42.**

Ad (1). Zauważmy, że funkcja $F$ jest dobrze określona, gdyż dla funkcji ciągłej $f$ funkcja $F(f)$ jest też określona na przedziale $[0,1]$ i ciągła.

Udowodnimy, że funkcja $F$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią i $f$ – dowolnym elementem przestrzeni $X$. Dla dowolnej funkcji $g \in X$ spełniającej nierówność $\varrho(f, g) < \varepsilon$ mamy:

$$\varrho(F(f), F(g)) = \sup\{|F(f)(x) - F(g)(x)| : x \in [0,1]\} =$$

$$\sup\{|f(1-x) - g(1-x)| : x \in [0,1]\} =$$

$$\sup\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\} = \varrho(f, g) < \varepsilon.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $F$.

Ad (2). Zauważmy, że funkcja $H$ jest dobrze określona, gdyż dla funkcji ciągłej $f$ funkcja $H(f)$ jest też określona na przedziale [0,1] i ciągła.

Udowodnimy, że funkcja $H$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią i $f$ – dowolnym elementem przestrzeni $X$. Dla dowolnej funkcji $g \in X$ spełniającej nierówność $\varrho(f,g) < \varepsilon$ mamy:

$$\varrho(H(f),H(g)) = \sup\left\{\left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x g(t)\,dt\right| : x \in [0,1]\right\} =$$

$$\sup\left\{\left|\int_0^x (f(t)-g(t))\,dt\right| : x \in [0,1]\right\} \leqslant$$

$$\sup\left\{\int_0^x |f(t)-g(t)|\,dt : x \in [0,1]\right\} \leqslant \int_0^1 \varepsilon\,dt = \varepsilon.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $H$.

Ad (3). Zauważmy, że funkcja $G$ jest dobrze określona, gdyż dla funkcji ciągłej $f$ funkcja $G(f)$ jest też określona na przedziale [0,1] i ciągła.

Udowodnimy, że funkcja $G$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią i $f$ – dowolnym elementem przestrzeni $X$. Dla dowolnej funkcji $g \in X$ spełniającej nierówność $\varrho(f,g) < \varepsilon$ mamy:

$$\varrho(G(f),G(g)) =$$

$$\sup\left\{\left|\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt - \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt\right| : x \in [0,1]\right\} =$$

$$\sup\left\{\left|\int_0^x (f(t)-g(t))\sin(x-t)\,dt\right| : x \in [0,1]\right\} \leqslant$$

$$\sup\left\{\int_0^x |f(t)-g(t)|\,dt : x \in [0,1]\right\} \leqslant \int_0^1 \varepsilon\,dt = \varepsilon.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $G$.

Ad (4). Zauważmy, że funkcja $K$ jest dobrze określona, gdyż dla funkcji ciągłej $f$ funkcja $K(f)$ jest też określona na przedziale [0,1] i ciągła.

Udowodnimy, że funkcja $K$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią i $f$ – dowolnym elementem przestrzeni $X$. Przez $M$ oznaczmy $\sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$. Połóżmy

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2M+1}\right\}.$$

Dla dowolnej funkcji $g \in X$ spełniającej nierówność

$$\varrho(f,g) < \delta$$

mamy:

$$|g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t) - f(t)| \leqslant |f(t)| + \delta,$$

skąd wynika nierówność

$$|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |f(t) - g(t)| \leqslant 2M + 1.$$

Zatem

$$\varrho(K(f), K(g)) = \sup\left\{\left|\int_0^x f^2(t)\,dt - \int_0^x g^2(t)\,dt\right| : x \in [0,1]\right\} =$$

$$\sup\left\{\left|\int_0^x (f^2(t) - g^2(t))\,dt\right| : x \in [0,1]\right\} \leqslant$$

$$\sup\left\{\int_0^x |f^2(t) - g^2(t)|\,dt : x \in [0,1]\right\} =$$

$$\sup\left\{\int_0^x |f(t) - g(t)| \cdot |f(t) + g(t)|\,dt : x \in [0,1]\right\} \leqslant$$

$$\sup\left\{\int_0^x \delta \cdot (2M+1)\,dt : x \in [0,1]\right\} \leqslant \int_0^1 \varepsilon\,dt = \varepsilon.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $K$.

Ad (5). Zauważmy, że funkcja $L$ jest dobrze określona, gdyż dla funkcji ciągłej $f$ funkcja $L(f)$ jest też określona na przedziale $[0,1]$ i ciągła.

Udowodnimy, że funkcja $L$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią i $f$ - dowolnym elementem przestrzeni $X$. Dla dowolnej funkcji $g \in X$ spełniającej nierówność $\varrho(f,g) < \varepsilon$ mamy:

$$\varrho(L(f), L(g)) = \sup\left\{\left|\int_0^x f(t^\alpha)\,dt - \int_0^x g(t^\alpha)\,dt\right| : x \in [0,1]\right\} =$$

$$\sup\left\{\left|\int_0^x (f(t^\alpha) - g(t^\alpha))\,dt\right| : x \in [0,1]\right\} \leqslant$$

$$\sup\left\{\int_0^x |f(t^\alpha) - g(t^\alpha)|\,dt : x \in [0,1]\right\} \leqslant \int_0^1 \varepsilon\,dt = \varepsilon.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $L$.

**Rozwiązanie zadania 4.43.**

Ad (1). Udowodnimy, że funkcja $F$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią i $f$ - dowolnym elementem przestrzeni $X$. Dla dowolnej funkcji $g \in X$ spełniającej nierówność $\varrho(f,g) < \varepsilon$ mamy:

$$\varrho(F(f), F(g)) = |f(1) - g(1)| \leqslant \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\} = \varrho(f,g) < \varepsilon.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $F$.

Ad (2). Udowodnimy, że funkcja $H$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią i $f$ – dowolnym elementem przestrzeni $X$. Dla dowolnej funkcji $g \in X$ spełniającej nierówność $\varrho(f,g) < \varepsilon$ mamy:

$$\varrho(H(f), H(g)) = \left| \int_0^1 (f(t) - g(t)) dt \right| < \varepsilon.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $H$.

Ad (3). Udowodnimy, że funkcja $G$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią i $f$ – dowolnym elementem przestrzeni $X$. Dla dowolnej funkcji $g \in X$ spełniającej nierówność $\varrho(f,g) < \varepsilon$ mamy:

$$\varrho(G(f), G(g)) = \left| \int_0^1 (f(t) - g(t)) \sin t \, dt \right| < \varepsilon.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $G$.

Ad (4). Udowodnimy, że funkcja $K$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią i $f$ – dowolnym elementem przestrzeni $X$. Przez $M$ oznaczmy

$$\sup \{ |f(x)| \, : \, x \in [0,1] \}.$$

Połóżmy

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1+M} \right\}.$$

Dla dowolnej funkcji $g \in X$ spełniającej nierówność

$$\varrho(f,g) < \delta$$

mamy:

$$|g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t) - f(t)| \leqslant |f(t)| + \delta,$$

skąd wynika nierówność

$$|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |f(t) - g(t)| \leqslant 2M + 1.$$

Zatem

$$\varrho(K(f), K(g)) = \left| \int_0^1 (f^2(t) - g^2(t)) dt \right| \leqslant$$

$$\int_0^1 |f^2(t) - g^2(t)| \, dt = \int_0^1 |f(t) - g(t)| \cdot |f(t) + g(t)| \, dt \leqslant$$

$$\int_0^1 \delta \cdot (2M+1) dt \leqslant \varepsilon.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $H$.

Ad (5). Udowodnimy, że funkcja $L$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią i $f$ – dowolnym elementem przestrzeni $X$. Dla dowolnej funkcji $g \in X$ spełniającej nierówność $\varrho(f,g) < \varepsilon$ mamy:

$$\varrho(L(f), L(g)) = \left|\int_0^1 (f(t^\alpha) - g(t^\alpha))dt\right| < \varepsilon.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $L$.

**Rozwiązanie zadania 4.44.**

Ad (M1). Z określenia funkcji $\varrho$ wynika jej nieujemność. Dla funkcji $f \in X$ spełniona jest równość

$$\varrho(f,f) = \sup\{|f(x) - f(x)| + |f'(x) - f'(x)| \; : \; x \in [0,1]\} = 0.$$

Jeśli teraz $\varrho(f,g) = 0$ dla funkcji $f, g \in X$, to

$$|f(x) - g(x)| = 0 \text{ i } |f'(x) - g'(x)| = 0,$$

skąd wynika równość $f(x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in [0,1]$, czyli $f = g$.

Ad (M2). Z własności $|-a| = |a|$ wynika równość

$$\varrho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)| \; : \; x \in [0,1]\} =$$
$$\sup\{|g(x) - f(x)| + |g'(x) - f'(x)| \; : \; x \in [0,1]\} = \varrho(g,f)$$

dla dowolnych funkcji $f, g \in X$.

Ad (M3). Dla funkcji $f, g, h \in X$ ustalmy dowolnie punkt $x \in [0,1]$. Wtedy

$$|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)| \leqslant$$
$$|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| + |f'(x) - h'(x)| + |h'(x) - g'(x)| \leqslant$$
$$\sup\{|f(x) - h(x)| + |f'(x) - h'(x)| \; : \; x \in [0,1]\} +$$
$$\sup\{|h(x) - g(x)| + |h'(x) - g'(x)| \; : \; x \in [0,1]\} = \varrho(f,h) + \varrho(h,g).$$

Wnioskujemy stąd, że

$$\varrho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)| \; : \; x \in [0,1]\} \leqslant$$
$$\varrho(f,h) + \varrho(h,g),$$

co kończy dowód warunku trójkąta dla metryki $\varrho$.

Ad (1). Niech $f$ będzie dowolną funkcją należącą do zbioru $C^{(1)}_{[0,1]}$. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Dla każdej funkcji $g \in C^{(1)}_{[0,1]}$, dla której $\varrho(f,g) < \varepsilon$, mamy:

$$\varrho(F(f), F(g)) =$$

$$\sup\{|F(f)(x)-F(g)(x)|+|(F(f))'(x)-(F(g))'(x)| \;:\; x\in[0,1]\}=$$
$$\sup\{|f(1-x)-g(1-x)|+|f'(1-x)-g'(1-x)| \;:\; x\in[0,1]\}=$$
$$\sup\{|f(t)-g(t)|+|-f'(t)+g'(t)| \;:\; t\in[0,1]\}=\varrho(f,g)<\varepsilon.$$

Wynika stąd ciągłość funkcji $F$.

Ad (2). Niech $f$ będzie dowolną funkcją ze zbioru $C^{(1)}_{[0,1]}$. Korzystać będziemy tu z własności całki Riemanna dla funkcji ciągłych. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Dla każdej funkcji $g\in C^{(1)}_{[0,1]}$, dla której $\varrho(f,g)<\frac{\varepsilon}{2}$, mamy:

$$\varrho(H(f),H(g))=$$
$$\sup\{|H(f)(x)-H(g)(x)|+|(H(f))'(x)-(H(g))'(x)| \;:\; x\in[0,1]\}\leqslant$$
$$\sup\{|H(f)(x)-H(g)(x)| \;:\; x\in[0,1]\}+$$
$$\sup\{|(H(f))'(x)-(H(g))'(x)| \;:\; x\in[0,1]\}=$$
$$\sup\left\{\left|\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x g(t)\,dt\right| \;:\; x\in[0,1]\right\}+$$
$$\sup\left\{\left|\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)'-\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)'\right| \;:\; x\in[0,1]\right\}\leqslant$$
$$\sup\left\{\int_0^x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)dt \;:\; x\in[0,1]\right\}+\sup\{|f(x)-g(x)| \;:\; x\in[0,1]\}\leqslant\varepsilon.$$

Wynika stąd ciągłość funkcji $H$.

Ad (3). Niech $f$ będzie dowolną funkcją ze zbioru $C^{(1)}_{[0,1]}$. Korzystać będziemy tu z własności całki Riemanna dla funkcji ciągłych. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Dla każdej funkcji $g\in C^{(1)}_{[0,1]}$, dla której $\varrho(f,g)<\frac{\varepsilon}{2}$, mamy:

$$\varrho(G(f),G(g))=$$
$$\sup\{|G(f)(x)-G(g)(x)|+|(G(f))'(x)-(G(g))'(x)| \;:\; x\in[0,1]\}\leqslant$$
$$\sup\{|G(f)(x)-G(g)(x)| \;:\; x\in[0,1]\}+$$
$$\sup\{|(G(f))'(x)-(G(g))'(x)| \;:\; x\in[0,1]\}=$$
$$\sup\left\{\left|\int_0^x f(t)\sin\pi(1-t)\,dt-\int_0^x g(t)\sin\pi(1-t)\,dt\right| \;:\; x\in[0,1]\right\}+$$
$$\sup\left\{\left|\left(\int_0^x f(t)\sin\pi(1-t)\,dt\right)'-\left(\int_0^x g(t)\sin\pi(1-t)\,dt\right)'\right| \;:\; x\in[0,1]\right\}\leqslant$$
$$\sup\left\{\int_0^x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)dt \;:\; x\in[0,1]\right\}+$$

$$\sup\{|f(x)-g(x)|\cdot|\sin t| \ :\ x,t\in[0,1]\}\leqslant\varepsilon.$$

Wynika stąd ciągłość funkcji $G$.

Ad (4). Niech $f$ będzie dowolną funkcją ze zbioru $C^{(1)}_{[0,1]}$. Korzystać będziemy tu z własności całki Riemanna dla funkcji ciągłych. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Funkcja $|f|$ jest ograniczona i niech $M$ będzie jej kresem górnym. Rozważmy teraz liczbę

$$\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2(2M+1)}\right\}.$$

Dla każdej funkcji $g\in C^{(1)}_{[0,1]}$, dla której $\varrho(f,g)<\delta$, mamy:

$$\begin{gathered}
\varrho(K(f),K(g))=\\
\sup\{|K(f)(x)-K(g)(x)|+|(K(f))'(x)-(K(g))'(x)| \ :\ x\in[0,1]\}\leqslant\\
\sup\{|K(f)(x)-K(g)(x)| \ :\ x\in[0,1]\}+\\
\sup\{|(K(f))'(x)-(K(g))'(x)| \ :\ x\in[0,1]\}=\\
\sup\left\{\left|\int_0^x f^2(t)\,dt-\int_0^x g^2(t)\,dt\right| \ :\ x\in[0,1]\right\}+\\
\sup\left\{\left|\left(\int_0^x f^2(t)\,dt\right)'-\left(\int_0^x g^2(t)\,dt\right)'\right| \ :\ x\in[0,1]\right\}\leqslant\\
\sup\left\{\int_0^x |f^2(t)-g^2(t)|\,dt \ :\ x\in[0,1]\right\}+\\
\sup\{|f^2(t)-g^2(t)| \ :\ t\in[0,1]\}=\\
\sup\left\{\int_0^x |f(t)-g(t)|\cdot|f(t)+g(t)|\,dt \ :\ x\in[0,1]\right\}+\\
\sup\{|f(x)-g(x)|\cdot|f(x)+g(x)| \ :\ x\in[0,1]\}\leqslant\\
\sup\left\{\int_0^x\left(\frac{\varepsilon}{2(2M+1)}\cdot(2M+1)\right)dt \ :\ x\in[0,1]\right\}+\\
\sup\left\{\frac{\varepsilon}{2(2M+1)}\cdot(2M+1) \ :\ x\in[0,1]\right\}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{gathered}$$

Wynika stąd ciągłość funkcji $K$.

Ad (5). Niech $f$ będzie dowolną funkcją ze zbioru $C^{(1)}_{[0,1]}$. Korzystać będziemy tu z własności całki Riemanna dla funkcji ciągłych. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Dla każdej funkcji $g\in C^{(1)}_{[0,1]}$, dla której $\varrho(f,g)<\frac{\varepsilon}{2}$, mamy:

$$\varrho(L(f),L(g))=$$

$$\sup\{|L(f)(x)-L(g)(x)|+|(L(f))'(x)-(L(g))'(x)| \,:\, x\in[0,1]\}\leqslant$$
$$\sup\{|L(f)(x)-L(g)(x)| \,:\, x\in[0,1]\}+$$
$$\sup\{|(L(f))'(x)-(L(g))'(x)| \,:\, x\in[0,1]\}=$$
$$\sup\left\{\left|\int_0^x f(t^\alpha)\,dt-\int_0^x g(t^\alpha)\,dt\right| \,:\, x\in[0,1]\right\}+$$
$$\sup\left\{\left|\left(\int_0^x f(t^\alpha)\,dt\right)'-\left(\int_0^x g(t^\alpha)\,dt\right)'\right| \,:\, x\in[0,1]\right\}\leqslant$$
$$\sup\left\{\int_0^x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)dt \,:\, x\in[0,1]\right\}+\sup\{|f(x)-g(x)| \,:\, x\in[0,1]\}\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Wynika stąd ciągłość funkcji $L$.

**Rozwiązanie zadania 4.45.**

Z poprzedniego zadania wnioskujemy, że $C^{(2)}_{[0,1]}$ jako podzbiór przestrzeni $\left(C^{(1)}_{[0,1]},\varrho\right)$ jest też przestrzenią metryczną.

Ze zbieżności ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ w rozważanej przestrzeni wynika zbieżność jednostajna ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ do funkcji $f$, jak i zbieżność jednostajna ciągu pochodnych, czyli ciągu $(f_n')_{n=1}^{\infty}$. Na podstawie znanego z kursu analizy matematycznej twierdzenia wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} f_n'=\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)',$$

a to dowodzi ciągłości funkcji $D$.

**Rozwiązanie zadania 4.46.**

Ad (1). Zauważmy najpierw, że, istotnie, funkcja $F$ przekształca zbiór $C^{(2)}_{[0,1]}$ w zbiór $C^{(1)}_{[0,1]}$. Ustalmy dowolną funkcję $f$ ze zbioru $C^{(2)}_{[0,1]}$ i dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Dla każdej funkcji $g\in C^{(2)}_{[0,1]}$, która spełnia nierówność $\varrho(f,g)<\varepsilon$, mamy:

$$\rho(F(f),F(g))=\sup\{|F(f)(x)-F(g)(x)| \,:\, x\in[0,1]\}=$$
$$\sup\{|f(1-x)-g(1-x)| \,:\, x\in[0,1]\}=$$
$$\sup\{|f(t)-g(t)| \,:\, t\in[0,1]\}=\varrho(f,g)<\varepsilon.$$

Wynika stąd ciągłość funkcji $F$.

Ad (2). Zauważmy najpierw, że, istotnie, funkcja $G$ przekształca zbiór $C^{(2)}_{[0,1]}$ w zbiór $C^{(1)}_{[0,1]}$.

Jeśli $\alpha = 0$, to funkcja $G$ jest stała, więc ciągła.

Niech teraz $\alpha \neq 0$. Ustalmy dowolną funkcję $f$ ze zbioru $C^{(2)}_{[0,1]}$ i dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Dla każdej funkcji $g \in C^{(2)}_{[0,1]}$, która spełnia nierówność $\varrho(f,g) < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$, mamy:

$$\begin{aligned}\rho(G(f),G(g)) &= \sup\{|G(f)(x) - G(g)(x)| : x \in [0,1]\} = \\ &\sup\{|\alpha f(x) - \alpha g(x)| : x \in [0,1]\} = \\ &\sup\{|\alpha| \cdot |f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\} = |\alpha| \cdot \varrho(f,g) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Wynika stąd ciągłość funkcji $G$.

Ad (3). Zauważmy najpierw, że, istotnie, funkcja $L$ przekształca zbiór $C^{(2)}_{[0,1]}$ w zbiór $C^{(1)}_{[0,1]}$.

Udowodnimy, że funkcja $L$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią i $f$ – dowolnym elementem przestrzeni $X$. Dla dowolnej funkcji $g \in X$ spełniającej nierówność $\varrho(f,g) < \varepsilon$ mamy:

$$\begin{aligned}\varrho(L(f),L(g)) &= \sup\left\{\left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x g(t)\,dt\right| : x \in [0,1]\right\} = \\ &\sup\left\{\left|\int_0^x (f(t) - g(t))\,dt\right| : x \in [0,1]\right\} \leqslant \\ &\sup\left\{\int_0^x |f(t) - g(t)|\,dt : x \in [0,1]\right\} \leqslant \int_0^1 \varepsilon\,dt = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $L$.

**Rozwiązanie zadania 4.47.**

Ad (1). Zauważmy najpierw, że, istotnie, funkcja $F$ przekształca zbiór $C^{(1)}_{[0,1]}$ w zbiór $C_{[0,1]}$. Ustalmy dowolną funkcję $f$ ze zbioru $C^{(1)}_{[0,1]}$ i dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Dla każdej funkcji $g \in C^{(1)}_{[0,1]}$, która spełnia nierówność $\varrho(f,g) < \varepsilon$, mamy:

$$\begin{aligned}\rho(F(f),F(g)) &= \sup\{|F(f)(x) - F(g)(x)| : x \in [0,1]\} = \\ &\sup\{|f(1-x^2) - g(1-x^2)| : x \in [0,1]\} = \\ &\sup\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\} = \varrho(f,g) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Wynika stąd ciągłość funkcji $F$.

Ad (2). Zauważmy najpierw, że, istotnie, funkcja $G$ przekształca zbiór $C^{(1)}_{[0,1]}$ w zbiór $C_{[0,1]}$. Ustalmy dowolną funkcję $f$ ze zbioru $C^{(1)}_{[0,1]}$ i dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Dla każdej funkcji $g \in C^{(1)}_{[0,1]}$, która spełnia nierówność $\varrho(f,g) < \varepsilon$, mamy:

$$\rho(G(f),G(g)) = \sup\{|G(f)(x) - G(g)(x)| : x \in [0,1]\} =$$

$$\sup\{|x\cdot f(x) - x\cdot g(x)| : x\in[0,1]\} =$$
$$\sup\{|x|\cdot|f(x)-g(x)| : x\in[0,1]\} \leqslant$$
$$\sup\{|f(x)-g(x)| : x\in[0,1]\} = \varrho(f,g) < \varepsilon.$$

Wynika stąd ciągłość funkcji $G$.

**Rozwiązanie zadania 4.48.**

Ad (M1). Bezpośrednio z określenia funkcji $\varrho$ wynika jej nieujemność. Oczywiście,

$$\varrho(f,f) = \sqrt{\int_0^1 (f(x)-f(x))^2\,dx} = 0.$$

Jeśli teraz $f \neq g$, dla funkcji $f$ i $g$ ze zbioru $L^{(2)}_{[0,1]}$, to z ciągłości tych funkcji wynika, że istnieją pewien przedział $[a,b]\subset[0,1]$, gdzie $a<b$ i liczba $M$ takie, że

$$|f(x)-g(x)| \geqslant M > 0 \quad \text{dla wszystkich} \quad x\in[a,b].$$

Zatem

$$\varrho(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,dx} \geqslant$$
$$\sqrt{\int_a^b (f(x)-g(x))^2\,dx} \geqslant \sqrt{\int_a^b M^2\,dx} = M^2\,(b-a) > 0.$$

Ad (M2). Dla dowolnych funkcji $f$ i $g$ ze zbioru $L^{(2)}_{[0,1]}$ mamy:

$$\varrho(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,dx} = \sqrt{\int_0^1 (g(x)-f(x))^2\,dx} = \varrho(g,f)\,.$$

Ad (M3). Skorzystamy z nierówności znanej z kursu analizy matematycznej:

$$\sqrt{\int_0^1 (f(x)+g(x))^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_0^1 g^2(x)\,dx}.$$

Dla dowolnych funkcji $f$, $g$ i $h$ ze zbioru $L^{(2)}_{[0,1]}$ mamy:

$$\varrho(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,dx} = \sqrt{\int_0^1 (f(x)-h(x)+h(x)-g(x))^2\,dx} \leqslant$$
$$\sqrt{\int_0^1 (f(x)-h(x))^2\,dx} + \sqrt{\int_0^1 (h(x)-g(x))^2\,dx} = \varrho(f,h)+\varrho(h,g)\,,$$

co dowodzi warunku trójkąta.

Ad (1). Funkcja $F$ przyjmuje wartości w zbiorze $C_{[0,1]}$. Funkcja ta nie jest jednak ciągła. Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji określonych jak następuje: $f_1 = 0 = f_2$. Dla $n > 2$ niech

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{gdy } x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 2 - nx, & \text{gdy } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ 0, & \text{gdy } x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że granicą tego ciągu w przestrzeni $L_{[0,1]}^{(2)}$ jest funkcja zerowa; istotnie

$$\varrho(f_n, 0) = \sqrt{\int_0^1 (f_n(x) - 0)^2 \, dx} = 2\sqrt{\int_0^{\frac{1}{n}} (nx)^2 \, dx} = \frac{2}{3n}.$$

Wiemy, że $F(0) = 0$. Ciąg $(F(f_n))_{n=1}^{\infty}$ jednak nie jest zbieżny do funkcji zerowej, gdyż

$$\rho(F(f_n), F(0)) = \sup\{|f_n(x) - 0| : x \in [0,1]\} = 1.$$

Funkcja $G$ jest ciągła. Dla dowolnej funkcji $f \in C_{[0,1]}$ i dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ niech $g \in C_{[0,1]}$ będzie taką funkcją, że $\rho(f, g) < \varepsilon$. Wtedy

$$\varrho(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 \, dx} \leqslant \sqrt{\int_0^1 \varepsilon^2 \, dx} = \varepsilon.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $G$.

**Rozwiązanie zadania 4.49.**

Dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ i punktów $x$ i $z$ ze zbioru $X$ spełniających nierówność $\varrho(x, z) < \frac{\varepsilon}{M}$ mamy:

$$\rho(f(x), f(z)) \leqslant M\varrho(x, z) < \varepsilon,$$

co dowodzi ciągłości funkcji $f$ (nawet jednostajnej ciągłości).

**Rozwiązanie zadania 4.50.**

Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych określonych na przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ o wartościach w przestrzeni metrycznej $(Y, \rho)$ zbieżnym jednostajnie do funkcji $f : X \longrightarrow Y$.

Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$ i punkt $x \in X$. Ze zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ wynika, że istnieje liczba naturalna $n_0$ taka, że

$$\rho(f_n(u), f(u)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0, \quad u \in X.$$

Ponieważ funkcja $f_{n_0}$ jest ciągła w punkcie $x$, więc istnieje liczba dodatnia $\delta$ taka, że

$$\rho(f_n(u), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla} \quad u \in K(x,\delta).$$

W ten sposób, dla wszystkich punktów $u \in K(x,\delta)$ spełnione są nierówności:

$$\rho(f(u), f(x)) \leqslant \rho(f(u), f_{n_0}(u)) + \rho(f_{n_0}(u), f_{n_0}(x)) + \rho(f_{n_0}(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Dowodzi to ciągłości funkcji $f$ w punkcie $x$, a z dowolności wyboru punktu $x$ wnioskujemy, że funkcja $f$ jest ciągła w całej przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 4.51.**

Odpowiedź brzmi: nie. Rozważmy funkcje: $f = f_1 = f_2 = 0$ na przedziale $[0,1]$. Niech ponadto dla $n > 2$

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{gdy } x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 2 - nx, & \text{gdy } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ 0, & \text{gdy } x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że granicą ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest funkcja $f$, wszystkie te funkcje są ciągłe, natomiast zbieżność nie jest jednostajna, gdyż dla każdej funkcji $f_n$ przy $n > 2$

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1.$$

**Rozwiązanie zadania 4.52.**

Odpowiedź brzmi: tak. Ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ określony następująco:

$$f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$$

składa się z funkcji nieciągłych i jest jednostajnie zbieżny do funkcji stałej równej zeru, czyli ciągłej.

**Rozwiązanie zadania 4.53.**

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią, $x_0$ dowolnym, ale ustalonym punktem przestrzeni $X$. Dla $\frac{\varepsilon}{3}$ i $x_0$ istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\rho(f_n(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Dla liczb $\frac{\varepsilon}{3}$ i $n_0$ istnieją liczby $n_1, \ldots, n_p$ takie, że

$$n_1 \geqslant n_0, \ldots, n_p \geqslant n_0$$

oraz przynajmniej jedna z następujących nierówności jest prawdziwa:

- $\rho(f_{n_1}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$;
- $\rho(f_{n_2}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$;

.................

- $\rho\left(f_{n_p}(x), f(x)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$.

dla każdego $x \in X$.

Każda z funkcji $f_n$ jest ciągła, więc dla $\frac{\varepsilon}{3}$, $x_0$ i $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ istnieją kule $K_k = K(x_0, r_k)$ takie, że

$$\rho(f_{n_k}(x), f_{n_k}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ dla } x \in K_k.$$

Niech $r = \min\{r_1, \ldots, r_p\}$. Niech $x$ będzie teraz dowolnym punktem z kuli $K(x_0, r)$. Dla tegoż $x$ istnieje $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ takie, że

$$\rho(f_{n_k}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wówczas

$$\rho(f(x), f(x_0)) \leqslant$$

$$\rho(f(x), f_{n_k}(x)) + \rho(f_{n_k}(x), f_{n_k}(x_0)) + \rho(f_{n_k}(x_0), f(x_0)) < \varepsilon,$$

co dowodzi ciągłości funkcji $f$.

**Rozwiązanie zadania 4.54.**

Przykład z rozwiązania zadania 4.51 jest dobry. Oto inny:

Rozważmy funkcje: $f = f_1 = f_2 = 0$ na przedziale $[0, 1]$. Niech ponadto dla $n > 2$

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx - n^2x^2, & \text{gdy } x \in [0, \frac{2}{n}), \\ 0, & \text{gdy } x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że granicą ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest funkcja $f$. Zbieżność ta nie jest jednostajna, bowiem dla każdej funkcji $f_n$ dla $n > 2$ mamy

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1.$$

**Rozwiązanie zadania 4.55.**

Rozważmy funkcje: $f_1 = f_2 = 0$ na przedziale $[0, 1]$. Niech ponadto dla $n > 2$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{gdy } x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 0, & \text{gdy } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Funkcję $f$ określmy jak poniżej

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x = 0, \\ 0, & \text{gdy } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że granicą ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest funkcja $f$. Zbieżność ta nie jest quasi-jednostajna, bowiem dla każdej funkcji $f_n$ dla $n > 2$ i dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz skończonego układu wskaźników $n_1, \ldots, n_p \geqslant k$ mamy

$$\left| f_{n_i}\left(\frac{1}{2m}\right) - f\left(\frac{1}{2m}\right) \right| = \left| f_{n_i}\left(\frac{1}{2m}\right) - 0 \right| \geqslant \frac{1}{2},$$

gdzie $m \geqslant \max\{n_1, \ldots, n_p\}$, co dowodzi, że warunek quasi-jednostajnej zbieżności nie jest spełniony.

Inaczej, granica rozważanego ciągu jest funkcją nieciągłą, a musiałaby być funkcją ciągłą, gdyby ciąg był quasi-jednostajnie zbieżny (zadanie 4.53).

**Rozwiązanie zadania 4.56.**

Rozważmy funkcje: $f = f_1 = f_2 = 0$ na przedziale $[0,1]$. Niech ponadto dla $n > 2$

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{gdy } x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 2 - nx, & \text{gdy } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ 0, & \text{gdy } x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Ciąg ten nie jest jednostajnie zbieżny, gdyż dla każdego $n > 2$

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1.$$

Ciąg ten jest jednak quasi-jednostajnie zbieżny; jest on punktowo zbieżny do funkcji $f$. Niech teraz $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią i $n$ – dowolną liczbą naturalną. Wybierzmy liczbę $n_1 \in \mathbb{N}$ spełniającą nierówność $n_1 \geqslant n$. Teraz niech $n_2 \in \mathbb{N}$ spełnia nierówność $\frac{2}{n_2} < \frac{\varepsilon}{n_1}$. Wtedy

$$|f_{n_1}(x) - 0| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad x \in \left[0, \frac{2}{n_2}\right) \cup \left[\frac{2}{n_1}, 1\right]$$

i

$$|f_{n_2}(x) - 0| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad x \in \left[\frac{2}{n_2}, \frac{2}{n_1}\right).$$

Zatem ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek quasi-jednostajnej zbieżności.

**Rozwiązanie zadania 4.57.**

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z quasi-jednostajnej zbieżności wynika, że istnieją wskaźniki $n_1, \ldots, n_p$ takie, że dla każdego $x \in X$ przynajmniej jedna z poniższych nierówności jest spełniona

$$\rho(f_{n_1}(x), f(x)) < \varepsilon, \ldots, \rho\left(f_{n_p}(x), f(x)\right) < \varepsilon.$$

Niech $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$. Wtedy dla każdego $k = 1, \ldots, p$

$$\rho(f_{n_0}(x), f(x)) \leqslant \rho(f_{n_k}(x), f(x))$$

i dla każdego $n \geqslant n_0$ oraz $x \in X$ mamy:

$$\rho(f_n(x), f(x)) \leqslant \rho(f_{n_0}(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Dowodzi to jednostajnej zbieżności ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ do funkcji $f$.

**Rozwiązanie zadania 4.58.**

Niech $x$ będzie liczbą wymierną różną od zera. W każdym otoczeniu tej liczby są liczby niewymierne, zatem funkcja $f$ nie jest ciągła w tym punkcie.

Rozważmy teraz ciąg liczb wymiernych $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnej liczby niewymiernej $x$. Wtedy każdy wyraz $w_n$ ma przedstawienie $\frac{p_n}{q_n}$, gdzie $p_n \in \mathsf{Z}$, $q_n \in \mathsf{N}$. Gdyby ciąg $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ był ograniczony, to pewna liczba $q_{n_0}$ występowałaby nieskończenie wiele razy w tym ciągu, zatem ciąg $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ byłby zbieżny do nieskończoności lub do liczby wymiernej. Tak więc $q_n \longrightarrow \infty$.

Niech $x$ będzie dowolną liczbą niewymierną i $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ niech będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do punktu $x$. Istnieją dwa podciągi (być może jeden z nich jest skończony; wtedy go w dalszych rozważaniach omijamy) ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, jeden z nich złożony wyłącznie z liczb wymiernych, drugi złożony z liczb niewymiernych. Niech to będą ciągi: $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $t_n \in \mathsf{Q}$, $u_n \in \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}$. Wtedy $t_n = \frac{p_n}{q_n}$, gdzie $p_n \in \mathsf{Z}$, $q_n \in \mathsf{N}$. Zgodnie z definicją funkcji $f$ i powyższymi rozważaniami mamy

$$f(u_n) = 0 \quad \text{i} \quad f(t_n) \longrightarrow 0.$$

Ponieważ $f(x) = 0$, więc powyższe zależności dowodzą ciągłości funkcji $f$ w każdym punkcie niewymiernym.

Jeśli teraz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do zera, to powtarzając poprzednie rozważania dowodzimy, że $f(x_n) \longrightarrow 0$, co oznacza ciągłość funkcji $f$ w zerze.

**Rozwiązanie zadania 4.59.**

Rozważmy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do liczby 1. Wtedy

$$f(x_n) = \begin{cases} 2 - x_n, & \text{gdy} \quad x_n \in \mathsf{Q}, \\ x_n, & \text{gdy} \quad x_n \in \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}. \end{cases}$$

Zatem $f(x_n) \longrightarrow 1 = f(1)$, co dowodzi ciągłości funkcji $f$ w jedynce. Jeśli $x \neq 1$, to istnieją ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżne do punktu $x$ i takie, że $x_n \in \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}$, $u_n \in \mathsf{Q}$. Wtedy

$$f(u_n) = 2 - u_n \longrightarrow 2 - x, \quad \text{i} \quad f(x_n) = x_n \longrightarrow x,$$

a także $x \neq 2 - x$. Dowodzi to nieciągłości funkcji $f$ w rozważanym punkcie.

**Rozwiązanie zadania 4.60.**

Dla dowolnej liczby $x \in \mathsf{R}$, istnieją ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ takie, że $x_n \in \mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}$, $u_n \in \mathsf{Q}$. Wtedy

$$f(u_n) = 2 + u_n \longrightarrow 2 + x, \quad \text{i} \quad f(x_n) = x_n \longrightarrow x.$$

Dowodzi to nieciągłości funkcji $f$ w każdym punkcie.

**Rozwiązanie zadania 4.61.**

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z założenia wynika, że istnieje $n_0 \in \mathsf{N}$ takie, że

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad x \in X \quad \text{i} \quad n \geqslant n_0.$$

Dla wszystkich $x \in X$ i $n \in \mathsf{N}$, takich, że $n \geqslant n_0$ mamy:

$$||f_n|(x) - |f|(x)| = ||f_n(x)| - |f(x)|| \leqslant |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

a to dowodzi jednostajnej zbieżności ciągu $(|f_n|)_{n=1}^{\infty}$ do funkcji $|f|$.

**Rozwiązanie zadania 4.62.**

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z założenia wynika, że istnieje liczba $n_1 \in \mathsf{N}$ taka, że

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad x \in X \quad \text{i} \quad n \geqslant n_1.$$

Istnieje też liczba $n_2 \in \mathsf{N}$ taka, że

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad x \in X \quad \text{i} \quad n \geqslant n_2.$$

Niech $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Wtedy dla wszystkich $x \in X$ i $n \in \mathsf{N}$, takich, że $n \geqslant n_0$ mamy:

$$|(f_n + g_n)(x) - (f + g)(x)| = |f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leqslant$$
$$|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

a to dowodzi jednostajnej zbieżności ciągu $(f_n + g_n)_{n=1}^{\infty}$ do funkcji $f + g$.

**Rozwiązanie zadania 4.63.**

Dowód przebiega identycznie jak w zadaniu poprzednim.

**Rozwiązanie zadania 4.64.**

Zauważmy, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|).$$

Z tego przedstawienia, na podstawie zadań 4.61, 4.62 i 4.63, wynika teza naszego zadania.

**Rozwiązanie zadania 4.65.**

Zauważmy, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$

$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

Z tego przedstawienia, na podstawie zadań 4.61, 4.62 i 4.63, wynika teza naszego zadania.

**Rozwiązanie zadania 4.66.**

Z założenia ograniczoności funkcji $f$ i $g$ wynika, że istnieją dodatnie liczby $K_1$ i $L_1$ takie, że

$$|f(x)| < K_1 \quad \text{i} \quad |g(x)| < L_1 \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że

$$|f_n(x) - f(x)| < 1 \quad \text{dla} \quad n > n_0.$$

Zatem

$$|f_n(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| < K_1 + 1 \quad \text{dla} \quad n > n_0.$$

Wynika stąd, że istnieje liczba dodatnia $K$ taka, że

$$|f(x)| < K \quad \text{i} \quad |f_n(x)| < K \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Podobnie dowodzi się, że $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem wspólnie ograniczonym. Oznacza to, że istnieje liczba $L$ taka, że

$$|g(x)| < L, \quad \text{i} \quad |g_n(x)| < L \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieją liczby $n_1 \in \mathbb{N}$ i $n_2 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{dla} \quad x \in X \quad \text{i} \quad n \geqslant n_1$$

oraz

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2L} \quad \text{dla} \quad x \in X \quad \text{i} \quad n \geqslant n_2.$$

Wtedy dla $n \geqslant n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ i $x \in X$ mamy:

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| =$$

$$|f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \leqslant$$

$$|f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x)| + |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| =$$

$$|f_n(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon.$$

Dowodzi to, że ciąg $(f_n \cdot g_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f \cdot g$.

**Rozwiązanie zadania 4.67.**

Wszytkie funkcje są ciągłe, gdyż każdy zbiór w przestrzeni $X$ jest otwarty, więc przeciwobrazy wszystkich zbiorów wyznaczone przez funkcję $f$ są zbiorami otwartymi.

**Rozwiązanie zadania 4.68.**

Załóżmy najpierw, że funkcja $f$ jest ciągła. Wtedy

$$\{x \in X : y < f(x)\} = f^{-1}((y, \infty))$$

i

$$\{x \in X : f(x) < y\} = f^{-1}((-\infty, y)),$$

więc są one zbiorami otwartymi dla każdej liczby rzeczywistej $y$.

Załóżmy teraz, że zbiory

$$\{x \in X : y < f(x)\}$$

i

$$\{x \in X : f(x) < y\}$$

są otwarte w przestrzeni $X \times$ R.

Niech $x$ będzie dowolnym punktem przestrzeni $X$ i $\varepsilon$ dowolną liczbą dodatnią. W przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką kulą o środku w punkcie $f(x)$ i promieniu $\varepsilon$ jest przedział $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Wtedy

$$f^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)) =$$

$$f^{-1}((-\infty, f(x) + \varepsilon)) \cap f^{-1}((f(x) - \varepsilon, +\infty)).$$

Powyższe dwa zbiory z prawej strony powyższej równości są otwarte, więc również i zbiór z lewej strony tej równości jest otwarty, a ponieważ $x$ jest jego elementem, więc istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$K(x, \delta) \subset f^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)),$$

a to oznacza ciągłość funkcji $f$ w punkcie $x$.

**Rozwiązanie zadania 4.69.**

Niezależnie od sposobu ((1) - (3)) określenia metryki w przestrzeni $X$, zbieżność ciągu $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$ dla $n \in \mathbb{N}$, do punktu $x = (x_1, x_2)$, jest równoważna zbieżności obu ciągów $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ i $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ do punktów $x_1$, $x_2$, odpowiednio (patrz zadania 2.89, 2.90 i 2.91). W związku z tym dowody we wszystkich trzech przypadkach są takie same.

Niech teraz $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$ dla $n \in \mathbb{N}$, będzie dowolnym ciągiem ze zbioru $f$ zbieżnym do pewnego punktu $x = (x_1, x_2)$. Pokażemy, że $x \in A$. Z założenia ciągłości funkcji $f$ wynika

$$x_2^{(n)} = f\left(x_1^{(n)}\right) \longrightarrow f(x_1) = x_2.$$

Z jednoznaczności granicy wynika, że $x = (x_1, x_2) \in A$.

Z domkniętości wykresu funkcji $f$ nie wynika ciągłość funkcji $f$. Niech $\mathbb{R}$ bedzie przestrzenią z metryką naturalną. Określamy funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ następująco:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Niezależnie od określenia metryki w $\mathbb{R}^2$ funkcja $f$ nie jest ciągła.

**Rozwiązanie zadania 4.70.**

Załóżmy najpierw, że funkcja $f$ jest ciągła. Niech $p_0 = (x_0, y_0)$ będzie dowolnym punktem zbioru $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : y < f(x)\}$. Wynika stąd, że $y_0 < f(x_0)$. Niech $\varepsilon$ będzie taką liczbą, że $|f(x_0) - y_0| > 2\varepsilon$. Z założenia ciągłości funkcji $f$ wynika, że istnieje dodatnia liczba $\delta$ taka, że

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad x \in K(x_0, \delta).$$

Niech $r = \min\{\varepsilon, \delta\}$. Wtedy

$$K((x_0, y_0), r) \subset K(x_0, \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : y < f(x)\}.$$

Punkt $p_0$ jest więc punktem wewnętrznym zbioru

$$\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : y < f(x)\},$$

co dowodzi, że zbiór ten jest otwarty.

Podobnie dowodzi się, że zbiór

$$\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) > y\}$$

jest otwarty.

Załóżmy teraz, że zbiory

$$\{(x,y)\in X\times \mathsf{R} : y<f(x)\}, \quad \{(x,y)\in X\times \mathsf{R} : f(x)<y\}$$

są otwarte. Przypuśćmy, że funkcja $f$ nie jest ciągła; istnieją punkt $x\in X$ oraz ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do $x$ i takie, że ciąg $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny do punktu $f(x)$. Istnieje liczba dodatnia $\varepsilon$ taka, że $f(x_{k_n})-f(x)\geqslant 2\varepsilon$ lub $f(x_{k_n})-f(x)\leqslant -2\varepsilon$ dla pewnego rosnącego ciągu $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb naturalnych. Załóżmy, że spełniona jest ta druga nierówność, czyli

$$f(x_{k_n})\leqslant f(x)-2\varepsilon. \tag{4.6}$$

Niech, dla uproszczenia zapisu, $y=f(x)-\varepsilon$. Ponieważ

$$(x,y)\in\{(u,v)\in X\times\mathsf{R} : v<f(u)\},$$

więc istnieje liczba $\delta$ taka, że

$$0<\delta<\varepsilon \quad \text{i} \quad K((x,y),2\delta)\subset\{(u,v)\in X\times\mathsf{R} : v<f(u)\}.$$

Wtedy

$$K(x,\delta)\times(y-\delta,y+\delta)\subset K((x,y),2\delta)\subset\{(u,v)\in X\times\mathsf{R} : v<f(u)\}.$$

Wnioskujemy stąd, że

$$y-\delta<f(u) \quad \text{dla} \quad u\in K(x,\delta). \tag{4.7}$$

Ze zbieżności ciągu $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ do punktu $x$ wynika, że istnieje liczba $n_0\in\mathsf{N}$ taka, że dla $n\geqslant n_0$

$$x_{k_n}\in K(x,\delta).$$

W ten sposób z (4.6) i (4.7) wynikają nierówności:

$$f(x_{k_n})\leqslant f(x)-2\varepsilon<y-\delta<f(x_{k_n}).$$

Sprzeczność dowodzi, że funkcja $f$ jest ciągła.

**Rozwiązanie zadania 4.71.**

Zgodnie z zadaniami 2.89, 2.90 i 2.91 wiemy, że, niezależnie od określenia metryki w zbiorze $X$, ciąg $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)}=\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)}\right)\in X$, jest zbieżny do punktu $x=(x_1,x_2)\in X$, wtedy i tylko wtedy, gdy oba ciągi $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ i $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne do punktów $x_1$, $x_2$, odpowiednio. Funkcje $\pi_1$ i $\pi_2$ są więc ciągłe, gdyż

$$\pi_1\left(x^{(n)}\right)=x_1^{(n)}\longrightarrow x_1=\pi(x)$$

oraz

$$\pi_2\left(x^{(n)}\right)=x_2^{(n)}\longrightarrow x_2=\pi(x).$$

# Rozdział 5

# Przestrzenie ośrodkowe

**Rozwiązanie zadania 5.1.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną ośrodkową i $A$ niech będzie zbiorem co najwyżej przeliczalnym i gęstym w $X$. Oznaczmy teraz $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Udowodnimy, że rodzina

$$B = \left\{ K\left(a_n, \frac{1}{m}\right) : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

(co najwyżej przeliczalna) jest bazą przestrzeni $X$. Niech więc $U$ będzie dowolnym niepustym zbiorem otwartym w przestrzeni $X$. Dla każdego punktu $x \in U$ istnieje liczba dodatnia $r \in \mathbb{R}$ taka, że $K(x, r) \subset U$. Istnieje też liczba naturalna $m_x$ taka, że

$$K\left(x, \frac{2}{m_x}\right) \subset K(x, r) \subset U.$$

Ponieważ zbiór $A$ jest gęsty, więc istnieje liczba $n_x \in \mathbb{N}$ taka, że $a_{n_x} \in A \cap K\left(x, \frac{1}{m_x}\right)$. Zatem

$$x \in K\left(a_{n_x}, \frac{1}{m_x}\right) \subset K\left(x, \frac{2}{m_x}\right) \subset K(x, r) \subset U.$$

Zauważamy, że

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} K\left(a_{n_x}, \frac{1}{m_x}\right) \subset U,$$

więc

$$U = \bigcup_{x \in U} K\left(a_{n_x}, \frac{1}{m_x}\right).$$

Dowodzi to, że $B$ jest bazą przestrzeni $X$.

Załóżmy teraz, że istnieje co najwyżej przeliczalna baza przestrzeni $X$. Oznaczmy tę bazę symbolem $B$, gdzie $B = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Z każdego zbioru $B_n$ wybierzmy jeden punkt, powiedzmy, $b_n \in B_n$. Zbiór $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest co najwyżej przeliczalny i – jak się okaże – gęsty. Niech $V$ będzie dowolnym niepustym zbiorem w przestrzeni $X$. Istnieje podrodzina $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ taka, że $V = \bigcup \mathcal{B}_1$. Zatem dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ $B_n \in \mathcal{B}_1$, więc $B_n \subset V$, co dowodzi, że $b_n \in V$, czyli zbiór $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty. Przestrzeń $X$ jest więc ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.2.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną ośrodkową, $\mathcal{B}$ jej co najwyżej przeliczalną bazą i $Y$ podprzestrzenią tej przestrzeni. Na mocy zadania 2.11 bazą podprzestrzeni $Y$ jest rodzina zbiorów postaci

$$\mathcal{B}_1 = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}.$$

Ponieważ jest to baza co najwyżej przeliczalna, więc i podprzestrzeń $Y$ jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.3.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną ośrodkową. Wybierzmy dowolne pokrycie otwarte $\mathcal{G}$ tej przestrzeni; przyjmijmy, że $\mathcal{G} = \{G_s : s \in S\}$. Zgodnie z zadaniem 5.1 istnieje baza co najwyżej przeliczalna tej przestrzeni; niech będzie nią rodzina $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Określmy zbiór $K$ następująco:

$$K = \left\{n \in \mathbb{N} : \exists_{s_n \in S} \ (B_n \subset G_{s_n})\right\}.$$

Oczywiście $\bigcup_{k \in K} B_k \subset X$. Pokażemy, że również inkluzja przeciwna jest spełniona. Niech więc $x$ będzie dowolnym elementem zbioru $X$. Istnieje element $s \in S$ takie, że $x \in G_s$. Z własności bazy przestrzeni metrycznej wynika, że istnieje element $n \in \mathbb{N}$ taki, że $x \in B_n \subset G_s$. Wynika stąd, że $n \in K$, zatem $x \in \bigcup_{k \in K} B_k$. W ten sposób udowodniliśmy równość

$$X = \bigcup_{k \in K} B_k.$$

Niech teraz

$$\mathcal{G}_0 = \{G_{s_k} : k \in K\}.$$

Rodzina ta jest co najwyżej przeliczalna i zawiera się w pokryciu $\mathcal{G}$. Mamy też

$$X = \bigcup_{k \in K} B_k \subset \bigcup_{k \in K} G_{s_k} = \bigcup \mathcal{G}_0,$$

co dowodzi, że $\mathcal{G}_0$ jest co najwyżej przeliczalnym podpokryciem pokrycia $\mathcal{G}$, a to kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 5.4.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną ośrodkową, $(Y, \rho)$ dowolną przestrzenią metryczną i $f : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ funkcją ciągłą przekształcającą przestrzeń $X$ na przestrzeń $Y$. Wybierzmy jakiś co najwyżej przeliczalny zbiór $A$ gęsty w przestrzeni $X$. Niech

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Pokażemy, że zbiór $f(A)$ (co najwyżej przeliczalny jako obraz zbioru co najwyżej przeliczalnego) jest gęsty w przestrzeni $Y$. Niech $U$ będzie dowolnym niepustym zbiorem otwartym w przestrzeni $Y$. Zbiór $V = f^{-1}(U)$ jest otwarty (i niepusty) w przestrzeni $X$. Ponieważ zbiór $A$ jest gęsty w $X$, więc istnieje punkt $a \in A \cap V$, co oznacza, że $f(a) \in f(A) \cap U$. Dowodzi to gęstości zbioru $f(A)$ w przestrzeni $Y$.

**Rozwiązanie zadania 5.5.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną ośrodkową, natomiast

$$\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$$

- jej co najwyżej przeliczalną bazą. Rozważmy dowolny zbiór otwarty $U$. Z własności bazy wnioskujemy, że dla każdego punktu $x \in U$ istnieje zbiór $B_n \in \mathcal{B}$ taki, że $x \in B_n \subset U$. Niech

$$M = \{m \in \mathbb{N} : \exists_{x \in U} \ (x \in B_m \subset U)\}.$$

Oczywiście $M \subset \mathbb{N}$, niech więc

$$M = \{n_1, n_2, \ldots\},$$

gdzie $n_1 < n_2 < \ldots$. Wtedy $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ jest rosnącym podciągiem ciągu rosnącego wszystkich liczb naturalnych i

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k} \subset U,$$

czyli $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$. Przy takim wyborze ciągu $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, różnym zbiorom otwartym odpowiadają różne tak określone ciągi. Dowodzi to, że moc rodziny wszystkich zbiorów otwartych w przestrzeni $X$ jest nie większa niż moc sumy zbioru wszystkich podciągów rosnących ciągu liczb naturalnych i zbioru wszystkich ciągów skończonych liczb naturalnych. Moc ta nie przekracza więc continuum. To kończy dowód.

Można podać trochę inny dowód tego faktu. Jak poprzednio, niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną ośrodkową, natomiast

$$\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$$

jej co najwyżej przeliczalną bazą. Dla dowolnego zbioru otwartego $U$ istnieje rodzina $\mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}$ taka, że $U = \bigcup \mathcal{B}_U$. Dowodzi to, że moc rodziny wszystkich zbiorów otwartych w przestrzeni $X$ jest nie większa niż moc rodziny wszystkich podrodzin bazy, czyli continuum.

**Rozwiązanie zadania 5.6.**

Niech $\mathcal{V}$ będzie pewną rodziną zbiorów otwartych i rozłącznych w przestrzeni ośrodkowej $(X, \varrho)$. Istnieje zbiór co najwyżej przeliczalny i gęsty w przestrzeni $X$. Niech to będzie zbiór $A$. Dla każdego zbioru $V$ z rodziny $\mathcal{V}$ istnieje punkt $a \in A$ taki, że $a \in V$. Ponieważ zbiory z rodziny $\mathcal{V}$ są rozłączne, więc różnym zbiorom odpowiadają różne punkty zbioru $A$. Rodzina $\mathcal{V}$ nie może być więc większej mocy niż zbiór $A$. Ma zatem moc nie większą niż $\aleph_0$.

**Rozwiązanie zadania 5.7.**

Ponieważ każdy zbiór domknięty jest dopełnieniem zbioru otwartego, więc moc rodziny zbiorów domkniętych jest równa mocy rodziny zbiorów otwartych, wynosi więc nie więcej niż continuum (patrz zadanie 5.5).

W przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką rodzina zbiorów jednoelementowych jest rodziną zbiorów domkniętych i rozłącznych i ma moc continuum.

**Rozwiązanie zadania 5.8.**

Udowodnimy, że zbiór $E = X \setminus X^c$ jest co najwyżej przeliczalny. W tym celu, niech $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ będzie pewną ustaloną co najwyżej przeliczalną bazą przestrzeni $X$. Dla każdego punktu $x \in E$ istnieje kula $K(x,r)$ taka, że jej moc jest nie większa niż $\aleph_0$. Ponieważ kula jest zbiorem otwartym, więc istnieje liczba $n_x \in \mathbb{N}$ taka, że $x \in B_{n_x} \subset K(x,r)$. Zbiór $B_{n_x}$ jest też co najwyżej przeliczalny. Widzimy zatem, że

$$E = \bigcup_{x \in E} B_{n_x}.$$

Ponieważ zbiór różnych wskaźników $n_x$ jest co najwyżej przeliczalny, więc w powyższej sumie mamy co najwyżej przeliczalną rodzinę zbiorów co najwyżej przeliczalnych. Dowodzi to, że i zbiór $E = X \setminus X^c$ jest co najwyżej przeliczalny jako co najwyżej przeliczalna suma zbiorów co najwyżej przeliczalnych.

Ponieważ zbiór $A$ stanowi podprzestrzeń ośrodkową, więc z poprzedniego dowodu wynika, że zbiór $A \setminus A^c$ jest co najwyżej przeliczalny.

**Rozwiązanie zadania 5.9.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną ośrodkową. Oczywiście

$$X = X^c \cup (X \setminus X^c).$$

Wystarczy więc teraz (na podstawie zadania 5.8) udowodnić, że zbiór $X^c$ jest doskonały. Z zadania 3.49 wnioskujemy, że jest to zbiór domknięty.

Oczywiście, $A^c = \emptyset$ dla dowolnego zbioru co najwyżej przeliczalnego $A$. Stąd oraz z zadania 3.49 wynika

$$X^c = X^{cc} \cup (X \setminus X^c)^c = X^{cc} \subset (X^c)^d,$$

a zatem zbiór $X^c$ jest w sobie gęsty.

**Rozwiązanie zadania 5.10.**

Każdy zbiór jednoelementowy w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ jest domknięty. W przestrzeni ośrodkowej rodzina zbiorów jednoelementowych jest więc mocy nie większej niż continuum. Oznaczmy tę rodzinę symbolem $\mathcal{F}$. Funkcja $f : X \longrightarrow \mathcal{F}$ dana wzorem

$$f(x) = \{x\}$$

jest wzajemnie jednoznaczna oraz $f(X)$ ma moc co najwyżej continuum. Dziedzina zatem, czyli zbiór $X$, też ma moc nie większą niż continuum.

**Rozwiązanie zadania 5.11.**

Dowód wynika z faktu, że każdy punkt izolowany musi być elementem zbioru gęstego w przestrzeni.

Inaczej można ten fakt uzasadnić następująco: Rodzina wszystkich zbiorów jednoelementowych, których jedyne elementy są punktami izolowanymi w przestrzeni, składa się ze zbiorów otwartych i rozłącznych. Na podstawie zadania 5.6 wnioskujemy więc, że jest to rodzina co najwyżej przeliczalna.

**Rozwiązanie zadania 5.12.**

Z zadania 5.11 i faktu, że każdy podzbiór przestrzeni ośrodkowej stanowi przestrzeń ośrodkową wynika warunek zadania.

**Rozwiązanie zadania 5.13.**

Przypuśćmy, że istnieje nieprzeliczalny zbiór $A$ w przestrzeni metrycznej ośrodkowej $(X, \varrho)$ o własności podanej w treści zadania. Rodzina kul postaci $K\left(x, \frac{r}{3}\right)$ jest nieprzeliczalną rodziną złożoną z rozłącznych zbiorów otwartych, sprzeczne to jest z warunkiem zadania 5.6. Przestrzeń $X$ nie jest więc ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.14.**

Ponieważ $A^c = \emptyset$ dla każdego zbioru co najwyżej przeliczalnego $A$, więc, na mocy zadania 5.8,

$$A^c = (A^c \cup (A \setminus A^c))^c = A^{cc} \cup (A \setminus A^c)^c = A^{cc} \cup \emptyset = A^{cc}.$$

**Rozwiązanie zadania 5.15.**

Z dowodu twierdzenia Cantora-Bendixsona wynika, że zbiór $X^c$ jest w sobie gęsty. Z założenia jest on pusty, zatem $X = X \setminus X^c$, a ten zbiór jest co najwyżej co najwyżej przeliczalny.

**Rozwiązanie zadania 5.16.**

Załóżmy najpierw, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią ośrodkową. Niech $A$ będzie co najwyżej przeliczalnym zbiorem gęstym w przestrzeni $X$. Pokażemy, że dla każdej liczby dodatniej $r$

$$X = \bigcup_{a \in A} K(a, r).$$

Gdyby tak nie bylo, to istniałyby liczba $r > 0$ i element $x \in X$ takie, że $\varrho(x, a) \geqslant r$ dla każdego punktu $a \in A$, co przeczyłoby gęstości zbioru $A$.

Teraz załóżmy, że dla każdej liczby dodatniej $r$ zbiór $X$ jest sumą skończonej lub przeliczalnej rodziny kul o promieniu równym 1. Istnieje więc co najwyżej przeliczalny zbiór $A_1 = \left\{a_n^{(1)} : n \in \mathsf{N}\right\}$ taki, że

$$X = \bigcup_{n \in \mathsf{N}} K(a_n^{(1)}, 1).$$

Postępując podobnie, wnioskujemy, że dla każdej liczby naturalnej $k$ istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $A_k = \left\{a_n^{(k)} : n \in \mathsf{N}\right\}$ taki, że

$$X = \bigcup_{n \in \mathsf{N}} K\left(a_n^{(k)}, \frac{1}{k}\right).$$

Niech teraz $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Jest to zbiór co najwyżej przeliczalny; pokażemy, że jest on też gęsty w przestrzeni $X$.

Dla dowolnego punktu $x \in X$ i dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje liczba $k \in \mathsf{N}$ taka, że $\frac{1}{k} < \varepsilon$, a ponieważ

$$X = \bigcup_{n \in \mathsf{N}} K\left(a_n^{(k)}, \frac{1}{k}\right),$$

więc istnieje element $n \in \mathsf{N}$ taki, że $x \in K\left(a_n^{(k)}, \frac{1}{k}\right)$. Zatem $\varrho\left(x, a_n^{(k)}\right) < \varepsilon$. Dowodzi to gęstości zbioru $A$.

**Rozwiązanie zadania 5.17.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną, dla której każde pokrycie ma podpokrycie co najwyżej przeliczalne. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $r$. Rodzina

$$\{K(x, r) : x \in X\}$$

jest, oczywiście, pokryciem przestrzeni $X$. Istnieje zatem co najwyżej przeliczalne podpokrycie, więc na mocy zadania 5.16 wnioskujemy, że przestrzeń $X$ jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.18.**

Tak. Zbiór liczb wymiernych jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym i gęstym w przestrzeni liczb rzeczywistych.

**Rozwiązanie zadania 5.19.**

Tak. Zbiór $\mathsf{Q}^n$ jest co najwyżej przeliczalny i gęsty w przestrzeni $\mathsf{R}^n$. Istotnie. Dla dowolnego punktu $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje punkt $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathsf{Q}^n$ taki, że

$$|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Tak więc

$$\varrho(x, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - q_i|^2} \leqslant n \cdot \max\{|x_i - q_i| : i \in \{1, \ldots, n\}\} < \varepsilon.$$

**Rozwiązanie zadania 5.20.**

Tak. Niech $A = (\mathsf{Q} \cup \sqrt{2} \cdot \mathsf{Q}) \cap [0, 1]$. Jest to zbiór co najwyżej przeliczalny. Pokażemy, że jest gęsty w przestrzeni $X$. Jeśli $x \in X$ jest liczbą wymierną, to należy do $A$. Niech teraz $x \in [0, 1] \setminus \mathsf{Q}$. Dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ takiej, że $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (0, 1)$, istnieje liczba wymierna $q$ taka, że

$$q \in \left(\frac{x - \varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{x + \varepsilon}{\sqrt{2}}\right).$$

Wtedy $q\sqrt{2} \in A$ i $|x - q\sqrt{2}| < \varepsilon$. Tak więc zbiór $A$ jest gęsty w naszej przestrzeni.

**Rozwiązanie zadania 5.21.**

Tak. Zbiór $\mathsf{Q}^2$ jest co najwyżej przeliczalny i gęsty w przestrzeni, bowiem dla dowolnego punktu $x = (x_1, x_2) \in \mathsf{R}^2$ i dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieją liczby wymierne $q_1, q_2$ takie, że

$$|x_1 - q_1| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |x_2 - q_2| < \varepsilon.$$

Zatem dla $q = (q_1, q_2)$ spełniona jest zależność

$$\varrho(x, q) = \max\{|x_1 - q_1|, |x_2 - q_2|\} < \varepsilon,$$

co dowodzi gęstości zbioru $\mathsf{Q}^2$.

**Rozwiązanie zadania 5.22.**

Tak. Zbiór $\mathsf{Q}^2$ jest co najwyżej przeliczalny i gęsty w przestrzeni, bowiem dla dowolnego punktu $x = (x_1, x_2) \in \mathsf{R}^2$ i dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieją liczby wymierne $q_1, q_2$ takie, że

$$|x_1 - q_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad |x_2 - q_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem dla $q = (q_1, q_2)$ spełniona jest zależność

$$\varrho(x, q) = |x_1 - q_1| + |x_2 - q_2| < \varepsilon,$$

co dowodzi gęstości zbioru $\mathsf{Q}^2$.

**Rozwiązanie zadania 5.23.**

Tak. Zbiór $\mathsf{Q}^2$ jest co najwyżej przeliczalny i gęsty w przestrzeni, bowiem dla dowolnego punktu $x = (x_1, x_2) \in \mathsf{R}^2$ i dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ (możemy tu przyjąć, że $\varepsilon < 1$) istnieją liczby wymierne $q_1, q_2$ takie, że

$$|x_1 - q_1| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |x_2 - q_2| < \varepsilon.$$

Zatem dla $q = (q_1, q_2)$ spełniona jest zależność

$$\varrho(x, q) = \max\{|x_1 - q_1|, |x_2 - q_2|\} < \varepsilon,$$

co dowodzi gęstości zbioru $\mathsf{Q}^2$.

**Rozwiązanie zadania 5.24.**

Przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ co najwyżej przeliczalna jest zawsze ośrodkowa, bo $X$ jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym i gęstym w $X$.

W przestrzeni z metryką zero-jedynkową każdy punkt jest izolowany. Jeśli przestrzeń ta jest ośrodkowa, to jest co najwyżej przeliczalna (zadanie 5.11).

**Rozwiązanie zadania 5.25.**

Nie. Zbiór $\{1\} \times \mathsf{R}$ jest nieprzeliczalny i dla każdych dwóch różnych punktów $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$ z tego zbioru mamy:

$$\varrho(x, y) = |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| \geqslant |x_1| + |y_1| = 2.$$

Na mocy zadania 5.13 wnioskujemy, że przestrzeń ta nie jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.26.**

Nie. Niech $A$ będzie zbiorem funkcji charakterystycznych wszystkich zbiorów jednoelementowych. Zbiór ten jest nieprzeliczalny i odległość każdych dwóch różnych funkcji z tego zbioru jest równa 1. Z zadania 5.13 wynika, że przestrzeń ta nie jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.27.**

Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych jest co najwyżej przeliczalny. Zbieżność w tej przestrzeni jest zbieżnością jednostajną, zatem z twierdzenia Weierstrassa wnioskujemy, że przestrzeń $X$ jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.28.**

Niech $A_1$ i $A_2$ będą co najwyżej przeliczalnymi zbiorami gęstymi w przestrzeniach $X_1$ i $X_2$, odpowiednio. Zbiór $A = A_1 \times A_2$ jest co najwyżej przeliczalny. Jest on gęsty w przestrzeni $X$, bowiem dla dowolnego punktu $x = (x_1, x_2) \in X$ i dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieją punkty $q_1 \in A_1$ i $q_2 \in A_2$ takie, że

$$\varrho_1(x_1, q_1) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \varrho_2(x_2, q_2) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Zatem dla $q = (q_1, q_2)$ spełniona jest zależność

$$\varrho(x, q) = \sqrt{(\varrho_1(x_1, q_1))^2 + (\varrho_2(x_2, q_2))^2} < \varepsilon.$$

Oznacza to, że zbiór $A$ jest gęsty w $X$, czyli przestrzeń $X$ jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.29.**

Niech $A_1$ i $A_2$ będą co najwyżej przeliczalnymi zbiorami gęstymi w przestrzeniach $X_1$ i $X_2$, odpowiednio. Zbiór $A = A_1 \times A_2$ jest co najwyżej przeliczalny. Jest on gęsty w przestrzeni $X$, bowiem dla dowolnego punktu $x = (x_1, x_2) \in X$ i dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieją punkty $q_1 \in A_1$ i $q_2 \in A_2$ takie, że

$$\varrho_1(x_1, q_1) < \varepsilon \quad \text{i} \quad \varrho_2(x_2, q_2) < \varepsilon.$$

Zatem dla $q = (q_1, q_2)$ spełniona jest zależność

$$\varrho(x, q) = \max\{\varrho_1(x_1, q_1), \varrho_2(x_2, q_2)\} < \varepsilon.$$

Oznacza to, że zbiór $A$ jest gęsty w $X$, czyli przestrzeń $X$ jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.30.**

Niech $A_1$ i $A_2$ będą co najwyżej przeliczalnymi zbiorami gęstymi w przestrzeniach $X_1$ i $X_2$, odpowiednio. Zbiór $A = A_1 \times A_2$ jest co najwyżej przeliczalny. Jest on gęsty w przestrzeni $X$, bowiem dla dowolnego punktu $x = (x_1, x_2) \in X$ i dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieją punkty $q_1 \in A_1$ i $q_2 \in A_2$ takie, że

$$\varrho_1(x_1, q_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad \varrho_2(x_2, q_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem dla $q = (q_1, q_2)$ spełniona jest zależność

$$\varrho(x, q) = \varrho_1(x_1, q_1) + \varrho_2(x_2, q_2) < \varepsilon.$$

Oznacza to, że zbiór $A$ jest gęsty w $X$, czyli przestrzeń $X$ jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.31.**

Niech $x = (x_1, x_2)$ będzie dowolnym elementem przestrzeni $X$ i $\varepsilon$ dowolną liczbą dodatnią. Z własności bazy przestrzeni metrycznej (zadanie 2.10) wynika, że istnieją zbiory $B_n^1$ i $B_m^2$ takie, że

$$x_1 \in B_n^1 \subset K\left(x_1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{i} \quad x_2 \in B_m^2 \subset K\left(x_2, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right).$$

Ponieważ

$$(x_1, x_2) \in B_n^1 \times B_m^2 \subset K\left(x_1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \times K\left(x_2, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \subset K(x, \varepsilon),$$

więc znowu korzystając z zadania 2.10 wnioskujemy, że rodzina

$$\{B_n^1 \times B_k^2\}_{n,k \in \mathbb{N}}$$

jest bazą przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 5.32.**

Niech $x = (x_1, x_2)$ będzie dowolnym elementem przestrzeni $X$ i $\varepsilon$ dowolną liczbą dodatnią. Z własności bazy przestrzeni metrycznej (zadanie 2.10) wynika, że istnieją zbiory $B_n^1$ i $B_m^2$ takie, że

$$x_1 \in B_n^1 \subset K\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{i} \quad x_2 \in B_m^2 \subset K\left(x_2, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ponieważ

$$(x_1, x_2) \in B_n^1 \times B_m^2 \subset K\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \times K\left(x_2, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset K(x, \varepsilon),$$

więc znowu korzystając z zadania 2.10 wnioskujemy, że rodzina

$$\{B_n^1 \times B_k^2\}_{n,k \in \mathbb{N}}$$

jest bazą przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 5.33.**

Niech $x = (x_1, x_2)$ będzie dowolnym elementem przestrzeni $X$ i $\varepsilon$ dowolną liczbą dodatnią. Z własności bazy przestrzeni metrycznej (zadanie 2.10) wynika, że istnieją zbiory $B_n^1$ i $B_m^2$ takie, że

$$x_1 \in B_n^1 \subset K(x_1, \varepsilon) \quad \text{i} \quad x_2 \in B_m^2 \subset K(x_2, \varepsilon).$$

Ponieważ

$$(x_1, x_2) \in B_n^1 \times B_m^2 \subset K(x_1, \varepsilon) \times K(x_2, \varepsilon) \subset K(x, \varepsilon),$$

więc znowu korzystając z zadania 2.10 wnioskujemy, że rodzina

$$\{B_n^1 \times B_k^2\}_{n,k \in \mathbb{N}}$$

jest bazą przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 5.34.**

Rozważmy zbiór wszystkich przedziałów domkniętych o końcach wymiernych. Jest on co najwyżej przeliczalny. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią, $I = [a, b]$ - dowolnym przedziałem z przestrzeni $X$. Istnieją liczby wymierne $p$ i $q$ takie, że

$$p < a \leqslant b < q \quad \text{i} \quad a - p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oraz} \quad q - b < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Oznaczmy przedział $[p, q]$ jako $L$. Wtedy $I \triangle L = [p, a) \cup (b, q]$ i w ten sposób

$$\varrho(I, L) = (a - p) + (q - b) < \varepsilon.$$

Dowodzi to, że rozważany zbiór jest gęsty w przestrzeni $X$. Przestrzeń $X$ jest więc ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.35.**

Nie. Niech $K = \{x \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} x = 1\}$. Zbiór ten jest nieprzeliczalny i dla dowolnych dwóch różnych liczb $x$ i $y$ z tego zbioru mamy:

$$\varrho(x, y) = |\operatorname{Re} x| + |\operatorname{Re} y| + |\operatorname{Im} x - \operatorname{Im} y| \geqslant |\operatorname{Re} x| + |\operatorname{Re} y| = 2.$$

Na mocy zadania 5.13 wnioskujemy, że $X$ nie jest przestrzenią ośrodkową.

**Rozwiązanie zadania 5.36.**

Tak. Jest to przestrzeń co najwyżej przeliczalna, więc jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.37.**

Tak. Niech $A$ będzie zbiorem wszystkich ciągów $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ takich, że $q_n \in \mathbb{Q}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i istnieje liczba naturalna $m$ taka, że $q_n = 0$ dla $n > m$. Każdy taki ciąg, oczywiście, należy do przestrzeni $l^p$. Zbiór $A$ jest równoliczny ze zbiorem $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$; jest więc co najwyżej przeliczalny.

Niech $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym elementem przestrzeni $l^p$. Niech dalej $\varepsilon$ będzie dowolną ustaloną liczbą dodatnią. Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ wynika, że istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}. \tag{5.1}$$

Dla każdej liczby naturalnej $n \leqslant k$ istnieje liczba wymierna $q_n$ taka, że

$$|x_n - q_n| < \frac{\varepsilon}{(2k)^{1/p}}.$$

Wtedy

$$\sum_{n=1}^{k} |x_n - q_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2k} \cdot k = \frac{\varepsilon^p}{2}. \tag{5.2}$$

Niech teraz $q_n = 0$ dla $n > k$. Otrzymany ciąg $q = (q_n)_{n=1}^{\infty}$ należy do zbioru $A$ i na mocy 5.1 i 5.2 mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - q_n|^p = \sum_{n=1}^{k} |x_n - q_n|^p + \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n - 0|^p < \varepsilon^p.$$

Zatem

$$\varrho(x, q) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - q_n|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Dowodzi to, że zbiór $A$ jest gęsty w przestrzeni $l^p$, czyli przestrzeń ta jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.38.**

Nie. Niech $A$ będzie zbiorem wszystkich ciągów o wyrazach przyjmujących wartości 1 lub 0. Moc zbioru $A$ jest równa continuum. Dla różnych elementów $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ ze zbioru $A$ mamy:

$$\varrho(x, y) = \sup \{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\} = 1,$$

czyli, na mocy zadania 5.13, przestrzeń $l^{\infty}$ nie jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.39.**

Tak. Niech $A$ będzie zbiorem wszystkich ciągów $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ takich, że $q_n \in \mathbb{Q}$ dla $n \in \mathbb{N}$ i istnieje liczba naturalna $m$, taka, że $q_n = 0$ dla $n > m$. Każdy taki ciąg, oczywiście, należy do przestrzeni $X$. Zbiór $A$ jest równoliczny ze zbiorem $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$; jest więc co najwyżej przeliczalny.

Niech $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym elementem przestrzeni $X$. Istnieje liczba dodatnia $M$ taka, że $|x_n| \leqslant M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech dalej $\varepsilon$ będzie dowolną ustaloną liczbą dodatnią. Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ wynika, że istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{5.3}$$

Dla każdej liczby naturalnej $n \leqslant k$ istnieje liczba wymierna $q_n$ taka, że

$$|x_n - q_n| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Wtedy

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{|x_n - q_n|}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2k} \cdot k = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.4}$$

Niech teraz $q_n = 0$ dla $n > k$. Otrzymany ciąg $q = (q_n)_{n=1}^{\infty}$ należy do zbioru $A$ i na mocy 5.3 i 5.4 oraz z ograniczoności ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mamy:

$$\varrho(x, q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - q_n|}{2^n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{|x_n - q_n|}{2^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} < \varepsilon.$$

Dowodzi to, że zbiór $A$ jest gęsty w przestrzeni $X$, czyli przestrzeń ta jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.40.**

Tak. Niech $A$ będzie zbiorem wszystkich ciągów $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ takich, że $q_n \in \mathbb{Q}$ dla $n \in \mathbb{N}$ i istnieje liczba naturalna $m$, taka, że $q_n = 0$ dla $n > m$. Każdy taki ciąg, oczywiście, należy do przestrzeni $X$. Zbiór $A$ jest równoliczny ze zbiorem $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$; jest więc co najwyżej przeliczalny.

Niech $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym elementem przestrzeni $X$. Niech dalej $\varepsilon$ będzie dowolną ustaloną liczbą dodatnią. Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ wynika, że istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.5}$$

Dla każdej liczby naturalnej $n \leqslant k$ istnieje liczba wymierna $q_n$ taka, że

$$|x_n - q_n| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Wtedy

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - q_n|}{1+|x_n - q_n|} \leqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} \cdot |x_n - q_n| < \frac{\varepsilon}{2k} \cdot k = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.6}$$

Niech teraz $q_n = 0$ dla $n > k$. Otrzymany ciąg $q = (q_n)_{n=1}^{\infty}$ należy do zbioru $A$ i na mocy 5.5 i 5.6 mamy:

$$\varrho(x,q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - q_n|}{1+|x_n - q_n|} =$$

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - q_n|}{1+|x_n - q_n|} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - 0|}{1+|x_n - 0|} < \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - q_n|}{1+|x_n - q_n|} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Dowodzi to, że zbiór $A$ jest gęsty w przestrzeni $X$, czyli przestrzeń ta jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.41.**

Nie. Dla każdej liczby rzeczywistej $r$ niech $x^{(r)}$ będzie ciagiem danym wzorem $x^{(r)} = \left(x_n^{(r)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x_1^{(r)} = r$ oraz $x_n^{(r)} = 0$ dla $n > 1$. Zbiór wszystkich takich ciągów jest nieprzeliczalny oraz dla każdych dwóch różnych takich ciągów $x^{(r_1)}$ i $x^{(r_2)}$ mamy: $\varrho\left(x^{(r_1)}, x^{(r_2)}\right) = 1$. Na mocy zadania 5.13 wnioskujemy, że rozważana przestrzeń nie jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.42.**

Tak. Zbiór $\mathcal{P}$ wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Pokażemy, że jest on gęsty w rozważanej przestrzeni. Niech $f$ będzie dowolną funkcją z przestrzeni $X$, $\varepsilon$ – dowolną liczbą dodatnią. Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że istnieje wielomian $p$ o współczynnikach wymiernych i taki, iż

$$|f(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Zatem

$$\varrho(f,p) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx < \varepsilon.$$

Dowodzi to, że zbiór $\mathcal{P}$ jest gęsty w $X$, co implikuje ośrodkowość przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 5.43.**

Niech $A$ będzie zbiorem co najwyżej przeliczalnym i gęstym w przestrzeni $(X, \varrho)$. Dla dowolnego elementu $x$ zbioru $X$ i dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje element $a$ w zbiorze $A$ taki, że $\varrho(x,a) < \varepsilon$. Wtedy

$$\varrho^*(x,a) = \frac{\varrho(x,a)}{1+\varrho(x,a)} \leqslant \varrho(x,a) < \varepsilon.$$

Dowodzi to, że przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.44.**

Niech $A$ będzie zbiorem co najwyżej przeliczalnym i gęstym w przestrzeni $(X, \varrho)$. Dla dowolnego elementu $x$ zbioru $X$ i dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje element $a$ w zbiorze $A$ taki, że $\varrho(x, a) < \frac{\varepsilon}{\alpha}$. Wtedy

$$\varrho^*(x, a) = \alpha \cdot \varrho(x, a) < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon.$$

Dowodzi to, że przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.45.**

Niech $A$ będzie zbiorem co najwyżej przeliczalnym i gęstym w przestrzeni $(X, \varrho)$. Dla dowolnego elementu $x$ zbioru $X$ i dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje element $a$ w zbiorze $A$ taki, że $\varrho(x, a) < \varepsilon$. Wtedy

$$\varrho^*(x, a) = \min(1, \varrho(x, a)) \leqslant \varrho(x, a) < \varepsilon.$$

Dowodzi to, że przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest ośrodkowa.

**Rozwiązanie zadania 5.46.**

Jeśli zbiór $X$ jest co najwyżej przeliczalny, to, oczywiście, $(X, \varrho)$ jest przestrzenią ośrodkową.

Jeśli $X$ jest zbiorem nieprzeliczalnym, to przestrzeń $(X, \varrho)$ nie jest ośrodkowa. Istotnie. Dla każdej liczby naturalnej $n$ niech

$$A_n = \left\{x \in X \ : \ \varrho(x, x_0) \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Wtedy

$$\{x_0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$$

i przynajmniej jeden ze zbiorów $A_n$ jest nieprzeliczalny. Niech to będzie zbiór $A_{n_0}$. Dla różnych elementów $x, y \in A_{n_0}$ spełniona jest nierówność

$$\varrho(x, y) = \varrho(x, x_0) + \varrho(y, x_0) \geqslant 2 \cdot \frac{1}{n_0}.$$

Ponieważ $A_{n_0}$ jest zbiorem nieprzeliczalnym, więc przestrzeń $(X, \varrho)$ nie jest ośrodkowa w myśl zadania 5.13.

**Rozwiązanie zadania 5.47.**

Jeśli zbiór $X$ jest co najwyżej przeliczalny, to, oczywiście, $(X, \varrho^*)$ jest przestrzenią ośrodkową.

Jeśli $X$ jest zbiorem nieprzeliczalnym, to przestrzeń $(X, \varrho^*)$ nie musi być ośrodkowa.

Rozważmy funkcję $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ daną wzorem

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad t = 0, \\ 1, & \text{gdy} \quad t > 0. \end{cases}$$

Spełnia ona wszystkie warunki zadania, natomiast metryka $\varrho^*$ jest metryką zero-jedynkową, co dowodzi, że przestrzeń $(X, \varrho^*)$ nie jest ośrodkowa.

Jeśli jednak funkcja $f$ jest prawostronnie ciągła w punkcie 0, to przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest ośrodkowa. Niech $A$ będzie co najwyżej przeliczalnym zbiorem gęstym w przestrzeni $(X, \varrho)$. Ustalmy dowolny element $x$ ze zbioru $X$ i dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Z założenia ciągłości funkcji $f$ wynika, iż istnieje dodatnia liczba $\delta$ taka, że

$$f(t) = |f(t) - f(0)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad t \in (0, \delta).$$

Ponieważ zbiór $A$ jest gęsty w przestrzeni $(X, \varrho)$, więc istnieje punkt $a \in A$ taki, że $\varrho(x, a) < \delta$. Zatem

$$\varrho^*(x, a) = f(\varrho(x, a)) < \varepsilon.$$

Dowodzi to, iż zbiór $A$ jest gęsty w przestrzeni $(X, \varrho^*)$, czyli jest to przestrzeń ośrodkowa.

# Rozdział 6

# Przestrzenie zupełne

**Rozwiązanie zadania 6.1.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią zupełną i $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ – zstępującym ciągiem niepustych zbiorów domkniętych, których średnice tworzą ciąg zbieżny do zera. Dla każdej liczby naturalnej $n$ niech $x_n$ będzie wybranym elementem zbioru $F_n$. Pokażemy, że utworzony w ten sposób ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ $\delta(F_n) \longrightarrow 0$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\delta(F_n) < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Dla $k, l \in \mathbb{N}$ takich, że $k > l \geqslant n_0$ mamy:

$$x_k \in F_k \subset F_l \subset F_{n_0} \quad \text{i} \quad x_l \in F_l \subset F_{n_0}.$$

Wynika stąd, że $\varrho(x_k, x_l) \leqslant \delta(F_{n_0}) < \varepsilon$. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia więc warunek Cauchy'ego. Z założenia wynika teraz, iż ciąg ten jest zbieżny do pewnego elementu $x \in X$. Ponieważ $x_n \in F_m$ dla $m, n \in \mathbb{N}$, gdy $n \geqslant m$ i $x$ jest granicą ciągu $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ punktów zbioru $F_m$, więc $x \in \overline{F_m} = F_m$. Dowodzi to, że $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Jeśli istniałyby dwa różne punkty $x$ i $y$ należące do $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, to

$$\delta(F_n) \geqslant \varrho(x, y) = a > 0,$$

co przeczy warunkowi $\delta(F_n) \longrightarrow 0$.

**Rozwiązanie zadania 6.2.**

Przypuśćmy, że pewna przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ nie jest zupełna. Istnieje więc pewien ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, który spełnia warunek Cauchy'ego, ale nie jest zbieżny w przestrzeni $X$. Na mocy zadania 2.18 wnioskujemy, że nie posiada on żadnego podciągu zbieżnego. Zatem każdy ze zbiorów

$$F_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

jest domknięty. Zbiory te są niepuste i, jak łatwo zauważyć, tworzą ciąg zstępujący. Ponadto ciąg $(\delta(F_n))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do zera. Istotnie, dla dowolnej liczby dodatniej

$\varepsilon$ istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnych liczb naturalnych $n$ i $m$ spełniających nierówności $n \geqslant n_0$ i $m \geqslant n_0$ mamy $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Zatem dla $n \geqslant n_0$ mamy $\delta(F_n) \leqslant \varepsilon$. Z założenia wynika, że istnieje punkt $x \in X$ taki, że

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Tak więc $x \in F_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wynika stąd, że dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieje liczba $k_n > n$ taka, że $x = x_{k_n}$. Wynika stąd, że istnieje podciąg stały ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, czyli zbieżny. Otrzymana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

**Rozwiązanie zadania 6.3.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie pewną przestrzenią zupełną i $E$ jej podzbiorem domkniętym. Rozważmy teraz dowolny zstępujący ciąg $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiorów domkniętych w podprzestrzeni $E$ o ciągu średnic zbieżnym do zera. Ponieważ $E$ jest zbiorem domkniętym, więc zbiory $F_n$ są domknięte w przestrzeni $X$. Na podstawie twierdzenia Cantora (zadanie 6.1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$, co na mocy zadania 6.2 implikuje zupełność podprzestrzeni $E$.

**Rozwiązanie zadania 6.4.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną i $E$ jej podprzestrzenią zupełną. Jeśli $x \in \overline{E}$, to istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów zbioru $E$ zbieżny do $x$. Ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego (w przestrzeni $E$), jest więc zbieżny do pewnego punktu zbioru $E$. Z jednoznaczności granicy wynika, że $x \in E$. To dowodzi, że zbiór $E$ jest domknięty w przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 6.5.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią zupełną i $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ciągiem zbiorów domkniętych i brzegowych. Oznaczmy teraz $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Zbiory $F_n$ są nigdzie gęste (zadanie 3.18). Wystarczy teraz udowodnić, że $X \setminus A$ jest gęsty w przestrzeni $X$.

Niech $K_0$ będzie dowolną kulą otwartą. Ponieważ $F_1$ jest zbiorem nigdzie gęstym, więc istnieje pewna kula otwarta $K(x_1, 2r_1)$ taka, że

$$K(x_1, 2r_1) \cap F_1 = \emptyset, \quad K(x_1, 2r_1) \subset K_0 \quad \text{i} \quad r_1 < 1.$$

Ponieważ $F_2$ jest zbiorem nigdzie gęstym, więc istnieje pewna kula otwarta $K(x_2, 2r_2)$ taka, że

$$K(x_2, 2r_2) \cap F_2 = \emptyset, \quad K(x_2, 2r_2) \subset K(x_1, r_1) \quad \text{i} \quad r_2 < \frac{1}{2}.$$

Postępując podobnie możemy określić ciąg kul $(K(x_n, r_n))_{n=1}^{\infty}$ spełniających następujące warunki:

$$K(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \cap F_{n+1} = \emptyset, \; K(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset K(x_n, r_n) \text{ i } r_n < \frac{1}{2^n}$$

dla wszystkich liczb naturalnych $n$. Oznaczając dla skrótu $B_n = \overline{K(x_n, r_n)}$ zauważamy, że

$$B_{n+1} \subset B_n, \qquad \delta(B_n) < \frac{2}{2^n},$$

zatem ponieważ zbiory $B_n$ są domknięte, więc na mocy zadania 6.1 istnieje punkt $x$ należący do zbioru $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Ponieważ każdy zbiór $B_n$ jest rozłączny z $F_n$, więc $x \notin A$. Jednocześnie $x \in K_0$, a to dowodzi, że zbiór $X \setminus A$ jest gęsty, czyli $A$ jest brzegowy.

**Rozwiązanie zadania 6.6.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią zupełną. Gdyby zbiór $X$ był $I$ kategorii, to zgodnie z zadaniem poprzednim, byłby to zbiór brzegowy. Zatem mielibyśmy (w myśl zadania 3.11):

$$X = \operatorname{Int}(X) = \emptyset,$$

co jest niemożliwe.

**Rozwiązanie zadania 6.7.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią zupełną i $f : X \longrightarrow X$ – dowolnym odwzorowaniem zwężającym ze stałą $\alpha$. Zauważamy bez trudu, że każde odwzorowanie zwężające jest przekształceniem ciągłym. Wybierzmy jakikolwiek punkt $x_0 \in X$. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ określimy indukcyjnie w sposób następujący:

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad \text{dla} \quad n \in \mathrm{N}.$$

Wtedy dla $k \in \mathrm{N}$ mamy:

$$\varrho(x_k, x_{k+1}) = \varrho(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leqslant \alpha \cdot \varrho(x_{k-1}, x_k),$$

skąd wynika

$$\varrho(x_k, x_{k+1}) \leqslant \alpha^l \cdot \varrho(x_{k-l}, x_{k-l+1}) \quad \text{dla} \quad l \leqslant k.$$

Zatem dla $m > n \geqslant 1$ mamy:

$$\varrho(x_m, x_n) \leqslant \sum_{i=0}^{m-n-1} \varrho(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \leqslant \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^{i+1} \cdot \varrho(x_{n-1}, x_n) \leqslant$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \varrho(x_{n-1}, x_n) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \varrho(x_0, x_1).$$

Ponieważ $\alpha < 1$, więc ostatnia nierówność dowodzi, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Istnieje więc punkt $x \in X$, który jest granicą tego ciągu. Zatem

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

a to znaczy, że $x$ jest punktem stałym funkcji $f$.

Gdyby istniały dwa różne punkty stałe przekształcenia $f$, powiedzmy $x$ i $u$, to

$$\varrho(x, u) = \varrho(f(x), f(u)) \leqslant \alpha \cdot \varrho(x, u) < \varrho(x, u),$$

co jest niemożliwe.

**Rozwiązanie zadania 6.8.**

Udowodnimy zupełność przestrzeni R w kilku krokach. Oto one:

- Każdy ciąg liczb rzeczywistych niemalejący i ograniczony z góry jest zbieżny. Każdy ciąg liczb rzeczywistych nierosnący i ograniczony z dołu jest zbieżny.
- (Twierdzenie Ascoliego). Jeśli $([a_n, b_n])_{n=1}^{\infty}$ jest zstępującym ciągiem niepustych przedziałów domkniętych takich, że $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, to istnieje dokładnie jeden element $a \in \mathsf{R}$ taki, że

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

- (twierdzenie Bolzano-Weierstrassa). Każdy ciąg ograniczony w przestrzeni R posiada podciąg zbieżny.

Podamy teraz dowody kolejnych własności.

Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem niemalejącym i ograniczonym z góry. Zbiór $\{a_n : n \in \mathsf{N}\}$ jest więc ograniczony z góry i istnieje liczba $a \in \mathsf{R}$ taka, że

$$a = \sup\{a_n : n \in \mathsf{N}\}.$$

Z definicji kresu górnego wnioskujemy, że dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje liczba $n_0 \in \mathsf{N}$ taka, że

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant a.$$

Z monotoniczności ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wynika teraz, że

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant a_n \leqslant a \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Dowodzi to zbieżności ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ do punktu $a$.

Niech teraz $([a_n, b_n])_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem spełniającym założenia twierdzenia Ascoliego. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest niemalejący i ograniczony z góry (przez np. liczbę $b_1$). Z własności udowodnionej powyżej wiemy, że jest to ciąg zbieżny. Niech $a$ będzie jego granicą. Podobnie wnioskujemy, że ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny i niech $b$ będzie jego granicą. Wtedy

$$a_n \leqslant a \quad \text{i} \quad b \leqslant b_n \quad n \in \mathsf{N}.$$

Z założenia $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ wynika, że $a = b$. Zatem dla każdej liczby naturalnej $n$ spełnione są nierówności

$$a_n \leqslant a \leqslant b_n,$$

co dowodzi, że

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Niech teraz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem ograniczonym w przestrzeni R.

Jeśli ciąg ten ma podciąg stały, to ten podciąg jest zbieżny.

Załóżmy teraz, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nie ma podciągu stałego. Wtedy zbiór wyrazów tego ciągu, czyli $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest nieskończony. Z ograniczoności ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ wynika, że istnieją liczby rzeczywiste $a$ i $b$ takie, że

$$a < x_n < b \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy przynajmniej jeden z przedziałów

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Przedział, który spełnia ten warunek oznaczmy symbolem $[a_1, b_1]$. Z przedziałem $[a_1, b_1]$ postępujemy podobnie, tzn. dzielimy go na dwa podprzedziały o równej długości i wybieramy ten z nich, w którym leży nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Postępując tak dalej otrzymujemy ciąg przedziałów $([a_n, b_n])_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n],$$

$$b_n - a_n = 2(b_{n+1} - a_{n+1}),$$

$$a_n < b_n,$$

$$\operatorname{card}\{j \in \mathbb{N} : x_j \in [a_n, b_n]\} = \aleph_0$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Z twierdzenia Ascoliego wynika, że istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Udowodnimy teraz, że istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do $a$. Niech

$$n_1 = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j \in [a_1, b_1]\}.$$

Przypuśćmy, że wybraliśmy już $k$ liczb naturalnych $n_1, n_2, \ldots, n_k$ takich, że

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k \quad x_{n_j} \in [a_j, b_j] \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Ponieważ w przedziale $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ leży nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, więc niech teraz $n_{k+1}$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$x_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}] \quad \text{i} \quad n_{k+1} > n_k.$$

Określiliśmy więc indukcyjnie rosnący ciąg liczb naturalnych $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że

$$x_{n_k} \in [a_k, b_k].$$

Ponieważ $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$, więc

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Na koniec załóżmy, że $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest dowolnym ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego. Jest on ograniczony (patrz zadanie 2.19). Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa wynika, że ma on podciąg zbieżny. Z zadania 2.18 wynika, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, a to już dowodzi, że przestrzeń $\mathsf{R}$ (z naturalną metryką) jest przestrzenią zupełną.

**Rozwiązanie zadania 6.9.**

Tak. Niech $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $\mathsf{R}^n$, gdzie $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$. Ponieważ

$$\left|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}\right| \leqslant \varrho\left(x^{(m)}, x^{(k)}\right) \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n,$$

więc każdy z ciągów $\left(x_i^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ dla $i = 1, \ldots, n$ spełnia warunek Cauchy'ego. Wyrazy tych ciągów należą do przestrzeni $\mathsf{R}$ (zupełnej), więc istnieją ich granice. Niech to będą liczby $x_1, \ldots, x_n$, odpowiednio. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Istnieją indeksy $k_1, \ldots, k_n$ takie, że

$$\left|x_i^{(m)} - x_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \text{ dla } m \geqslant k_i \text{ oraz } i = 1, \ldots, n. \tag{6.1}$$

Dla $m \geqslant k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$ spełnione są wszystkie nierówności (6.1), zatem gdy $x = (x_1, \ldots, x_n)$, to

$$\varrho\left(x^{(m)}, x\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(m)} - x_i\right|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności ciągu $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ do punktu $x$ z przestrzeni $\mathsf{R}^n$. Przestrzeń $\mathsf{R}^n$ jest więc zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.10.**

Nie. Rozważmy ciąg $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb wymiernych z przedziału $[0, 1]$ zbieżny w naturalnej metryce do liczby niewymiernej $x$. Ponieważ $\varrho(q_n, q_m) = |q_n - q_m|$, więc ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego (względem metryki $\varrho$). Oczywiście, ciąg ten nie jest zbieżny do liczby wymiernej, gdyż w tym przypadku metryka $\varrho$ pokrywa się z metryką naturalną. Ciąg ten nie ma też granicy (względem metryki $\varrho$) będącej liczbą niewymierną, gdyż dla każdej liczby niewymiernej $r$ mamy: $\varrho(q_n, r) = |q_n| + |r| > r > 0$.

**Rozwiązanie zadania 6.11.**

Tak. Niech $(x^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $X$, gdzie $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}\right)$.

Ponieważ $\left|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}\right| \leqslant \varrho\left(x^{(m)}, x^{(k)}\right)$ dla $i = 1,2$, więc każdy z dwu ciągów $\left(x_i^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Wyrazy tych ciągów należą do przestrzeni R (zupełnej), więc istnieją granice tych ciągów. Niech to będą liczby $x_1, x_2$, odpowiednio. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Istnieją indeksy $k_1, k_2$ takie, że

$$\left|x_i^{(m)} - x_i\right| < \varepsilon \text{ dla } m \geqslant k_i \text{ oraz } i = 1,2. \tag{6.2}$$

Dla $m \geqslant k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ spełnione są obie nierówności (6.2), zatem gdy $x = (x_1, x_2)$, to

$$\varrho\left(x^{(m)}, x\right) = \max\left\{\left|x_1^{(m)} - x_1\right|, \left|x_2^{(m)} - x_2\right|\right\} < \varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności ciągu $(x^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ do punktu $x$ z przestrzeni $X$. Rozważana przestrzeń jest więc zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.12.**

Tak. Niech $(x^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $X$, gdzie $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}\right)$.

Ponieważ $\left|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}\right| \leqslant \varrho\left(x^{(m)}, x^{(k)}\right)$ dla $i = 1,2$, więc każdy z dwu ciągów $\left(x_i^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$, $i = 1,2$ spełnia warunek Cauchy'ego. Wyrazy tych ciągów należą do przestrzeni R (zupełnej), więc istnieją granice tych ciągów. Niech to będą liczby $x_1, x_2$, odpowiednio. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Istnieją indeksy $k_1, k_2$ takie, że

$$\left|x_i^{(m)} - x_i\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dla } m \geqslant k_i \text{ oraz } i = 1,2. \tag{6.3}$$

Dla $m \geqslant k_0 = \max(k_1, k_2)$ spełnione są obie nierówności (6.3), zatem gdy $x = (x_1, x_2)$, to

$$\varrho\left(x^{(m)}, x\right) = \left|x_1^{(m)} - x_1\right| + \left|x_2^{(m)} - x_2\right| < \varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności ciągu $(x^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ do punktu $x$ z przestrzeni $X$. Rozważana przestrzeń jest więc zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.13.**

Tak. Niech $(x^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $X$, gdzie $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}\right)$. Istnieje $m_0 \in \mathsf{N}$ takie, że

$$\varrho\left(x^{(m)}, x^{(k)}\right) < 1 \text{ dla } k \geqslant m_0 \text{ i } m \geqslant m_0.$$

Dla takich $k$ i $m$ spełnione są nierówności $\left|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}\right| \leqslant \varrho\left(x^{(m)}, x^{(k)}\right)$ dla $i = 1, 2$, więc każdy z dwu ciągów $\left(x_i^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Wyrazy tych ciągów należą do przestrzeni R (zupełnej), więc istnieją granice tych ciągów. Niech to będą liczby $x_1, x_2$, odpowiednio. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Istnieją indeksy $k_1, k_2$ takie, że

$$\left|x_i^{(m)} - x_i\right| < \varepsilon \text{ dla } m \geqslant k_i \text{ oraz } i = 1, 2. \tag{6.4}$$

Dla $m \geqslant k_0 = \max\{k_1, k_2, m_0\}$ spełnione są obie nierówności (6.4). Dla $x = (x_1, x_2)$ mamy:

$$\varrho\left(x^{(m)}, x\right) = \min\left\{1, \max\left(\left|x_1^{(m)} - x_1\right|, \left|x_2^{(m)} - x_2\right|\right)\right\} < \varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności ciągu $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ do punktu $x$ z przestrzeni $X$. Rozważana przestrzeń jest więc zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.14.**

Tak. Niech $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $X$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$.

Załóżmy najpierw, że ciąg $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg stały. Niech to będzie ciąg $\left(x_2^{(n_k)}\right)_{k=1}^{\infty}$. Istnieje wtedy liczba rzeczywista $x_2$ taka, że $x_2^{(n_k)} = x_2$. Wtedy

$$\varrho\left(x^{(n_k)}, x^{(n_l)}\right) = \left|x_1^{(n_k)} - x_1^{(n_l)}\right|,$$

a ta równość dowodzi, że ciąg $\left(x_1^{(n_k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego w przestrzeni liczb rzeczywistych z naturalną metryką. Ponieważ ta przestrzeń jest zupełna (zadanie 6.8), więc istnieje liczba rzeczywista $x_1$ taka, że $x_1^{(n_k)} \longrightarrow x_1$. Razem z równością $x_2^{(n_k)} = x_2$ dowodzi to zbieżności

$$x^{(n_k)} \longrightarrow x,$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$. Z zadania 2.18 wynika, że

$$x^{(n)} \longrightarrow x.$$

Załóżmy więc teraz, że ciąg $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ nie ma żadnego podciągu stałego. Istnieje więc podciąg różnowartościowy. Przyjmijmy, że jest nim podciąg $\left(x_2^{(n_k)}\right)_{k=1}^{\infty}$. Wtedy

$$\varrho\left(x^{(n_m)}, x^{(n_k)}\right) = \left|x_1^{(n_m)}\right| + \left|x_1^{(n_k)}\right| + \left|x_2^{(n_m)} - x_2^{(n_k)}\right|,$$

zatem z warunku Cauchy'ego wynika zbieżność (w przestrzeni R z naturalną metryką) ciągu $\left(\left|x_1^{(n_k)}\right|\right)_{k=1}^{\infty}$ do zera i spełnienie warunku Cauchy'ego dla ciągu $\left(x_2^{(n_k)}\right)_{k=1}^{\infty}$. Jest on zatem zbieżny (w przestrzeni R z naturalną metryką) do pewnego punktu $x_2 \in \mathsf{R}$. W ten sposób udowodniliśmy, że ciąg $(x^{(n_k)})_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x = (0, x_2)$; na mocy zadania 2.18 również ciąg $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$.

W każdym przypadku rozważany ciąg jest zbieżny, zatem rozpatrywana przestrzeń $(X, \varrho)$ jest zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.15.**

Tak. Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego. Ustalmy dowolny punkt $x_0 \in X$. Dla dowolnych liczb naturalnych $n$ i $m$ spełniona jest nierówność

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leqslant \varrho(f_n, f_m).$$

Zatem $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem liczbowym spełniającym warunek Cauchy'ego. Jest on więc zbieżny. Oznaczmy jego granicę symbolem $f(x_0)$. Z dowolności wyboru punktu $x_0$ wynika, że wyznaczona została pewna funkcja $f$ określona na zbiorze $E$ i przyjmująca wartości w zbiorze R. Udowodnimy, że jest ona granicą naszego ciągu funkcyjnego $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z założenia wynika, że istnieje liczba $n_0 \in \mathsf{N}$ taka, że

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n, m \geqslant n_0 \quad \text{i} \quad x \in X.$$

Ponieważ funkcja „moduł" jest ciągła, więc

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0 \quad \text{i} \quad x \in X.$$

Zatem $\varrho(f_n, f) \leqslant \varepsilon$. Dowodzi to, że $f_n \longrightarrow f$, czyli rozważana przestrzeń jest zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.16.**

Tak. Przyjmując za $E$ przedział $[a, b]$ w zadaniu poprzednim, wnioskujemy, że przestrzeń wszystkich funkcji ograniczonych na $[a, b]$ jest zupełna. W myśl zadania 6.3 wystarczy dowieść, że zbiór funkcji ciągłych na $[a, b]$ stanowi domknięty podzbiór przestrzeni $B(E)$. Oczywiście funkcje ciągłe na przedziale domkniętym (i ograniczonym) są ograniczone, więc $X$ jest podprzestrzenią przestrzeni $B([a, b])$. Zbieżność ciągu funkcji w naszej przestrzeni jest zbieżnością jednostajną. Na mocy zadania 4.50 wnioskujemy więc, że rozpatrywana przestrzeń jest domkniętym podzbiorem przestrzeni zupełnej, jest więc też przestrzenią zupełną.

**Rozwiązanie zadania 6.17.**

Każdy ciąg w przestrzeni skończonej zawiera podciąg stały, czyli zbieżny. Zatem każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny, gdyż ma podciąg zbieżny (patrz zadanie 2.18).

**Rozwiązanie zadania 6.18.**

Tak. Każdy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniający warunek Cauchy'ego w tej przestrzeni jest stały od pewnego miejsca. Istotnie, istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\varrho(x_n, x_m) < 1 \quad \text{dla} \quad n, m \geqslant n_0.$$

Zatem $x_n = x_m$ dla $n, m \geqslant n_0$. Ponieważ ciąg stały jest zbieżny, więc rozpatrywany ciąg ma podciąg zbieżny, sam jest zatem zbieżny.

**Rozwiązanie zadania 6.19.**

Tak. Niech $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $X$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$.

Jeśli ten ciąg zawiera podciąg stały, to jest zbieżny (zadanie 2.18).

Załóżmy więc teraz, że rozważany ciąg nie ma podciągu stałego. Istnieje więc pewien różnowartościowy podciąg tego ciągu. Wtedy

$$\varrho\left(x^{(n_m)}, x^{(n_k)}\right) = \left|x_1^{(n_m)}\right| + \left|x_1^{(n_k)}\right| + \left|x_2^{(n_m)} - x_2^{(n_k)}\right|,$$

zatem z warunku Cauchy'ego wynika zbieżność ciągu $\left(\left|x_1^{(n_k)}\right|\right)_{k=1}^{\infty}$ do zera i spełnienie warunku Cauchy'ego dla ciągu $\left(x_2^{(n_k)}\right)_{k=1}^{\infty}$. Ten ostatni ciąg jest więc zbieżny do pewnego punktu $x_2 \in \mathbb{R}$. W ten sposób udowodniliśmy, że ciąg $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x = (0, x_2)$.

W każdym przypadku rozważany ciąg jest zbieżny, zatem rozpatrywana przestrzeń $(X, \varrho)$ jest zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.20.**

Tak. Niech $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}\right)$, będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w rozważanej przestrzeni $X$ z metryką określoną w zadaniu. Ponieważ $\varrho_i\left(x_i^{(m)}, x_i^{(k)}\right) \leqslant \varrho\left(x^{(m)}, x^{(k)}\right)$ dla $i = 1, 2$, więc każdy z dwóch ciągów $\left(x_i^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ dla $i = 1, 2$ spełnia warunek Cauchy'ego. Wyrazy tych ciągów należą do przestrzeni $X_i$, więc istnieją granice tych ciągów. Niech to będą punkty $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Istnieją indeksy $k_1, k_2$ takie, że

$$\varrho_i\left(x_i^{(m)}, x_i\right) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ dla } m \geqslant k_i \text{ oraz } i = 1, 2. \tag{6.5}$$

Dla $m \geqslant k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ spełnione są nierówności (6.5), zatem gdy $x = (x_1, x_2)$, to

$$\varrho\left(x^{(m)}, x\right) = \sqrt{\varrho_1^2\left(x_1^{(m)}, x_1\right) + \varrho_2^2\left(x_2^{(m)}, x_2\right)} <$$

$$\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}}=\varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności ciągu $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ do punktu $x$ z przestrzeni $X$. Przestrzeń $X$ jest więc zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.21.**

Tak. Niech $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(m)}=\left(x_1^{(m)},x_2^{(m)}\right)$, będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w rozważanej przestrzeni $X$ z metryką określoną w zadaniu. Ponieważ $\varrho_i\left(x_i^{(m)},x_i^{(k)}\right)\leqslant\varrho\left(x^{(m)},x^{(k)}\right)$ dla $i=1,2$, więc każdy z dwóch ciągów $\left(x_i^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ dla $i=1,2$ spełnia warunek Cauchy'ego. Wyrazy tych ciągów należą do przestrzeni $X_i$, więc istnieją granice tych ciągów. Niech to będą punkty $x_1\in X_1, x_2\in X_2$. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Istnieją indeksy $k_1,k_2$ takie, że

$$\varrho_i\left(x_i^{(m)},x_i\right)<\varepsilon \text{ dla } m\geqslant k_i \text{ oraz } i=1,2. \tag{6.6}$$

Dla $m\geqslant k_0=\max\{k_1,k_2\}$ spełnione są nierówności (6.6), zatem gdy $x=(x_1,x_2)$, to

$$\varrho\left(x^{(m)},x\right)=\max\left\{\varrho_1\left(x_1^{(m)},x_1\right),\varrho_2\left(x_2^{(m)},x_2\right)\right\}<\varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności ciągu $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ do punktu $x$ z przestrzeni $X$. Przestrzeń $X$ jest więc zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.22.**

Tak. Niech $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(m)}=\left(x_1^{(m)},x_2^{(m)}\right)$, będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w rozważanej przestrzeni $X$ z metryką określoną w zadaniu. Ponieważ $\varrho_i\left(x_i^{(m)},x_i^{(k)}\right)\leqslant\varrho\left(x^{(m)},x^{(k)}\right)$ dla $i=1,2$, więc każdy z ciągów $\left(x_i^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ dla $i=1,2$ spełnia warunek Cauchy'ego. Wyrazy tych ciągów należą do przestrzeni $(X_i,\varrho_i)$, odpowiednio, więc istnieją granice tych ciągów. Niech to będą punkty $x_1\in X_1, x_2\in X_2$. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Istnieją indeksy $k_1,k_2$ takie, że

$$\varrho_i\left(x_i^{(m)},x_i\right)<\frac{\varepsilon}{2} \text{ dla } m\geqslant k_i \text{ oraz } i=1,2. \tag{6.7}$$

Dla $m\geqslant k_0=\max\{k_1,k_2\}$ spełnione są obie nierówności (6.7). Jeżeli $x=(x_1,x_2)$, to

$$\varrho\left(x^{(m)},x\right)=\varrho_1\left(x_1^{(m)},x_1\right)+\varrho_2\left(x_2^{(m)},x_2\right)<\varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności ciągu $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ do punktu $x$ z przestrzeni $X$. Przestrzeń $X$ jest więc zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.23.**

Nie. Rozważmy ciąg $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb wymiernych z przedziału $[0,1]$ zbieżny względem metryki naturalnej do liczby niewymiernej $x$. Ponieważ $\varrho(q_n, q_m) = |q_n - q_m|$, więc ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego (względem metryki $\varrho$). Oczywiście, ciąg ten nie jest zbieżny względem metryki $\varrho$ do liczby wymiernej $a$, gdyż $\varrho(q_n, a) = |q_n - a|$. Ciąg ten nie ma też granicy (względem metryki $\varrho$) będącej liczbą niewymierną, bo dla każdej liczby niewymiernej $r$ mamy: $\varrho(q_n, r) = 2$.

**Rozwiązanie zadania 6.24.**

Nie. Ciąg $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, spełnia warunek Cauchy'ego, ale nie jest zbieżny.

**Rozwiązanie zadania 6.25.**

Tak. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego.

Jeśli ten ciąg jest zbieżny do zera w sensie metryki naturalnej, to jest on zbieżny do zera również i względem metryki $\varrho$. Istotnie, dla dowolnej (ustalonej) liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że $|x_n| < \sqrt{\varepsilon}$ dla $n \geqslant n_0$, zatem

$$\varrho(x_n, 0) = |x_n^2 - 0^2| = x_n^2 < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Jeśli rozważany ciąg ma podciąg zbieżny względem metryki naturalnej do zera, to ten podciąg jest zbieżny do zera względem metryki $\varrho$, dowodzi to, że cały ciąg też jest zbieżny do zera (zadanie 2.18).

Załóżmy teraz, że istnieje liczba $\delta$ taka, że $x_n \geqslant \delta > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z warunku Cauchy'ego wynika, że istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że $\varrho(x_n, x_m) < \delta \cdot \varepsilon$ dla $n, m \geqslant n_0$. Wtedy dla $n, m \geqslant n_0$ mamy:

$$\delta \cdot \varepsilon > \varrho(x_n, x_m) = |x_n^2 - x_m^2| =$$

$$|x_n - x_m| \cdot |x_n + x_m| \geqslant |x_n - x_m| \cdot |x_n| \geqslant \delta \cdot |x_n - x_m|.$$

Wynika stąd, że

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n, m \geqslant n_0.$$

Tak więc ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego względem metryki naturalnej, jest więc zbieżny (w zwykłym sensie) do pewnego punktu $x \in (0, \infty)$. Ciąg ten jest też ograniczony. Niech $\alpha$ będzie taką liczbą, że $0 < \delta \leqslant x_n \leqslant \alpha$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy także $x \leqslant \alpha$.

Pokażemy, że nasz ciąg jest zbieżny do $x$ względem metryki $\varrho$. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ dla $n \geqslant n_0$. Wtedy dla $n \geqslant n_0$ mamy:

$$\varrho(x_n, x) = |x_n^2 - x^2| = |x_n - x| \cdot |x_n + x| \leqslant |x_n - x| \cdot 2\alpha < \varepsilon.$$

W każdym przypadku ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny, zatem rozpatrywana przestrzeń jest zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.26.**

Nie. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x_n = n$, spełnia warunek Cauchy'ego, natomiast nie jest zbieżny, bo dla każdej ustalonej liczby naturalnej $k_0$ mamy

$$\varrho(n, k_0) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{k_0}\right| \geqslant \frac{1}{2k_0} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2k_0.$$

**Rozwiązanie zadania 6.27.**

Tak. Niech $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$, będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego w przestrzeni $l^p$. Wówczas dla dowolnych $k, n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| \leqslant \varrho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right),$$

zatem ciąg liczbowy $\left(x_k^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ przestrzeń liczb rzeczywistych z naturalną metryką jest zupełna, więc dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje granica $x_k$ ciągu $\left(x_k^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$. Niech $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$.

Ustalmy teraz dowolną liczbę naturalną $l$ i liczbę dodatnią $\varepsilon$. Z warunku Cauchy'ego wynika, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\varrho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad m, n \geqslant n_0.$$

Tym bardziej więc

$$\sum_{k=1}^{l}\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p \quad \text{dla} \quad n, m \geqslant n_0.$$

Ustalmy teraz $n$ nie mniejsze niż $n_0$. Z powyższej nierówności i zbieżności $x_k^{(m)} \longrightarrow x_k$ dla każdego $k \in \{1, \ldots, l\}$ wynika

$$\sum_{k=1}^{l}\left|x_k^{(n)} - x_k\right|^p \leqslant \varepsilon^p \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Z dowolności liczby $l$ wynika teraz nierówność

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right|^p \leqslant \varepsilon^p. \tag{6.8}$$

Tak więc dla $n \geqslant n_0$

$$\varrho\left(x^{(n)}, x\right) \leqslant \varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności rozważanego ciągu do punktu $x$.

Symbolem $\Theta$ oznaczmy ciąg zerowy (jest on, oczywiście, elementem przestrzeni $l^p$). Z nierówności trójkąta i (6.8) wynikają dla $n \geqslant n_0$ nierówności:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} = \varrho(x, \Theta) \leqslant \varrho\left(x, x^{(n)}\right) + \varrho\left(x^{(n)}, \Theta\right) =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)} - x_k\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)}\right|^p\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)}\right|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że ciąg $x$ należy do przestrzeni $l^p$. To kończy dowód zupełności rozważanej przestrzeni.

**Rozwiązanie zadania 6.28.**

Tak. Niech $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$, będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego w przestrzeni $l^{\infty}$. Wówczas dla dowolnych $k, n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| \leqslant \varrho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right),$$

zatem ciąg liczbowy $\left(x_k^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ przestrzeń liczb rzeczywistych z naturalną metryką jest zupełna, więc dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje granica $x_k$ ciągu $\left(x_k^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$. Niech $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$.

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z warunku Cauchy'ego wynika, że istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\varrho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad m, n \geqslant n_0.$$

Tym bardziej więc

$$\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n, m \geqslant n_0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ustalmy teraz $n$ nie mniejsze niż $n_0$. Z powyższej nierówności i zbieżności $x_k^{(m)} \longrightarrow x_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ wynika

$$\sup\left\{\left|x_k^{(n)} - x_k\right| : k \in \mathbb{N}\right\} \leqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0. \tag{6.9}$$

Tak więc dla $n \geqslant n_0$

$$\varrho\left(x^{(n)}, x\right) \leqslant \varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności rozważanego ciągu do punktu $x$.

Symbolem $\Theta$ oznaczmy ciąg zerowy (jest on, oczywiście, elementem przestrzeni $l^\infty$). Z nierówności trójkąta i (6.9) wynikają dla $n \geqslant n_0$ nierówności

$$\sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\} = \varrho(x, \Theta) \leqslant \varrho\left(x, x^{(n)}\right) + \varrho\left(x^{(n)}, \Theta\right) =$$

$$\sup\left\{\left|x_k^{(n)} - x_k\right| : k \in \mathbb{N}\right\} + \sup\left\{\left|x_k^{(n)}\right| : k \in \mathbb{N}\right\} \leqslant \varepsilon + \sup\left\{\left|x_k^{(n)}\right| : k \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że ciąg $x$ należy do przestrzeni $l^\infty$. To kończy dowód zupełności rozważanej przestrzeni.

**Rozwiązanie zadania 6.29.**

Tak. Niech $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^\infty$, będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego w przestrzeni $X$. Wówczas dla dowolnych $k, n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| \leqslant 2^k \cdot \varrho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right),$$

zatem ciąg liczbowy $\left(x_k^{(n)}\right)_{n=1}^\infty$ spełnia warunek Cauchy'ego dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ przestrzeń liczb rzeczywistych z naturalną metryką jest zupełna, więc dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje granica $x_k$ ciągu $\left(x_k^{(n)}\right)_{n=1}^\infty$. Niech $x = (x_k)_{k=1}^\infty$.

Ustalmy teraz dowolną liczbę naturalną $l$ i liczbę dodatnią $\varepsilon$. Z warunku Cauchy'ego wynika, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\varrho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad m, n \geqslant n_0.$$

Tym bardziej więc

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|}{2^k} < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n, m \geqslant n_0.$$

Ustalmy teraz $n$ nie mniejsze niż $n_0$. Z powyższej nierówności i zbieżności $x_k^{(m)} \longrightarrow x_k$ dla każdego $k \in \{1, \ldots, l\}$ wynika

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k\right|}{2^k} \leqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Z dowolności liczby $l$ wynika teraz nierówność

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k\right|}{2^k} \leqslant \varepsilon. \tag{6.10}$$

Tak więc dla $n \geqslant n_0$

$$\varrho\left(x^{(n)}, x\right) \leqslant \varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności rozważanego ciągu do punktu $x$.

Symbolem $\Theta$ oznaczmy ciąg zerowy (jest on, oczywiście, elementem przestrzeni $X$). Z nierówności trójkąta i (6.10) wynikają dla $n \geqslant n_0$ nierówności

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{2^k} = \varrho(x, \Theta) \leqslant \varrho\left(x, x^{(n)}\right) + \varrho\left(x^{(n)}, \Theta\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k\right|}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|x_k^{(n)}\right|}{2^k} \leqslant \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|x_k^{(n)}\right|}{2^k} < \infty.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że ciąg $x$ należy do przestrzeni $X$. To kończy dowód zupełności rozważanej przestrzeni.

**Rozwiązanie zadania 6.30.**

Tak. Niech $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$, będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego w przestrzeni $s$. Wówczas dla dowolnych $k, n, m \in \mathsf{N}$ mamy:

$$\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| \leqslant 2^k \cdot \varrho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right),$$

zatem ciąg liczbowy $\left(x_k^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego dla każdego $k \in \mathsf{N}$. Ponieważ przestrzeń liczb rzeczywistych z naturalną metryką jest zupełna, więc dla każdego $k \in \mathsf{N}$ istnieje granica $x_k$ ciągu $\left(x_k^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$. Niech $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$.

Ustalmy teraz dowolną liczbę naturalną $l$ i liczbę dodatnią $\varepsilon$. Z warunku Cauchy'ego wynika, że istnieje $n_0 \in \mathsf{N}$ takie, że

$$\varrho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad m, n \geqslant n_0.$$

Tym bardziej więc

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|}{1 + \left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|} < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n, m \geqslant n_0.$$

Ustalmy teraz $n$ nie mniejsze niż $n_0$. Z powyższej nierówności i zbieżności $x_k^{(m)} \longrightarrow x_k$ dla każdego $k \in \{1, \ldots, l\}$, wynika

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k\right|}{1 + \left|x_k^{(n)} - x_k\right|} \leqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Z dowolności liczby $l$ wynika teraz nierówność

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k\right|}{1 + \left|x_k^{(n)} - x_k\right|} \leqslant \varepsilon. \tag{6.11}$$

Tak więc dla $n \geqslant n_0$

$$\varrho\left(x^{(n)}, x\right) \leqslant \varepsilon.$$

Dowodzi to zbieżności rozważanego ciągu do punktu $x$.

Symbolem $\Theta$ oznaczmy ciąg zerowy (jest on, oczywiście, elementem przestrzeni $X$). Z nierówności trójkąta i (6.11) wynikają dla $n \geqslant n_0$ nierówności

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k|}{1 + |x_k|} = \varrho(x, \Theta) \leqslant \varrho\left(x, x^{(n)}\right) + \varrho\left(x^{(n)}, \Theta\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k\right|}{1 + \left|x_k^{(n)} - x_k\right|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\left|x_k^{(n)}\right|}{1 + \left|x_k^{(n)}\right|} \leqslant \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\left|x_k^{(n)}\right|}{1 + \left|x_k^{(n)}\right|} < \infty.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że ciąg $x$ należy do przestrzeni $s$. To kończy dowód zupełności rozważanej przestrzeni.

**Rozwiązanie zadania 6.31.**

Tak. Niech ciąg $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$, spełnia warunek Cauchy'ego. Dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\varrho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n, m \geqslant n_0.$$

Jeśli $\varepsilon < \frac{1}{k}$, to pierwszych $k$ wyrazów powtarza się we wszystkich ciągach $x^{(n)}$ o numerach większych niż $n_0$. Oznacza to, że każdy ciąg liczbowy $\left(x_k^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest od pewnego miejsca stały i równy $x_k^{(0)}$. Niech $x^{(0)} = \left(x_k^{(0)}\right)_{k=1}^{\infty}$. Nietrudno pokazać, że $x^{(n)} \longrightarrow x^{(0)}$, a to oznacza zupełność rozważanej przestrzeni.

**Rozwiązanie zadania 6.32.**

Łatwo zauważyć, że

$$\varrho^*(x, y) \leqslant \varrho(x, y) \qquad \text{dla} \qquad x, y \in X.$$

Dla $x, y \in X$ takich, że $\varrho(x, y) \leqslant 1$ spełniona jest nierówność $\varrho(x, y) \leqslant 2\varrho^*(x, y)$. Wynika stąd, że ciąg spełnia warunek Cauchy'ego względem metryki $\varrho^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego względem metryki $\varrho$. Z założenia zupełności przestrzeni $(X, \varrho)$ wynika więc zupełność przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

**Rozwiązanie zadania 6.33.**

Łatwo zauważyć, że ciąg spełnia warunek Cauchy'ego względem metryki $\varrho^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego względem metryki $\varrho$.

Z założenia zupełności przestrzeni $(X, \varrho)$ wynika zupełność przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

**Rozwiązanie zadania 6.34.**

Dla $x, y \in X$ takich, że $\varrho(x, y) < 1$ metryki $\varrho$ i $\varrho^*$ pokrywają się. Zatem łatwo zauważamy, że ciąg spełnia warunek Cauchy'ego względem metryki $\varrho^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego względem metryki $\varrho$.

Z założenia zupełności przestrzeni $(X, \varrho)$ wynika zupełność przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

**Rozwiązanie zadania 6.35.**

Tak. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego w przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

Jeśli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg stały, to jest zbieżny (zadanie 2.18).

Jeśli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nie ma podciągu stałego, to istnieje różnowartościowy podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tego ciągu. Wtedy dla dowolnych $k, l \in \mathbb{N}$

$$\varrho^*(x_{n_k}, x_{n_l}) = \varrho(x_{n_k}, x_0) + \varrho(x_0, x_{n_l}).$$

Z warunku Cauchy'ego wynika teraz, że $\varrho(x_n, x_0) \longrightarrow 0$, czyli ciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny do $x_0$ w metryce $\varrho$, więc i w metryce $\varrho^*$, gdyż $\varrho(x, x_0) = \varrho^*(x, x_0)$ dla dowolnego $x \in X$.

Ponieważ ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniający warunek Cauchy'ego ma podciąg zbieżny, więc ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny.

Rozważenie powyższych przypadków dowodzi zupełności przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

**Rozwiązanie zadania 6.36.**

Tak. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

Ponieważ funkcja $f$ jest niemalejąca, więc istnieje granica prawostronna w zerze. W dowodzie rozważymy dwa przypadki.

1. $\lim_{t \to 0^+} f(t) = a > 0$.

   Z monotoniczności funkcji $f$ wynika, że

   $$a \leqslant f(t) \quad \text{dla} \quad t \in (0, \infty).$$

   Ponieważ ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że

   $$\varrho^*(x_n, x_m) < a \quad \text{dla} \quad n, m > n_0.$$

Oznacza to, że

$$f(\varrho(x_n, x_m)) < a \quad \text{dla} \quad n, m > n_0,$$

co na mocy założenia implikuje równość

$$f(\varrho(x_n, x_m)) = 0 \quad \text{dla} \quad n, m > n_0,$$

czyli

$$\varrho(x_n, x_m) = 0 \quad \text{dla} \quad n, m > n_0.$$

Wynika stąd, że ciąg $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ jest stały i jest podciągiem rozważanego ciągu. Stąd na podstawie zadania 2.18 wnioskujemy, że $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

2. $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0$.

   Funkcja $f$ jest w tym przypadku prawostronnie ciągła w zerze i ciąg spełniający warunek Cauchy'ego względem metryki $\varrho^*$ spełnia warunek Cauchy'ego względem metryki $\varrho$, jest więc zbieżny w przestrzeni $(X, \varrho)$, skąd wynika też zbieżność w przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

W każdym przypadku rozważana przestrzeń jest więc zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.37.**

Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}$ z metryką naturalną. Zbiory $[n, \infty)$ są domknięte, niepuste i tworzą ciąg zstępujący. Przekrój tej rodziny jest jednak pusty.

**Rozwiązanie zadania 6.38.**

Z założenia wynika (z twierdzenia Cantora), że istnieje element $x_0 \in X$ taki, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$. Zatem

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \{f(x_0)\}.$$

Oczywiście $x_0 \in F_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc $f(x_0) \in f(F_n)$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wynika stąd, że

$$f(x_0) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n).$$

Wystarczy teraz tylko pokazać, że zbiór $\bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n)$ jest jednoelementowy.

Niech $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n)$. Wtedy $y \in f(F_n)$ dla każdej liczby naturalnej $n$, więc w każdym zbiorze $F_n$ istnieje punkt $x_n \in F_n$ taki, że $y = f(x_n)$. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny. Z warunku $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$ wynika, że $x_n \to x_0$. Z ciągłości funkcji $f$ wnioskujemy, że $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Oznacza to, że $f(x_0) = y$. Dowodzi to, że zbiór $\bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n)$ jest jednoelementowy i jego jedynym elementem jest $f(x_0)$.

**Rozwiązanie zadania 6.39.**

Niech $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem elementów zbioru $T$ takim, że

$$\delta(F_{t_n}) < \frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Niech

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n} F_{t_i}.$$

Ciąg zbiorów $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zstępujący i spełnia założenia twierdzenia Cantora, więc istnieje element $x \in X$ taki, że $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Udowodnimy, że $x \in F_t$ dla każdego $t \in T$. Rozważmy dowolny element $t$ zbioru $T$. Ciąg $(F_t \cap A_n)_{n=1}^{\infty}$ też spełnia założenia twierdzenia Cantora, więc jego przekrój jest niepusty, a ponieważ

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (F_t \cap A_n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\},$$

więc $x \in F_t \cap A_n \subset F_t$. Dowodzi to, że $\bigcap_{t \in T} F_t = \{x\}$, co kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 6.40.**

Rozważmy dowolny zstępujący ciąg $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiorów niepustych i domkniętych, dla którego ciąg średnic jest zbieżny do zera. Ciąg ten spełnia założenia zadania, istnieje więc punkt $x \in X$ taki, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$. Z zadania 6.2 wynika, że przestrzeń $(X, \varrho)$ jest zupełna.

**Rozwiązanie zadania 6.41.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną zupełną. Załóżmy, że $A$ jest pewnym zbiorem $I$ kategorii w przestrzeni $X$. Istnieje więc ciąg $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiorów nigdzie gęstych i taki, że $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Z twierdzenia Baire'a wynika, że $A$ jest zbiorem brzegowym.

Rozważmy przestrzeń liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ z metryką naturalną. Łatwo sprawdzić, że dowolny podzbiór jednoelementowy tej przestrzeni jest nigdzie gęsty. Zbiór $\mathbb{Q}$ jako przeliczalny jest więc zbiorem $I$ kategorii, natomiast nie jest zbiorem brzegowym, gdyż $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

**Rozwiązanie zadania 6.42.**

Przypuśćmy, że pewna przestrzeń metryczna zupełna $(X, \varrho)$ jest w sobie gęsta i przeliczalna. Zatem istnieją elementy $x_n \in X$ takie, że $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$. Ponieważ przestrzeń $X$ jest w sobie gęsta, więc każdy ze zbiorów $\{x_n\}$ jest nigdzie gęsty. Zbiór $X$ jest zatem $I$ kategorii, co jest sprzeczne z twierdzeniem Baire'a.

**Rozwiązanie zadania 6.43.**

Zbiór doskonały jest domknięty, więc, jako podzbiór przestrzeni zupełnej, też stanowi przestrzeń zupełną. Jest to także zbiór w sobie gęsty, więc na mocy zadania poprzedniego jest nieprzeliczalny.

**Rozwiązanie zadania 6.44.**

Każdy zbiór jednoelementowy w przestrzeni $\mathsf{R}$ z naturalną metryką jest domknięty, więc $\mathsf{Q}$ jest przeliczalną sumą swoich podzbiorów jednoelementowych. Jest to zatem zbiór typu $F_\sigma$.

Dowodzi to jednocześnie (ze wzorów de Morgana), że zbiór liczb niewymiernych jest typu $G_\delta$.

Przypuśćmy, że zbiór $\mathsf{R}\setminus\mathsf{Q}$ jest zbiorem typu $F_\sigma$. Istnieje więc ciąg $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiorów domkniętych taki, że $\mathsf{R}\setminus\mathsf{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Ponieważ zbiór $\mathsf{R}\setminus\mathsf{Q}$ jest brzegowy, więc każdy ze zbiorów $F_n$ też jest brzegowy, zatem nigdzie gęsty. W ten sposób okazuje się, że $\mathsf{R}\setminus\mathsf{Q}$ jest zbiorem $I$ kategorii, więc zbiór $\mathsf{R}$ jako suma dwóch zbiorów $I$ kategorii jest zbiorem $I$ kategorii. To jednak jest niemożliwe, gdyż $\mathsf{R}$ jest przestrzenią zupełną. Sprzeczność dowodzi, że zbiór liczb niewymiernych nie jest typu $F_\sigma$.

Zarazem (na mocy wzorów de Morgana) dowodzi to, że zbiór liczb wymiernych nie jest zbiorem typu $G_\delta$.

**Rozwiązanie zadania 6.45.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie pewną przestrzenią metryczną zupełną i $A$ jej niepustym podzbiorem otwartym. Gdyby $A$ był zbiorem $I$ kategorii, to byłby zbiorem brzegowym (na mocy zadania 6.41). Zatem $\operatorname{Int}(A) = \emptyset$, co jest niemożliwe. Zbiór $A$ jest więc zbiorem $II$ kategorii.

**Rozwiązanie zadania 6.46.**

Na mocy zadania 3.30 wiemy, że każdy ze zbiorów

$$A_n \cap \overline{X \setminus \overline{A_n}} \quad \text{dla} \quad n \in \mathsf{N}$$

jest nigdzie gęsty. Tak więc zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cap \overline{X \setminus \overline{A_n}}\right)$ jest $I$ kategorii, co w przestrzeni zupełnej dowodzi, że jest on brzegowy. Zatem zbiór $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cap \overline{X \setminus \overline{A_n}}\right)$ jest gęsty w przestrzeni $X$, a to kończy dowód żądanej równości.

**Rozwiązanie zadania 6.47.**

Udowodnimy najpierw, że funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego.

Niech więc funkcja $f$ będzie jednostajnie ciągła i $\varepsilon$ niech będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\rho\left(f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{1}{m}\right)\right) < \varepsilon$$

dla dowolnych $n, m \in \mathrm{N}$, dla których spełniona jest nierówność

$$\varrho\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \delta.$$

Jeśli $n_0 \in \mathrm{N}$ spełnia nierówność $\frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{2}$, czyli $n_0 > \frac{2}{\delta}$, to dla $n, m \geqslant n_0$ mamy $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \delta$, więc

$$\rho\left(f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{1}{m}\right)\right) < \varepsilon,$$

co dowodzi warunku Cauchy'ego.

Załóżmy teraz, że dla funkcji $f : X \longrightarrow Y$ ciąg $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje liczba naturalna $n_0$ taka, że

$$\rho\left(f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{1}{m}\right)\right) < \varepsilon \quad \text{gdy} \quad n, m \geqslant n_0.$$

Niech teraz $\delta = \frac{1}{n_0(n_0+1)}$. Jeśli $n \neq m$ i

$$\varrho\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \delta,$$

to $n \geqslant n_0$ i $m \geqslant n_0$. Zatem spełniona jest nierówność

$$\rho\left(f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{1}{m}\right)\right) < \varepsilon,$$

co dowodzi jednostajnej ciągłości funkcji $f$.

Załóżmy teraz, że przestrzeń $Y$ jest zupełna. Jeśli $f : X \longrightarrow Y$ jest jednostajnie ciągła, to ciąg $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Z założenia zupełności przestrzeni $Y$ wynika, że istnieje granica powyższego ciągu. Niech to będzie $y_0 \in Y$. Tak więc funkcja $g : X_0 \longrightarrow Y$ określona następująco

$$g(x) = \begin{cases} y_0, & \text{gdy} \quad x = 0, \\ f(x), & \text{gdy} \quad x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

jest ciągłym rozszerzeniem funkcji $f$.

Załóżmy teraz, że każda funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jednostajnie ciągła na przestrzeni $X$ ma ciągłe rozszerzenie na przestrzeń $X_0$. Niech $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego w przestrzeni $Y$. Określmy funkcję $f : X \longrightarrow Y$

następująco: $f\left(\frac{1}{n}\right) = y_n$. Ponieważ $X$ jest przestrzenią dyskretną, więc funkcja $f$ jest jednostajnie ciągła. Istnieje więc ciągłe rozszerzenie $g$ funkcji $f$ na zbiór $X_0$. Ponieważ $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, więc z ciągłości funkcji wynika, że istnieje punkt $y_0 \in Y$ taki, że $y_n \longrightarrow y_0$. Istnienie granicy ciągu $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dowodzi zupełności przestrzeni $Y$.

**Rozwiązanie zadania 6.48.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną zupełną. Załóżmy, że $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zbiorów otwartych i gęstych w przestrzeni $X$. Zbiory $F_n$ określone równością $F_n = X \setminus G_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ są domknięte i brzegowe. Wnioskujemy stąd, że $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ jest zbiorem brzegowym (patrz zadanie 6.5). Tak więc zbiór

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

jest zbiorem gęstym.

**Rozwiązanie zadania 6.49.**

Przestrzeń $l^p$ dla każdego $p \geqslant 1$ jest zupełna (zadanie 6.27), nie jest dyskretna i ciąg $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$, przy czym

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad k = n, \\ 0, & \text{gdy} \quad k \neq n \end{cases}$$

jest ograniczony. Nie ma on podciągu zbieżnego, gdyż dla każdych różnych $n, m \in \mathbb{N}$ mamy

$$\varrho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) = 2^{1/p}.$$

**Rozwiązanie zadania 6.50.**

Jeśli przestrzeń $X$ jest zupełna, to sama spełnia warunki przestrzeni $Y$ z funkcją tożsamościową jako szukanym homeomorfizmem.

Załóżmy teraz, że przestrzeń $X$ nie jest zupełna. Niech $X_0$ będzie zbiorem wszystkich ciągów spełniających warunek Cauchy'ego w przestrzeni $X$. Określmy teraz relację w zbiorze $X_0$ w sposób następujący. Dla $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ i $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ niech

$$(x \sim y) \iff \lim_{k \to \infty} \varrho(x_k, y_k) = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze $X_0$. Przez $Y$ oznaczmy zbiór wszystkich klas abstrakcji tej relacji. Elementy tego zbioru oznaczamy, jak zwykle, $[x]$, gdzie $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$. Funkcję $\rho : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ określamy w sposób następujący:

$$\rho([x], [y]) = \lim_{k \to \infty} \varrho(x_k, y_k) \qquad \text{dla} \qquad x = (x_k)_{k=1}^{\infty}, y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in Y.$$

Udowodnimy teraz, że funkcja $\rho$ jest dobrze określona, tzn. nie zależy od wyboru reprezentantów z odpowiednich klas abstrakcji i odpowiednia granica istnieje. Z nierówności trójkąta wynikają nierówności:

$$\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x_m, y_m) \leqslant \varrho(x_n, x_m) + \varrho(y_m, y_n),$$

$$\varrho(x_m, y_m) - \varrho(x_n, y_n) \leqslant \varrho(x_n, x_m) + \varrho(y_m, y_n),$$

co dowodzi, że

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x_m, y_m)| \leqslant \varrho(x_n, x_m) + \varrho(y_m, y_n).$$

Ponieważ ciągi $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ i $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ spełniają warunek Cauchy'ego, więc dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieją liczby naturalne $k_1$ i $k_2$ takie, że

$$\varrho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad n, m \geqslant k_1$$

oraz

$$\varrho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad n, m \geqslant k_2.$$

Tak więc

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x_m, y_m)| \leqslant \varrho(x_n, x_m) + \varrho(y_m, y_n) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n, m \geqslant \max\{k_1, k_2\}.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że ciąg $(\varrho(x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego, jest więc zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej. Granica określająca funkcję $\rho$ istnieje.

Pokażemy teraz, że ta granica nie zależy od wyboru reprezentantów. Wybierzmy ze zbioru $X_0$ ciągi:

$$x = (x_k)_{k=1}^{\infty}, y = (y_k)_{k=1}^{\infty}, x' = (x'_k)_{k=1}^{\infty}, y' = (y'_k)_{k=1}^{\infty}$$

takie, że $x \sim x'$ i $y \sim y'$. Wtedy

$$\lim_{k \to \infty} \varrho(x_k, x'_k) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{k \to \infty} \varrho(y_k, y'_k) = 0.$$

Podobnie, jak poprzednio, z nierówności trójkąta wnioskujemy, że

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x'_n, y'_n)| \leqslant \varrho(x_n, x'_n) + \varrho(y_n, y'_n),$$

skąd wynika, że

$$\lim_{n \to \infty} |\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x'_n, y'_n)| = 0.$$

W ten sposób udowodniliśmy, że funkcja $\rho$ nie zależy od wyboru reprezentantów z poszczególnych klas abstrakcji.

Pokażemy teraz, że jest ona metryką w zbiorze $Y$.

Z określenia wynika bezpośrednio, że funkcja $\rho$ jest nieujemna.

Niech dane będą ciągi

$$x = (x_k)_{k=1}^{\infty}, y = (y_k)_{k=1}^{\infty}, z = (z_k)_{k=1}^{\infty}$$

ze zbioru $X_0$.

Ad (M1). Jeśli $[x] = [y]$, to $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = 0$, czyli $\rho(x, y) = 0$.

Jeśli $[x] \neq [y]$, to $x \not\sim y$ i $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) \neq 0$, czyli $\rho(x, y) \neq 0$.

Ad (M2). Symetria funkcji $\rho$ jest łatwo widoczna.

Ad (M3). Ponieważ $\varrho(x_n, y_n) \leqslant \varrho(x_n, z_n) + \varrho(z_n, y_n)$ dla każdego $n \in \mathsf{N}$, więc

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} \varrho(z_n, y_n).$$

Dowodzi to warunku trójkąta. Funkcja $\rho$ jest więc metryką w zbiorze $Y$.

Niech $Y_1$ oznacza zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji $\sim$ utworzonych przez ciągi stałe. Dla każdego elementu $x$ zbioru $X$ określmy ciąg $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, gdzie $x_k = x$ dla wszystkich $k \in \mathsf{N}$. Funkcję $\phi : X \longrightarrow Y_1$ określamy teraz następująco: $\phi(x) = [x]$. Oczywiste jest teraz, że

$$\rho(\phi(x), \phi(y)) = \rho([x], [y]) = \varrho(x, y)$$

gdy $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, gdzie $x_k = x$ dla każdego $k \in \mathsf{N}$ i $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$, gdzie $y_k = y$ dla każdego $k \in \mathsf{N}$.

Rozważana funkcja jest, oczywiście, wzajemnie jednoznaczna i ciągła oraz funkcja odwrotna do niej też jest ciągła. (Funkcję spełniającą powyżej udowodnioną równość nazywamy *izometrią*.)

Udowodnimy teraz, że zbiór $Y_1$ jest gęsty w przestrzeni $Y$.

Niech $[x]$, gdzie $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, będzie dowolnym elementem przestrzeni $Y$. Rozważmy teraz ciąg $\left([y^{(n)}]\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $y^{(n)} = (x_n, x_n, \ldots)$. Pokażemy, że ten ciąg jest zbieżny do punktu $[x]$. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc istnieje liczba naturalna $n_0$ taka, że

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad m, n > n_0.$$

Stąd dla $m \geqslant n_0$

$$\rho([(x_m, x_m, \ldots)], [(x_n)_{n=1}^{\infty}]) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Tak więc ciąg $\left([y^{(n)}]\right)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$. Dowodzi to gęstości zbioru $Y_1$ w przestrzeni $Y$.

Na koniec udowodnimy, że przestrzeń $Y$ jest zupełna. Niech $\left(\left[\left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}\right]\right)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem w tej przestrzeni spełniającym warunek Cauchy'ego. Dla każdego elementu tego ciągu, niech element $[(x'_n, x'_n, \ldots)] \in Y_1$ będzie dobrany w taki sposób, że

$$\rho\left([(x'_n, x'_n, \ldots)], \left[\left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}\right]\right) < \frac{1}{n}.$$

Udowodnimy, że ciąg $(x'_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Spełnione są zależności:

$$\varrho(x'_n, x'_m) = \rho([(x'_n, x'_n, \ldots)], [(x'_m, x'_m, \ldots)]) \leqslant$$
$$\rho\left([(x'_n, x'_n, \ldots)], \left[\left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}\right]\right) + \rho\left(\left[\left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}\right], \left[\left(x_k^{(m)}\right)_{k=1}^{\infty}\right]\right) +$$
$$\rho\left(\left[\left(x_k^{(m)}\right)_{k=1}^{\infty}\right], [(x'_m, x'_m, \ldots)]\right).$$

Z warunku Cauchy'ego dla ciągu $\left(\left[\left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}\right]\right)_{n=1}^{\infty}$ wynika, że istnieje liczba naturalna $n_0$ taka, że

$$\rho\left(\left[\left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}\right], \left[\left(x_k^{(m)}\right)_{k=1}^{\infty}\right]\right) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla} \quad m, n \geqslant n_0.$$

Zatem dla $m, n \geqslant \max\left\{n_0, \frac{3}{\varepsilon}\right\}$ wnioskujemy z powyżej napisanej nierówności, że

$$\varrho(x'_n, x'_m) < \varepsilon,$$

a to dowodzi warunku Cauchy'ego dla ciągu $(x'_n)_{n=1}^{\infty}$.

Rozważmy teraz klasę abstrakcji tego ciągu, t. j. $[(x'_n)_{n=1}^{\infty}]$. Udowodnimy, że jest ona granicą rozważanego ciągu $\left(\left[\left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}\right]\right)_{n=1}^{\infty}$. Istotnie,

$$\rho\left([(x'_l)_{l=1}^{\infty}], \left[\left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}\right]\right) \leqslant$$
$$\rho\left([(x'_l)_{l=1}^{\infty}], [(x'_n, x'_n, \ldots)]\right) + \rho\left([(x'_n, x'_n, \ldots)], \left[\left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}\right]\right) \leqslant$$
$$\lim_{l \to \infty} \varrho(x'_l, x'_n) + \frac{1}{n},$$

zatem

$$\lim_{n \to \infty} \rho\left([(x'_k)_{k=1}^{\infty}], \left[\left(x_l^{(n)}\right)_{l=1}^{\infty}\right]\right) = 0.$$

Wynika stąd, że przestrzeń $Y$ jest zupełna, a to kończy rozwiązanie zadania.

Gdy nie żądamy, aby homeomorficzny obraz przestrzeni $X$ był gęsty w przestrzeni zupełnej, to istnieje krótszy sposób rozwiązania zadania. Załóżmy najpierw, że przestrzeń $X$ jest ograniczona. Z zadania 6.16 wiemy, że przestrzeń $B(X)$ rzeczywistych funkcji ograniczonych na przestrzeni $X$ z metryką daną wzorem

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

jest zupełna.

Dla każdego $x_0 \in X$ określamy funkcję $f_{x_0}$ następująco: $f_{x_0}(x) = \varrho(x, x_0)$ dla $x \in X$. Z ograniczoności przestrzeni wynika, że każda z tak określonych funkcji jest ograniczona. Funkcja $\phi : X \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ określona jako

$$\phi(x) = f_x \quad \text{dla} \quad x \in X$$

jest żądanym homeomorfizmem. Rzeczywiście, dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ mamy

$$\rho(f_{x_1}, f_{x_2}) \geqslant |f_{x_1}(x_2) - f_{x_2}(x_2)| = \varrho(x_1, x_2)$$

oraz

$$\rho(f_{x_1}, f_{x_2}) = \sup\{|\varrho(x, x_1) - \varrho(x, x_2)| : x \in X\} \leqslant$$
$$\sup\{|\varrho(x_1, x_2)| : x \in X\} = \varrho(x_1, x_2).$$

Wynika stąd równość

$$\rho(f_{x_1}, f_{x_2}) = \varrho(x_1, x_2)$$

dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$. Funkcja $\phi$ jest więc homeomorfizmem (nawet izometrią) przestrzeni $X$ na $\phi(X)$.

# Rozdział 7

# Przestrzenie zwarte

**Rozwiązanie zadania 7.1.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną zwartą i $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego. Istnieje więc podciąg zbieżny tego ciągu, zatem na mocy zadania 2.18 wnioskujemy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny. Przestrzeń $X$ jest więc zupełna.

**Rozwiązanie zadania 7.2.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną zwartą i $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ciągiem zstępującym niepustych zbiorów domkniętych w tej przestrzeni. Dla każdej liczby naturalnej $n$ niech $x_n$ będzie dowolnym punktem zbioru $F_n$. Istnieje więc podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x_0$.

Ustalmy teraz pewną dowolną liczbę naturalną $m$. Ciąg $(x_{n_k})_{k=m}^{\infty}$ jest podciągiem ciągu $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, jest więc też zbieżny do punktu $x_0$. Ponadto $x_{n_k} \in F_m$ dla każdego $k \geqslant m$. Zatem $x_0 \in \overline{F_m} = F_m$. Z dowolności wyboru liczby $m$ wynika, że

$$x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m.$$

To kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 7.3.**

Przypuśćmy, że przeciwnie, dla pewnej liczby dodatniej $r$ i każdego skończonego układu punktów $x_1, \ldots, x_n$ przestrzeni $X$

$$\bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, r) \neq X. \tag{7.1}$$

Ustalmy dowolny punkt $x_1 \in X$. Na mocy (7.1) istnieje punkt $x_2 \in X$ taki, że $x_2 \in X \setminus K(x_1, r)$, czyli $\varrho(x_1, x_2) \geqslant r$. Na mocy (7.1) wnioskujemy znów, że istnieje punkt $x_3 \in X$ taki, że $x_3 \in X \setminus (K(x_1, r) \cup K(x_2, r))$, czyli $\varrho(x_3, x_1) \geqslant r$ i $\varrho(x_3, x_2) \geqslant r$. Postępując tak dalej otrzymujemy nieskończony ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów przestrzeni $X$ spełniający warunek

$$\varrho(x_k, x_l) \geqslant r \quad \text{dla wszystkich} \quad k, l \in \mathbb{N}, \;\; k \neq l. \tag{7.2}$$

Ciąg ten nie ma żadnego podciągu zbieżnego, bo na mocy (7.2) żaden jego podciąg nie spełnia warunku Cauchy'ego. Sprzeczność z założeniem.

Z poprzedniej części zadania wynika, że dla przestrzeni zwartej $X$ istnieje skończony układ punktów $x_1, \dots, x_n \in X$ taki, że $X = \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, 1)$. Zatem

$$\delta(X) \leqslant \max\{\varrho(x_i, x_j) : i, j = 1, \dots, n\} + 2 < \infty.$$

**Rozwiązanie zadania 7.4.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną zwartą. Na mocy zadania poprzedniego wynika, że dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieje skończony zbiór punktów $\left\{x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\right\}$ taki, że

$$X = \bigcup_{i=1}^{k_n} K\left(x_i^{(n)}, \frac{1}{n}\right) \tag{7.3}$$

Zbiór

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} \left\{x_i^{(n)}\right\}$$

jest przeliczalny. Pokażemy, że jest gęsty w przestrzeni $X$. Niech $x$ będzie dowolnym punktem przestrzeni $X$ i $\varepsilon$ dowolną liczbą dodatnią. Istnieje liczba naturalna $n$ taka, że $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Z równości 7.3 wynika, że istnieje punkt $x_i^n \in A$ taki, że

$$x \in K\left(x_i^{(n)}, \frac{1}{n}\right),$$

czyli $\varrho\left(x, x_i^{(n)}\right) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, co na mocy zadania 2.23 dowodzi, że $\overline{A} = X$.

**Rozwiązanie zadania 7.5.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną zwartą i $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – dowolnym przeliczalnym pokryciem otwartym tej przestrzeni. Załóżmy, że wśród tych zbiorów nie występuje $X$, w przeciwnym przypadku on sam stanowiłby podpokrycie skończone. Określmy teraz zbiory

$$F_n = X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} V_k.$$

Są one domknięte i stanowią ciąg zstępujący. Jeśli dla każdego $n$ naturalnego $F_n \neq \emptyset$, to, na mocy twierdzenia Cantora, istnieje punkt $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, co jest niemożliwe, gdyż

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} V_k \right) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \emptyset .$$

Ponieważ ciąg $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zstępujący, więc dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest równość $F_n = \emptyset$, zatem

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} V_k = F_n = \emptyset ,$$

czyli $X = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$. Dowodzi to istnienia skończonego podpokrycia pokrycia $\mathcal{V}$.

**Rozwiązanie zadania 7.6.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną zwartą i $\mathcal{V}$ – dowolnym pokryciem otwartym tej przestrzeni. Ponieważ $X$ jest przestrzenią ośrodkową, więc, na mocy twierdzenia Lindelöfa (zadanie 5.3), wnioskujemy, że istnieje podpokrycie przeliczalne. Na podstawie twierdzenia Borela (zadanie 7.5) wnioskujemy dalej, że istnieje podpokrycie skończone, a to jest też podpokryciem pokrycia $\mathcal{V}$, co kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 7.7.**

Przypuśćmy, że dla pewnej przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ z każdego otwartego pokrycia można wybrać podpokrycie skończone, ale przestrzeń nie jest zwarta. Istnieje więc ciąg $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów przestrzeni $X$, który nie ma żadnego punktu skupienia. Dla każdego punktu $x \in X$ istnieją liczba rzeczywista $r_x$ i liczba naturalna $n_x$ takie, że

$$\varrho(x, p_n) \geqslant r_x \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_x . \tag{7.4}$$

Rodzina kul $\{K(x, r_x) : x \in X\}$ stanowi pokrycie przestrzeni $X$, więc istnieje podpokrycie skończone, czyli istnieje zbiór $\{x_1, \ldots, x_n\}$ taki, że

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} K(x_k, r_{x_k}) .$$

W pewnej kuli $K(x_k, r_{x_k})$ znajduje się nieskończenie wiele punktów ciągu $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, co, w myśl (7.4), jest niemożliwe. Przestrzeń $X$ jest więc zwarta.

**Rozwiązanie zadania 7.8.**

Przypuśćmy, że dla pewnej przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych ma niepusty przekrój, ale przestrzeń nie jest zwarta. Istnieje więc ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów przestrzeni $X$, który nie ma żadnego punktu skupienia. Zbiory

$$F_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

są domknięte i niepuste oraz stanowią ciąg zstępujący. Istnieje więc element $x \in X$ taki, że $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Oznacza to, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $k_n \in \mathbb{N}$ taka, że $x = x_{k_n}$. Można przy tym przyjąć, że $k_{n+1} > k_n$. W ten sposób podciąg $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ ciagu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest stały, więc zbieżny. Sprzeczność kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 7.9.**

Niech $F$ będzie dowolnym zbiorem domkniętym w pewnej przestrzeni metrycznej zwartej $(X, \varrho)$. Wybierzmy dowolny ciąg w zbiorze $F$. Ze zwartości przestrzeni $X$ wynika, że istnieje podciąg zbieżny do pewnego punktu $x \in X$. Wtedy $x \in \overline{F} = F$, co dowodzi zwartości podprzestrzeni $F$.

**Rozwiązanie zadania 7.10.**

Niech $F$ będzie dowolną podprzestrzenią zwartą przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$. Jeśli $x \in \overline{F}$, to istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $x_n \in F$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $x_n \to x$. Z założenia zwartości podprzestrzeni $F$ wynika, że istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu ze zbioru $F$. Punktem tym może być tylko $x$. Dowodzi to domkniętości zbioru $F$ w przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 7.11.**

Rodzina $\{K(x, 1) : x \in X\}$ jest pokryciem przestrzeni $X$, więc istnieje skończone podpokrycie, tzn. istnieje układ punktów $x_1, \ldots, x_n$ z przestrzeni $X$ taki, że

$$\bigcup_{k=1}^{n} K(x_k, 1) = X.$$

Stąd wynika, że

$$\delta(X) \leqslant \max\{\varrho(x_i, x_j) : i, j \in \{1, \ldots, n\}\} + 2 < \infty.$$

**Rozwiązanie zadania 7.12.**

Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie funkcją ciągłą przekształcającą przestrzeń metryczną zwartą $(X, \varrho)$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Niech teraz $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem w podprzestrzeni $f(X)$. Istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$y_n = f(x_n) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ze zwartości przestrzeni $X$ wynika, że istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x \in X$. Z ciągłości funkcji $f$ wnioskujemy, że $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Wynika stąd, że podciąg $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $f(x) \in f(X)$. Zatem zbiór $f(X)$ jest zwarty.

Istnieje wiele innych sposobów dowodzenia tej własności, ze względu na ogólność i przydatność następującego dowodu w topologii ogólnej przytaczamy go tu jako drugą możliwość.

Niech dla uproszczenia rozważań obrazem przestrzeni $X$ będzie cała przestrzeń $Y$. Rozważmy dowolne pokrycie otwarte $\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$ przestrzeni $(Y, \rho)$. Rodzina $\mathcal{U} = \{f^{-1}(V_s) : s \in S\}$ jest otwartym pokryciem przestrzeni $X$. Istnieje więc podpokrycie skończone pokrycia $\mathcal{U}$, czyli istnieje skończony układ wskaźników $s_1, \ldots, s_n$ w zbiorze $S$ taki, że $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{s_i})$. Wtedy

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{s_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f\left(f^{-1}(V_{s_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{n} V_{s_i},$$

gdyż funkcja $f$ jest surjekcją. W ten sposób udowodniliśmy, że rodzina $\{V_{s_1}, \ldots, V_{s_n}\}$ jest skończonym podpokryciem pokrycia $\mathcal{V}$. Dowodzi to zwartości przestrzeni $Y$.

**Rozwiązanie zadania 7.13.**

Niech $f : X \longrightarrow \mathsf{R}$ będzie funkcją ciągłą przekształcającą przestrzeń metryczną zwartą $(X, \varrho)$ w przestrzeń liczb rzeczywistych. Rodzina $\mathcal{V} = \{(-n, n) : n \in \mathsf{N}\}$ stanowi pokrycie otwarte przestrzeni $\mathsf{R}$. Zatem rodzina

$$\mathcal{U} = \left\{f^{-1}((-n, n)) : n \in \mathsf{N}\right\}$$

jest otwartym pokryciem przestrzeni $X$. Istnieje podpokrycie skończone pokrycia $\mathcal{U}$, czyli istnieje skończony układ wskaźników $k_1, \ldots, k_n \in \mathsf{N}$ taki, że $k_1 < k_2 \ldots < k_n$ i

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}((-k_i, k_i)).$$

Wtedy

$$f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}((-k_i, k_i))\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f\left(f^{-1}((-k_i, k_i))\right) \subset$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} (-k_i, k_i) = (-k_n, k_n),$$

a z tego faktu wnioskujemy, że zbiór $f(X)$ ma średnicę nie większą niż $2k_n$. Wynika stąd ograniczoność funkcji $f$.

**Rozwiązanie zadania 7.14.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną zwartą i $(Y, \rho)$ dowolną przestrzenią metryczną. Przypuśćmy, że funkcja ciągła $f : X \longrightarrow Y$ nie jest jednostajnie ciągła. Istnieje więc dodatnia liczba $\varepsilon$ taka, że dla każdej liczby dodatniej $\delta$ istnieją punkty $x, u \in X$, dla których

$$\varrho(x, u) < \delta \quad \text{i} \quad \rho(f(x), f(u)) \geqslant \varepsilon.$$

W szczególności dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieją punkty $x_n, u_n \in X$ takie, że

$$\varrho(x_n, u_n) < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \rho(f(x_n), f(u_n)) \geqslant \varepsilon. \tag{7.5}$$

Z ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ wybieramy podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x \in X$. Z ciągu $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ wybieramy teraz podciąg $\left(u_{n_{k_l}}\right)_{l=1}^{\infty}$ zbieżny w przestrzeni $X$. Z uwagi na (7.5) wnioskujemy, że oba podciągi $\left(x_{n_{k_l}}\right)_{l=1}^{\infty}$ i $\left(u_{n_{k_l}}\right)_{l=1}^{\infty}$ są zbieżne do punktu $x$. Z ciągłości funkcji $f$ wynika, że

$$f(x_{n_{k_l}}) \to f(x) \quad \text{i} \quad f(u_{n_{k_l}}) \to f(x),$$

co jest sprzeczne z (7.5). To kończy dowód jednostajnej ciągłości funkcji $f$.

**Rozwiązanie zadania 7.15.**

Nie. Ciąg rosnący liczb naturalnych nie posiada żadnego podciągu zbieżnego.

Każdy zbiór domknięty i ograniczony jest podprzestrzenią zwartą, gdyż znane z kursu analizy matematycznej twierdzenie mówi o istnieniu podciągu zbieżnego dla każdego ciągu ograniczonego. Dowód tego faktu znajduje się też w rozwiązaniu zadania (6.8).

Każdy zwarty podzbiór przestrzeni musi być domknięty (zadanie 7.10). Jeśli jakiś zbiór w przestrzeni R jest nieograniczony np. z góry, to istnieje rosnący ciąg liczb z tego zbioru rozbieżny do nieskończoności. Z tego ciągu nie można wybrać żadnego podciągu zbieżnego.

Zbiór zwarty musi być zatem domknięty i ograniczony.

**Rozwiązanie zadania 7.16.**

Nie. Przestrzeń ta nie jest ośrodkowa (patrz zadanie 5.20), więc nie jest też zwarta.

**Rozwiązanie zadania 7.17.**

Nie. Ciąg $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ dany wzorami:

$$x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right), \quad \text{gdzie} \quad x_i^{(m)} = m \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n$$

nie ma podciągu zbieżnego.

Jeśli jakiś zbiór w przestrzeni $\mathrm{R}^n$ jest zwarty, to musi być ograniczony (zadanie 7.3) i domknięty (zadanie 7.10).

Jeśli zbiór w $\mathrm{R}^n$ jest domknięty i ograniczony, to z każdego ciągu $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$, poprzez $m$-krotne wybranie podciągów zbieżnych ze zwykłych ciągów liczbowych można utworzyć podciąg zbieżny. Jego granica, z uwagi na domkniętość tego zbioru, do niego należy. To dowodzi zwartości takiego zbioru.

**Rozwiązanie zadania 7.18.**

Nie. Jest to przestrzeń nieograniczona.

Ze względu na zadanie 2.88, ciąg $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}\right)$, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z ciągów $\left(x_1^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$, $\left(x_2^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ jest zbieżny.

Podobnie, jak w przypadku przestrzeni euklidesowej $\mathsf{R}^n$ w poprzednim zadaniu, dowodzi się, że podzbiór rozważanej przestrzeni jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

**Rozwiązanie zadania 7.19.**

Nie. Jest to przestrzeń nieograniczona.

Ze względu na zadanie 2.87, ciąg $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}\right)$, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z ciągów $\left(x_1^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$, $\left(x_2^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ jest zbieżny.

Podobnie, jak w przypadku przestrzeni euklidesowej $\mathsf{R}^n$ (zadanie 7.17), dowodzi się faktu, że podzbiór rozważanej przestrzeni jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

**Rozwiązanie zadania 7.20.**

Nie. Ciąg $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ dany wzorami $x^{(m)} = (2m, 0)$ nie ma podciągu zbieżnego, gdyż

$$\varrho\left(x^{(m)}, x^{(k)}\right) = 1 \quad \text{dla} \quad k \neq m,$$

co dowodzi, że żaden podciąg tego ciągu nie spełnia warunku Cauchy'ego, nie może być zbieżny.

Podobnie, jak w przypadku przestrzeni euklidesowej $\mathsf{R}^n$ (zadanie 7.17), dowodzi się faktu, że podzbiór rozważanej przestrzeni jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i jego średnica jest mniejsza niż 1.

**Rozwiązanie zadania 7.21.**

Nie. Przestrzeń ta nie jest ośrodkowa, więc nie jest zwarta.

**Rozwiązanie zadania 7.22.**

Nie. Przestrzeń ta nie jest ograniczona, co dowodzi, że nie może być zwarta (zadanie 7.11).

**Rozwiązanie zadania 7.23.**

Nie. Przestrzeń ta nie jest ograniczona, co dowodzi, że nie może być zwarta (zadanie 7.11).

**Rozwiązanie zadania 7.24.**

Ciąg spełniający warunki zadania nie ma żadnego podciągu spełniającego warunek Cauchy'ego, nie ma więc tym bardziej żadnego podciągu zbieżnego.

**Rozwiązanie zadania 7.25.**

Rodzina wszystkich podzbiorów przestrzeni skończonej jest skończona, więc i każde pokrycie tej przestrzeni jest skończone, co dowodzi zwartości przestrzeni.

**Rozwiązanie zadania 7.26.**

Jeśli $\mathrm{card}(X) \geqslant \aleph_0$, to istnieje różnowartościowy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów tej przestrzeni. Zatem $\varrho(x_n, x_m) = 1$ dla dowolnych różnych $n$ i $m$ ze zbioru liczb naturalnych. Wynika stąd, że żaden podciąg tego ciągu nie spełnia warunku Cauchy'ego, zatem nie jest zbieżny.

Jeśli $\mathrm{card}(X) < \aleph_0$, to $X$ jest, oczywiście, przestrzenią zwartą.

Z powyższych rozważań wynika, że jedynymi podzbiorami zwartymi przestrzeni dyskretnej są zbiory skończone.

**Rozwiązanie zadania 7.27.**

Nie. Przestrzeń ta nie jest zupełna (zadania 7.1 i 6.24).

**Rozwiązanie zadania 7.28.**

Przestrzeń ta nie jest ograniczona. Dla ciągu $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$, zaś $x_1^{(n)} = n$, natomiast $x_l^{(n)} = 0$ dla $l = 2, 3, \ldots$, mamy $\varrho\left(x^{(n)}, \Theta\right) = n$. Z zadania 7.11 wnioskujemy, że przestrzeń $(X, \varrho)$ nie jest zwarta.

**Rozwiązanie zadania 7.29.**

Nie. Rozważana przestrzeń nie jest zupełna, nie może być więc przestrzenią zwartą (zadanie 7.1).

**Rozwiązanie zadania 7.30.**

Nie. Rozważana przestrzeń nie jest ograniczona, gdyż dla ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ takiego, że $x_n = n$, mamy $\varrho(x_n, 1) = n^2 - 1$.

**Rozwiązanie zadania 7.31.**

Nie. Rozważana przestrzeń nie jest ograniczona, gdyż dla ciągu $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ takiego, że $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$, zaś $x_k^{(n)} = n$ dla $k = 1, 2, \ldots$ mamy $\varrho\left(x^{(n)}, \Theta\right) = n$.

**Rozwiązanie zadania 7.32.**

Nie. Rozważmy ciąg $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$, natomiast $x_k^{(n)} = n$, dla $k = 1, 2, \ldots$. Dla różnych liczb naturalnych $n$ i $m$ mamy:

$$\varrho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}.$$

Wynika stąd, że nie istnieje żaden podciąg spełniający warunek Cauchy'ego, nie istnieje więc żaden podciąg zbieżny rozważanego ciągu.

**Rozwiązanie zadania 7.33.**

Nie. Istnieje baza Hamela zawierająca elementy tylko z przedziału $[1, 2]$. Baza ta jest zbiorem nieprzeliczalnym i każde dwa jej elementy mają różnicę niewymierną. Wtedy każde dwa elementy tej bazy mają odległość co najmniej równą 2, zatem przestrzeń ta nie jest ośrodkowa, więc nie może być zwarta.

**Rozwiązanie zadania 7.34.**

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem elementów przestrzeni $X$. Z założenia wynika, że istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x \in X$ względem metryki $\varrho$. Z nierówności

$$0 \leqslant \varrho^* \leqslant \varrho$$

wynika, że podciąg ten jest też zbieżny do punktu $x$ względem metryki $\varrho^*$. Dowodzi to zwartości przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

Można ten fakt udowodnić nieco inaczej. Funkcja $\mathrm{id}_X$ jest homeomorfizmem przestrzeni $(X, \varrho)$ na przestrzeń $(X, \varrho^*)$, więc ta ostatnia przestrzeń też jest zwarta.

**Rozwiązanie zadania 7.35.**

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem elementów przestrzeni $X$. Z założenia wynika, że istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x \in X$ względem metryki $\varrho$. Z definicji metryki $\varrho^*$ wynika, że podciąg ten jest też zbieżny do punktu $x$ względem metryki $\varrho^*$. Dowodzi to zwartości przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

Można ten fakt udowodnić nieco inaczej. Funkcja $\mathrm{id}_X$ jest homeomorfizmem przestrzeni $(X, \varrho)$ na przestrzeń $(X, \varrho^*)$, więc ta ostatnia przestrzeń też jest zwarta.

**Rozwiązanie zadania 7.36.**

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem elementów przestrzeni $X$. Z założenia wynika, że istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x \in X$ względem metryki $\varrho$. Ponieważ ciąg w przestrzeni $(X, \varrho^*)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny do tego punktu względem metryki $\varrho$, więc podciąg ten jest też zbieżny do punktu $x$ względem metryki $\varrho^*$. Dowodzi to zwartości przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

Można ten fakt udowodnić nieco inaczej. Funkcja $\mathrm{id}_X$ jest homeomorfizmem przestrzeni $(X, \varrho)$ na przestrzeń $(X, \varrho^*)$, więc ta ostatnia przestrzeń też jest zwarta.

**Rozwiązanie zadania 7.37.**

Na ogół – nie.

Jeśli zbiór $X$ jest nieprzeliczalny, to rozważana przestrzeń nie jest ośrodkowa, więc nie jest zwarta (zadania 5.46 i 7.1).

Jeśli zbiór $X$ jest przeliczalny i $X$ ma punkt skupienia $u$ różny od punktu $x_0$ względem metryki $\varrho$, to przestrzeń $(X, \varrho^*)$ nie jest zwarta.

Istotnie, niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie różnowartościowym ciągiem zbieżnym do punktu $u$ względem metryki $\varrho$. Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\varrho(x_n, u) < \frac{1}{2} \cdot \varrho(x_0, u) \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Wynika stąd, że dla $r = \frac{1}{2} \cdot \varrho(x_0, u)$ mamy

$$\varrho(x_n, x_0) \geqslant r \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Dla różnych $n$ i $m$ nie mniejszych niż $n_0$ mamy więc

$$\varrho^*(x_n, x_m) \geqslant 2r,$$

co implikuje, że nie istnieje żaden podciąg spełniający warunek Cauchy'ego, nie istnieje więc żaden podciąg zbieżny względem metryki $\varrho^*$. Przestrzeń $(X, \varrho^*)$ nie jest w tym przypadku zwarta.

Niech teraz $X$ będzie zbiorem przeliczalnym i $x_0$ jego jedynym punktem skupienia w przestrzeni $(X, \varrho)$. Rozważmy dowolny różnowartościowy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w zbiorze $X$. Ze zwartości przestrzeni $(X, \varrho)$ wynika, że istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x$ w przestrzeni $(X, \varrho)$. Z oczywistych powodów $x = x_0$. Zatem ciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest również zbieżny do punktu $x_0$ w przestrzeni $(X, \varrho^*)$. W tym przypadku ta ostatnia przestrzeń jest zwarta.

**Rozwiązanie zadania 7.38.**

Odpowiedź nie jest jednoznaczna, zależy od funkcji $f$, ale czasem też i od przestrzeni $(X, \varrho)$.

Jeśli $X$ jest zbiorem skończonym, to, oczywiście, $(X, \varrho^*)$ jest przestrzenią zwartą.

Załóżmy teraz, że $X$ jest zbiorem nieskończonym.

1. Jeśli funkcja $f$ jest prawostronnie ciągła w 0, to przestrzeń $(X, \varrho^*)$ jest zwarta.

   Istotnie. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem elementów zbioru $X$. Istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x_0 \in X$ w przestrzeni $(X, \varrho)$. Wtedy

   $$0 \leqslant \varrho^*(x_{n_k}, x_0) = f(\varrho(x_{n_k}, x_0)) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Zatem z ciągłości funkcji $f$ w zerze wynika zbieżność $\varrho^*(x_{n_k}, x_0) \longrightarrow 0$, czyli $x_{n_k} \longrightarrow x_0$ w przestrzeni $(X, \varrho^*)$, która wobec tego jest zwarta.

2. Jeśli funkcja $f$ jest nieciągła w zerze z prawej strony, to (z monotoniczności) istnieje granica $\lim_{t\to 0+} f(t) = a > 0$. Ponieważ $X$ jest zbiorem nieskończonym, więc istnieje różnowartościowy ciąg (nieskończony) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów zbioru $X$. Wtedy

$$\varrho^*(x_n, x_m) = f(\varrho(x_n, x_m)) \geqslant a \quad \text{dla} \quad n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Zatem żaden podciąg rozważanego ciągu nie spełnia warunku Cauchy'ego, nie istnieje więc żaden podciąg zbieżny. W tym przypadku przestrzeń $(X, \varrho^*)$ nie jest zwarta.

**Rozwiązanie zadania 7.39.**

Ponieważ rzutowania są funkcjami ciągłymi (zadanie 4.71), więc ze zwartości przestrzeni $X$ wynika zwartość obu przestrzeni $X_1$, i $X_2$ (zadanie 7.12).

Załóżmy teraz, że obie przestrzenie $X_1$ i $X_2$ są zwarte. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem elementów przestrzeni $X$, gdzie

$$x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right), \quad x_n^{(1)} \in X_1, \quad x_n^{(2)} \in X_2.$$

Ponieważ $X_1$ jest przestrzenią zwartą, więc istnieje podciąg $\left(x_{n_k}^{(1)}\right)_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x^{(1)} \in X_1$. Ponieważ $X_2$ jest przestrzenią zwartą, więc istnieje podciąg $\left(x_{n_{k_l}}^{(2)}\right)_{l=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x^{(2)} \in X_2$. Wtedy ciąg $\left(x_{n_{k_l}}^{(1)}\right)_{l=1}^{\infty}$ jest też zbieżny do punktu $x^{(1)}$. Wnioskujemy stąd (na podstawie zadania 2.89), że $x_{n_{k_l}} \longrightarrow x = \left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)$. Dowodzi to zwartości przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 7.40.**

Ponieważ rzutowania są funkcjami ciągłymi (zadanie 4.71), więc ze zwartości przestrzeni $X$ wynika zwartość obu przestrzeni $X_1$ i $X_2$ (zadanie 7.12).

Załóżmy teraz, że obie przestrzenie $X_1$ i $X_2$ są zwarte. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem elementów przestrzeni $X$, gdzie

$$x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right), \quad x_n^{(1)} \in X_1, \quad x_n^{(2)} \in X_2.$$

Ponieważ $X_1$ jest przestrzenią zwartą, więc istnieje podciąg $\left(x_{n_k}^{(1)}\right)_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x^{(1)} \in X_1$. Ponieważ $X_2$ jest przestrzenią zwartą, więc istnieje podciąg $\left(x_{n_{k_l}}^{(2)}\right)_{l=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x^{(2)} \in X_2$. Wtedy ciąg $\left(x_{n_{k_l}}^{(1)}\right)_{l=1}^{\infty}$ jest też zbieżny do punktu $x^{(1)}$. Wnioskujemy stąd (na podstawie zadania 2.90), że $x_{n_{k_l}} \longrightarrow x = \left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)$. Dowodzi to zwartości przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 7.41.**

Ponieważ rzutowania są funkcjami ciągłymi (zadanie 4.71), więc ze zwartości przestrzeni $X$ wynika zwartość obu przestrzeni $X_1$ i $X_2$ (zadanie 7.12).

Załóżmy teraz, że obie przestrzenie $X_1$ i $X_2$ są zwarte. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem elementów przestrzeni $X$, gdzie

$$x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right), \quad x_n^{(1)} \in X_1, \quad x_n^{(2)} \in X_2.$$

Ponieważ $X_1$ jest przestrzenią zwartą, więc istnieje podciąg $\left(x_{n_k}^{(1)}\right)_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x^{(1)} \in X_1$. Ponieważ $X_2$ jest przestrzenią zwartą, więc istnieje podciąg $\left(x_{n_{k_l}}^{(2)}\right)_{l=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x^{(2)} \in X_2$. Wtedy ciąg $\left(x_{n_{k_l}}^{(1)}\right)_{l=1}^{\infty}$ jest też zbieżny do punktu $x^{(1)}$. Wnioskujemy stąd (na podstawie zadania 2.91), że $x_{n_{k_l}} \longrightarrow x = \left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)$. Dowodzi to zwartości przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 7.42.**

Załóżmy, że $(X, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną zwartą i rodzina $\{F_s : s \in S\}$ złożona ze zbiorów domkniętych i niepustych ma pusty przekrój. Rozważmy zbiory

$$U_s = X \setminus F_s \quad \text{dla} \quad s \in S.$$

Są one otwarte i

$$\bigcup_{s\in S} U_s = \bigcup_{s\in S} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in S} F_s = X.$$

Rodzina $\{U_s : s \in S\}$ stanowi więc otwarte pokrycie przestrzeni zwartej $X$, istnieje zatem skończony układ $s_1, \ldots, s_n$ elementów zbioru $S$ taki, że

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Wtedy

$$\emptyset = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus U_{s_i}) = \bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i},$$

co dowodzi, że rodzina $\{F_s : s \in S\}$ nie jest scentrowana.

**Rozwiązanie zadania 7.43.**

Załóżmy najpierw, że przestrzeń $(X, \varrho)$ jest zwarta. Niech $E$ będzie dowolnym zbiorem nieskończonym zawartym w przestrzeni $X$. Istnieje różnowartościowy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów zbioru $E$. Dla tego ciągu istnieje podciąg zbieżny w $X$, czyli istnieje punkt $x_0 \in X$ i podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ taki, że $x_{n_k} \longrightarrow x_0$. Oznacza to, że $x_0 \in E^d$, gdyż $x_{n_k} \neq x_0$ (za wyjątkiem być może jednego punktu).

Załóżmy teraz, że każdy nieskończony zbiór zawarty w $X$ ma niepustą pochodną. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem punktów przestrzeni $X$.

Jeśli zbiór $\{x_n : n \in \mathsf{N}\}$ wartości tego ciągu jest skończony, to istnieje podciąg stały (czyli zbieżny) tego ciągu.

Jeśli zbiór $\{x_n : n \in \mathsf{N}\}$ wartości tego ciągu jest nieskończony, to istnieje nieskończony podciąg różnowartościowy tego ciągu. Oznaczmy go jako $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Zbiór wartości tego podciągu też jest nieskończony, ma więc niepustą pochodną. Istnieją więc punkt $x_0 \in X$ i podciąg $\left(x_{n_{k_l}}\right)_{l=1}^{\infty}$ ciągu $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ takie, że $x_0 = \lim_{l \to \infty} x_{n_{k_l}}$. Dowodzi to zwartości przestrzeni $(X, \varrho)$.

**Rozwiązanie zadania 7.44.**

Załóżmy, że przestrzeń $(X, \varrho)$ jest zwarta. Na mocy zadania 7.1 wiemy, że jest ona zupełna i (zadanie 7.3) dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje skończona $\frac{\varepsilon}{3}$-sieć. Oczywiście $\delta\left(K\left(x_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$, co kończy dowód warunku koniecznego.

Załóżmy teraz, że przestrzeń $(X, \varrho)$ jest zupełna i dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje skończony układ zbiorów $A_1, \ldots, A_m$ taki, że

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \quad \text{oraz} \quad \delta(A_i) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, m.$$

W szczególności dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieje układ zbiorów $A_1^{(n)}, \ldots, A_{m_n}^{(n)}$ taki, że

$$X = \bigcup_{i=1}^{m_n} A_i^{(n)} \quad \text{oraz} \quad \delta\left(A_i^{(n)}\right) < \frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, m_n.$$

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem elementów przestrzeni $(X, \varrho)$.

1. Jeśli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg stały, to ma też podciąg zbieżny.
2. Jeśli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nie ma podciągu stałego, to istnieje różnowartościowy podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tego ciągu. Istnieje zbiór $A_{i_1}^{(1)}$, oznaczmy ten zbiór symbolem $E_1$, zawierający nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Niech $x_{n_{k_1}}$ będzie jednym z elementów tego ciągu, który należy do $E_1$. Następnie istnieje zbiór $A_{i_2}^{(2)}$ taki, że zbiór $A_{i_2}^{(2)} \cap A_{i_1}^{(1)}$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Zbiór ten oznaczmy symbolem $E_2$. Niech $x_{n_{k_2}}$ będzie jednym z punktów tego podciągu, który należy do $E_2$ oraz $k_2 > k_1$.

Postępując tak dalej otrzymamy zstępujący ciąg zbiorów $(E_l)_{l=1}^{\infty}$ i ciąg punktów $\left(x_{n_{k_l}}\right)_{l=1}^{\infty}$ taki, że

$$\delta(E_l) < \frac{1}{l}, \quad \text{i} \quad x_{n_{k_l}} \in E_l \quad \text{dla} \quad l \in \mathsf{N}.$$

Wynika stąd, że ciąg $\left(x_{n_{k_l}}\right)_{l=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego (por. rozwiązanie zadania 6.1), jest więc zbieżny.

Dowodzi to zwartości przestrzeni $(X, \varrho)$.

**Rozwiązanie zadania 7.45.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną zwartą. Ponieważ każda przestrzeń metryczna zwarta jest ośrodkowa (zadanie 7.4), więc z zadania 5.1 wynika, że istnieje przeliczalna baza tej przestrzeni. Niech to będzie rodzina

$$\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathsf{N}\}.$$

Rozważmy dowolny zbiór $U$ otwarto-domknięty. Istnieje podrodzina $\mathcal{B}_1$ rodziny $\mathcal{B}$ taka, że $U = \bigcup \mathcal{B}_1$. Z domkniętości zbioru $U$ wynika jego zwartość, zatem istnieje skończona podrodzina $\mathcal{B}_2$ rodziny $\mathcal{B}_1$ taka, że $U = \bigcup \mathcal{B}_2$. Niech teraz $\mathcal{B}_2 = \{B_{n_1}, \ldots, B_{n_k}\}$. W ten sposób z każdym zbiorem otwarto-domkniętym $U$ możemy skojarzyć ciąg skończony $(n_1, \ldots, n_k)$ liczb naturalnych taki, że

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} B_{n_i}.$$

Rozważana rodzina zbiorów otwarto-domkniętych może mieć więc moc nie większą niż zbiór wszystkich ciągów skończonych liczb naturalnych, czyli nie większą niż $\aleph_0$.

**Rozwiązanie zadania 7.46.**

Przypuśćmy, że $\varrho(A, B) = 0$ dla pewnych niepustych zbiorów domkniętych $A$ i $B$. Dla każdego $n \in \mathsf{N}$ istnieją więc punkty $a_n \in A$ i $b_n \in B$ takie, że

$$\varrho(a_n, b_n) < \frac{1}{n}. \tag{7.6}$$

Ponieważ zbiór $A$ jest domknięty, więc jest też zwarty; istnieje zatem podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $a \in A$. Z (7.6) wynika, że ciąg $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest też zbieżny do punktu $a$, zatem $a \in \overline{B} = B$. Oznacza to, że $A \cap B \neq \emptyset$.

**Rozwiązanie zadania 7.47.**

Na podstawie zadania 7.9 wiemy, że zbiór $F$ stanowi podprzestrzeń zwartą, więc jej obraz $f(F)$ jest zwartym podzbiorem przestrzeni $Y$; jest zatem zbiorem domkniętym (zadanie 7.10).

**Rozwiązanie zadania 7.48.**

Z założenia wynika, że istnieje funkcja odwrotna do funkcji $f$; oznaczmy ją symbolem $g$. Rozważmy dowolny zbiór $F$ domknięty w przestrzeni $X$. Z założenia ciągłości funkcji $f$ i zwartości przestrzeni $X$ wynika, że $f(F)$ jest zbiorem zwartym w przestrzeni $Y$ (więc też i zbiorem domkniętym w przestrzeni $Y$). Tak więc $g^{-1}(F) = f(F)$ jest zbiorem domkniętym, a to dowodzi ciągłości funkcji $g$.

**Rozwiązanie zadania 7.49.**

Z zadania 7.11 wynika zwartość zbioru $f(X)$, czyli jego domkniętość i ograniczoność w przestrzeni R. Niech $y_1 = \inf f(X)$. Dla każdego $n \in \mathrm{N}$ istnieje punkt $x_n \in X$ taki, że $y_1 \leqslant f(x_n) \leqslant y_1 + \frac{1}{n}$. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni zwartej $X$ ma podciąg zbieżny do pewnego punktu $x_0 \in X$. Niech $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ będzie tym ciągiem zbieżnym. Wtedy $x_{n_k} \longrightarrow x_0$, a zatem też $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0)$, ale jednocześnie $f(x_{n_k}) \longrightarrow y_1$. Zatem $f(x_0) = y_1$.

Podobnie dowodzi się drugiej części zadania.

**Rozwiązanie zadania 7.50.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią niezwartą. Istnieje różnowartościowy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów tej przestrzeni nie mający żadnego podciągu zbieżnego. Zbiór

$$E = \{x_n \; : \; n \in \mathrm{N}\}$$

jest więc domknięty. Określmy teraz funkcję $f : E \longrightarrow \mathrm{R}$ w sposób następujący: $f(x_n) = n$ dla $n \in \mathrm{N}$. Z twierdzenia Tietzego o przedłużaniu funkcji ciągłej określonej na domkniętym podzbiorze przestrzeni metrycznej wnioskujemy, że istnieje funkcja $g : X \longrightarrow \mathrm{R}$ taka, że $g_{|E} = f$. Oczywiście $\sup g = +\infty$. Wówczas funkcja $h = \frac{g}{1+|g|}$ jest funkcją ciągłą, ograniczoną i nie przyjmującą swego kresu górnego, czyli wartości 1.

**Rozwiązanie zadania 7.51.**

Załóżmy najpierw, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f$. Bezpośrednio z tego założenia i ciągłości funkcji $f_n$ wynika ciągłość funkcji $f$.

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Ze zbieżności ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ do funkcji $f$ wynika, że istnieje liczba $n_1 \in \mathrm{N}$ taka, że

$$\rho(f_n(u), f(u)) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_1 \quad \text{i} \quad u \in X.$$

Niech $x$ będzie dowolnym punktem przestrzeni $X$. Z ciągłości funkcji $f$ wynika, że istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\rho(f(u), f(x)) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{dla} \quad u \in K(x, \delta).$$

Ze zbieżności ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ do punktu $x$ wiemy, że istnieje liczba $n_2 \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\varrho(x_n, x) < \delta \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_2.$$

Zatem dla $n \geqslant n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ mamy:

$$\rho(f_n(x_n), f(x)) \leqslant \rho(f_n(x_n), f(x_n)) + \rho(f(x_n), f(x)) < \varepsilon,$$

co dowodzi zbieżności $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$.

Załóżmy teraz, że dla każdego $x \in X$ i każdego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżnego do $x$ ciąg $(f_n(x_n))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do $f(x)$.

Dla dowolnego punktu $x \in X$ weźmy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $x_n = x$. Wtedy $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$, czyli

$$f_n(x) \longrightarrow f(x),$$

co dowodzi zbieżności punktowej ciągu funkcji $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Przypuśćmy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ nie jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f$. Istnieje więc dodatnia liczba $\varepsilon$ taka, że dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieją punkt $x_n \in X$ i liczba naturalna $l > n$ takie, że

$$\rho(f_l(x_n), f(x_n)) \geqslant \varepsilon.$$

Wynika stąd, że istnieje rosnący ciąg $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb naturalnych i ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów przestrzeni $X$ takie, że

$$\rho(f_{l_n}(x_n), f(x_n)) \geqslant \varepsilon. \tag{7.7}$$

Ze zwartości przestrzeni $X$ wynika, że istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x \in X$. Wprowadźmy jeszcze oznaczenie $l_{n_0} = 0$.

Określmy teraz ciąg $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ następująco:

$$u_j = x_{n_k} \quad \text{dla} \quad j = l_{n_{k-1}} + 1, \ldots, l_{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ciąg $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$. Zatem z założenia wynika zbieżność

$$\lim_{j \to \infty} f_j(u_j) = f(x)$$

i w szczególności

$$\lim_{k \to \infty} f_{l_{n_k}}(x_{n_k}) = f(x). \tag{7.8}$$

Ponieważ ciąg $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ jest zbieżny do $f$, więc dla każdego $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{j \to \infty} f_j(x_{n_k}) = f(x_{n_k}). \tag{7.9}$$

Wnioskujemy stąd, że istnieje rosnący ciąg $(j_k)_{k=1}^{\infty}$ liczb naturalnych taki, że

$$\rho(f_{j_k}(x_{n_k}), f(x_{n_k})) < \frac{1}{k}.$$

Z ciągłości funkcji $f$, (7.8), (7.9) oraz nierówności

$$\rho\left(f_{l_{n_k}}(x_{n_k}), f_{j_k}(x_{n_k})\right) \leqslant$$

$$\rho\left(f_{l_{n_k}}(x_{n_k}), f(x)\right) + \rho(f(x), f(x_{n_k})) + \rho(f(x_{n_k}), f_{j_k}(x_{n_k}))$$

wynika zbieżność

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(f_{l_{n_k}}(x_{n_k}), f_{j_k}(x_{n_k})\right) = 0.$$

Na podstawie nierówności

$$\rho\left(f_{l_{n_k}}(x_{n_k}), f(x_{n_k})\right) \leqslant \rho\left(f_{l_{n_k}}(x_{n_k}), f_{j_k}(x_{n_k})\right) + \rho(f_{j_k}(x_{n_k}), f(x_{n_k}))$$

wnioskujemy, że

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(f_{l_{n_k}}(x_{n_k}), f(x_{n_k})\right) = 0,$$

co jest sprzeczne z (7.7). Ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest więc jednostajnie zbieżny do funkcji $f$.

**Rozwiązanie zadania 7.52.**

Na podstawie zadania 1.5 wiemy, że

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n). \tag{7.10}$$

Niech teraz $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n)$. Wtedy $y \in f(A_n)$ dla każdej liczby naturalnej $n$, zatem dla $n \in \mathbb{N}$ istnieje punkt $x_n \in A_n$ taki, że $y = f(x_n)$. Ponieważ $X$ jest przestrzenią zwartą, więc istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $x \in X$. Z założenia o zstępującym ciągu zbiorów $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ wynika, że również ciąg $(A_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest zstępujący, zatem

$$x_{n_l} \in A_{n_k} \quad \text{dla} \quad l > k, \quad l, k \in \mathbb{N}.$$

Tak więc $x \in \overline{A_{n_k}} = A_{n_k}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, a z warunku o zstępowaniu ciągu $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ wynika, że $x \in A_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Z ciągłości funkcji $f$ wynika, że

$$f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x),$$

skąd wnioskujemy, że $y = f(x)$. Ostatecznie $y \in f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, co uzupełnia inkluzję (7.10).

**Rozwiązanie zadania 7.53.**

Jeśli funkcja $f$ jest ciągła, to jej wykres jest domknięty (zadanie 4.69) przy każdym omawianym wyborze metryki w iloczynie kartezjańskim.

Załóżmy teraz, że wykres funkcji jest zbiorem domkniętym. Wiemy, że niezależnie od wyboru metryki (patrz zadania 2.89, 2.90 i 2.91) zbieżność ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right)$ dla $n \in \mathbb{N}$, do punktu $x = \left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)$ jest równoważna obu zbieżnościom

$$x_n^{(1)} \longrightarrow x^{(1)} \quad \text{i} \quad x_n^{(2)} \longrightarrow x^{(2)}.$$

Dalszy dowód jest więc taki sam, niezależnie od sposobu określenia metryki $\varrho$. Przypuśćmy, że funkcja $f$ nie jest ciągła, np. w punkcie $x \in X$. Istnieją więc dodatnia liczba $\varepsilon$ i ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów przestrzeni $X$ takie, że

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{i} \quad \varrho_2(f(x_n), f(x)) \geqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.11}$$

Ze zwartości przestrzeni $X_2$ wynika, że istnieje podciąg $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego punktu $y$ przestrzeni $X_2$. Z (7.11) wynika, że

$$y \neq f(x). \tag{7.12}$$

Ponieważ każdy punkt $(x_{n_k}, f(x_{n_k}))$ należy do zbioru $f$, więc

$$(x, y) \in \overline{f} = f,$$

czyli $y = f(x)$, co jest sprzeczne z (7.12). Zatem funkcja $f$ jest ciągła.

**Rozwiązanie zadania 7.54.**

Przypuśćmy, że istnieje izometria $f : X \xrightarrow{\text{na}} A$. Izometria jest funkcją ciągłą, więc zbiór $A$ jest zwarty, zatem i domknięty w przestrzeni $X$. Niech $x_0$ będzie dowolnym punktem zbioru $X \setminus A$. Oznaczmy teraz

$$\alpha = \varrho(x_0, A).$$

Ponieważ $A$ jest zbiorem domkniętym, więc $\alpha > 0$.

Określmy teraz ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów zbioru $X$ i ciąg $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ podzbiorów zbioru $X$ następująco:

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$A_0 = X \quad \text{i} \quad A_n = f(A_{n-1}) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

Zauważamy, że $A_1 = A$ i $x_n \in A_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ funkcja $f : X \longrightarrow A$ jest wzajemnie jednoznaczna, więc

$$A_{n+1} = f(A_n) \subset A_n \quad \text{i} \quad A_{n+1} \neq A_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

oraz

$$x_n \in A_n \setminus A_{n+1}.$$

Udowodnimy, że $\varrho(x_1, A_2) \geqslant \varrho(x_0, A_1) = \alpha$. Istotnie, gdyby

$$\varrho(x_1, A_2) < \varrho(x_0, A_1),$$

to istniałby punkt $b_2 \in A_2$ taki, że

$$\varrho(x_1, b_2) = \varrho(x_1, A_2)$$

oraz istniałby punkt $b_1 \in A_1$ taki, że $b_2 = f(b_1)$. Wtedy mielibyśmy

$$\alpha > \varrho(x_1, b_2) = \varrho(f(x_0), f(b_1)) = \varrho(x_0, b_1) \geqslant \alpha,$$

co jest niemożliwe.

Z oczywistych powodów mamy więc

$$\varrho(x_1, A_2) = \varrho(x_0, A_1) = \alpha.$$

Wynika stąd warunek

$$\varrho(x_0, x_2) \geqslant \alpha \quad \text{i} \quad \varrho(x_1, x_2) \geqslant \alpha.$$

Załóżmy, że dla liczby $n \in \mathsf{N}$ spełnione są warunki:

$$\varrho(x_k, A_{k+1}) \geqslant \alpha \quad \text{dla} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Udowodnimy teraz, że

$$\varrho(x_{n+1}, A_{n+2}) \geqslant \varrho(x_n, A_{n+1}).$$

Gdyby

$$\varrho(x_n, A_{n+2}) < \varrho(x_n, A_{n+1}),$$

to istniałby punkt $b_{n+2} \in A_{n+2}$ taki, że

$$\varrho(x_1, b_{n+2}) = \varrho(x_{n+1}, A_{n+2})$$

oraz istniałby punkt $b_{n+1} \in A_{n+1}$ taki, że $b_{n+2} = f(b_{n+1})$. Wtedy mielibyśmy

$$\alpha > \varrho(x_{n+1}, b_{n+2}) = \varrho(f(x_n), f(b_{n+1})) = \varrho(x_n, b_{n+1}) \geqslant \alpha,$$

co jest niemożliwe.

Z powyżej udowodnionej własności wynika, że

$$\varrho(x_{n+1}, x_i) \geqslant \alpha \quad \text{dla} \quad i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

czyli

$$\varrho(x_{i+j}, x_i) \geqslant \varrho(x_1, x_0) \geqslant \alpha > 0 \quad \text{dla} \quad i, j \in \mathsf{N}. \tag{7.13}$$

Z (7.13) i zadania 7.24 wynika teraz, że przestrzeń $(X, \varrho)$ nie jest zwarta. Sprzeczność.

**Rozwiązanie zadania 7.55.**

Z definicji odległości punktu od zbioru i własności kresów wynika, że istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów zbioru $A$ taki, że

$$\varrho(x_n, x_0) \longrightarrow \varrho(A, x_0).$$

Zwartość przestrzeni $X$ (oraz zbioru $A$) implikuje istnienie podciągu $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżnego do pewnego punktu $x \in \overline{A} = A$. Z ciągłości funkcji $\varrho$ wynika teraz

$$\varrho(x_0, x_{n_k}) \longrightarrow \varrho(x_0, x),$$

czyli $\varrho(x_0, x) = \varrho(x_0, A)$.

Punkt $x$ ze zbioru $A$ nie musi być jednoznacznie wyznaczony. Istotnie, w przestrzeni $[0, 10]$ z naturalną metryką niech $A = [0, 1] \cup [3, 4]$ i $x_0 = 2$. Wtedy $\varrho(x_0, A) = 1$, $\varrho(x_0, 1) = 1$ i $\varrho(x_0, 3) = 1$.

**Rozwiązanie zadania 7.56.**

Ad (1). Ponieważ zbiór $G$ jest otwarty, więc na mocy zadania 2.108 otrzymujemy żądaną równość.

Ad (2). Z założenia wynika, że $A = G \cup B$, więc

$$A = \overline{A} = \overline{G \cup B} = \overline{G} \cup \overline{B} = \overline{G} \cup B.$$

Ad (3). Z założenia wynika, że $\overline{G} \subset \overline{A} = A$ oraz

$$\overline{G} \cap (X \setminus A) \subset \overline{A} \cap (X \setminus A) = A \cap (X \setminus A) = \emptyset.$$

Z powyższych relacji wnioskujemy teraz, że

$$\mathrm{Fr}(G) = \overline{G} \cap \overline{X \setminus G} = \overline{G} \cap (X \setminus G) = \overline{G} \cap [X \setminus (A \setminus B)] =$$

$$[\overline{G} \cap (X \setminus A)] \cup [\overline{G} \cap B] = \emptyset \cup (\overline{G} \cap B) = \overline{G} \cap B.$$

**Rozwiązanie zadania 7.57.**

Zbiór $A$ jest domknięty, więc stanowi podprzestrzeń zupełną przestrzeni $X$. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z założenia wynika, że istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ taka, że $4r_n < \varepsilon$. Zbiór $G_n$ można przedstawić w postaci:

$$G_n = \bigcup_{i=1}^{l} K(x_i, \alpha_i), \quad \text{gdzie} \quad x_i \in X, \quad \alpha_i \leqslant r_n \quad \text{dla} \quad i = \{1, \ldots, l\}.$$

Zatem

$$\overline{G_n} = \bigcup_{i=1}^{l} \overline{K(x_i, \alpha_i)} \subset \bigcup_{i=1}^{l} K(x_i, 2\alpha_i).$$

Dla każdego $i = 1, \ldots, l$ mamy

$$\delta(K(x_i, 2\alpha_i)) \leqslant 4\alpha_i \leqslant 4r_n < \varepsilon.$$

Zbiór $A$ jest podzbiorem zbioru $\overline{G_n}$, więc

$$A = \bigcup_{i=1}^{l} (A \cap K(x_i, 2\alpha_i)) \quad \text{i} \quad \delta(A \cap K(x_i, 2\alpha_i)) < \varepsilon.$$

Oznacza to, że zbiór $A$ ma skończone pokrycie zbiorami otwartymi o średnicy mniejszej niż $\varepsilon$, a to z dowolności wyboru liczby $\varepsilon$ i zupełności przestrzeni $A$ dowodzi, na mocy zadania 7.44, że $A$ jest przestrzenią zwartą.

**Rozwiązanie zadania 7.58.**

Niech zbiór $A_k$ będzie zwarty. Ciąg $(A_n)_{n=k}^{\infty}$ jest zstępującym ciągiem niepustych zbiorów domkniętych w przestrzeni zwartej $A_k$. Na mocy twierdzenia Cantora wnioskujemy, że $\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, a ponieważ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ (gdyż ciąg $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zstępujący), więc ostatecznie

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

**Rozwiązanie zadania 7.59.**

Niech $a, b, c$ będą wierzchołkami trójkąta na płaszczyźnie euklidesowej. Funkcja $f : \mathsf{R}^2 \longrightarrow \mathsf{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \varrho(x, a) + \varrho(x, b) + \varrho(x, c) \quad \text{dla} \quad x \in \mathsf{R}^2$$

jest ciągła (zadanie 4.15). Zbiór $f(\mathsf{R}^2)$ jest domknięty i zawarty w $[0, \infty)$. Niech $E = \overline{K(a, r)}$, gdzie $r = 4\max\{\varrho(a, b), \varrho(a, c), \varrho(b, c)\}$. Ponieważ dla każdego punktu $x \notin E$

$$f(x) > f(a) = \varrho(a, b) + \varrho(a, c),$$

więc szukanie punktu minimalnego możemy ograniczyć do zbioru $E$. Zbiór ten jest ograniczony i domknięty, więc jest zwarty. Zbiór $f(E)$ jest też zwarty, czyli ograniczony i domknięty. Istnieje więc punkt $x_0 \in E$ taki, że

$$f(x_0) = \inf f(E),$$

i jest on szukanym punktem.

**Rozwiązanie zadania 7.60.**

Ciąg $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia założenia twierdzenia Cantora (zadanie 7.2), więc $C$ jest niepustym zbiorem domkniętym.

Zbiór końców przedziałów $I_j^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, 2^n$ jest zbiorem gęstym w $C$. Istotnie. Jeśli $\varepsilon$ jest dowolną liczbą dodatnią, $x \in C$ i $x$ nie jest końcem żadnego przedziału $I_j^{(n)}$ oraz $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I$, to istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ taka, że $3^{-(n-1)} < \varepsilon$. Wtedy w przedziale $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ znajdują się co najmniej trzy przedziały postaci

$$\left(\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right), \left(\frac{k+1}{3^n}, \frac{k+2}{3^n}\right), \left(\frac{k+2}{3^n}, \frac{k+3}{3^n}\right),$$

z których przynajmniej jeden jest przedziałem typu $K_j^{(n)}$ wybranym w konstrukcji zbioru Cantora w $n$-tym kroku. Jego końce należą, oczywiście, do zbioru $C$ i leżą w przedziale $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Zatem $C$ jest zbiorem w sobie gęstym.

Podobne rozumowanie prowadzi też do wniosku, iż zbiór $C$ jest nigdzie gęsty.

**Rozwiązanie zadania 7.61.**

Niech $x$ będzie dowolnym punktem zbioru Cantora i $(a, b)$ – dowolnym przedziałem zawierającym punkt $x$. Dowodząc analogicznie jak w zadaniu poprzednim, zauważamy, że w przedziale $(a, b)$ są zawarte trzy przedziały postaci

$$\left(\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right), \left(\frac{k+1}{3^n}, \frac{k+2}{3^n}\right), \left(\frac{k+2}{3^n}, \frac{k+3}{3^n}\right),$$

dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, z których przynajmniej jeden jest przedziałem typu $K_j^{(n)}$ wybranym w $n$-tym kroku w konstrukcji zbioru Cantora. Oznaczmy ten przedział jako

$$J = \left(\frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n}\right) \quad \text{dla pewnego} \quad n \in \mathbb{N}, j = 0, \ldots, 3^n - 1.$$

Wtedy zbiory $C \cap \overline{J}$ i $C$ są homeomorficzne, gdyż funkcja $\varphi : C \longrightarrow C \cap \overline{J}$ dana wzorem

$$\varphi(x) = \frac{1}{3^n}x + \frac{j}{3^n} \quad \text{dla} \quad x \in C$$

jest odpowiednim homeomorfizmem. Wystarczy zatem dowieść tylko, że zbiór $C$ jest nieprzeliczalny. Przypuśćmy, że tak nie jest; tzn. istnieje ciąg $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$C = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Jasne jest, że $c_1 \notin \left[0, \frac{1}{3}\right]$ lub $c_1 \notin \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Niech $K_1$ będzie tym z przedziałów $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, do którego $c_1$ nie należy. Przedział $K_1$ w następnym kroku dzielimy na trzy domknięte podprzedziały i, podobnie jak poprzednio, $c_2$ nie należy do co najmniej jednego z dwu przedziałów, które tworzą zbiór $K_1 \cap F_2$. Niech $K_2$ będzie tym właśnie przedziałem tworzącym zbiór $F_2$, do którego $c_2$ nie należy. Postępując tak dalej, otrzymamy zstępujący ciąg przedziałów $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniający następujące warunki:

$$c_n \notin K_n, \quad \delta(K_n) = \frac{1}{3^n}, \quad K_{n+1} \subset K_n \subset F_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathsf{N}.$$

Zbiór $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ jest niepusty i, oczywiście, $K \subset C$. Ale żaden punkt $c_n$ zbioru $C$ nie należy do $K$. Sprzeczność kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 7.62.**

Dowód przebiega podobnie do dowodu odpowiedniej własności zbioru Cantora (patrz zadanie 7.60).

**Rozwiązanie zadania 7.63.**

Dowód przebiega podobnie do dowodu odpowiedniej własności zbioru Cantora (patrz zadanie 7.61).

**Rozwiązanie zadania 7.64.**

Zauważmy, że każdy zbiór $\Phi_n$ jest niepustym zbiorem domkniętym i $\Phi_{n+1} \subset \Phi_n$, co wynika z konstrukcji przedziałów postaci $K_j^{(n)}$ i $I_l^{(m)}$. Ponieważ każdy zbiór $\Phi_n$ jest podzbiorem $K_0 \times K_0$, czyli zbioru zwartego w przestrzeni euklidesowej $\mathsf{R}^2$, więc ich przekrój $\varphi$ jest niepustym zbiorem domkniętym.

Rozważmy dowolną prostą $V$ prostopadłą do pierwszej osi układu współrzędnych w $\mathsf{R}^2$ i przechodzącą przez punkt $(x, 0)$, gdzie $x \in [0,1]$. Z konstrukcji zbiorów $\Phi_n$ wynika, że

$$V \cap \Phi_n \neq \emptyset \quad \text{dla} \quad n \in \mathsf{N},$$

$$V \cap \Phi_{n+1} \subset V \cap \Phi_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathsf{N},$$

$$V \cap \Phi_n \text{ jest zbiorem domkniętym dla } n \in \mathsf{N}$$

oraz

$$\delta(V \cap \Phi_n) \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{dla} \quad n \in \mathsf{N}.$$

Stąd, na podstawie twierdzenia Cantora, wynika, że $V \cap \varphi \neq \emptyset$ i $\delta(V \cap \varphi) = 0$. Zatem istnieje dokładnie jeden punkt $y \in [0,1]$ taki, że $(x, y) \in \varphi$. W ten sposób udowodniliśmy, że $\varphi$ jest funkcją określoną na przedziale $[0,1]$ o wartościach w tym samym przedziale.

Z konstrukcji zbiorów $\Phi_n$ wynika, że $\varphi$ jest funkcją niemalejącą.

Jeśli teraz $H$ jest prostą poziomą przechodzącą przez punkt $(0, y)$ dla pewnego $y \in [0,1]$, to

$$H \cap \Phi_n \neq \emptyset \quad \text{dla} \quad n \in \mathsf{N},$$

$$H \cap \Phi_{n+1} \subset H \cap \Phi_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$H \cap \Phi_n \text{ jest zbiorem domkniętym dla } n \in \mathbb{N}.$$

Na podstawie twierdzenia Cantora wnioskujemy, że $H \cap \varphi \neq \emptyset$. Stąd i monotoniczności funkcji $\varphi$ wynika, że $\varphi$ ma własność Darboux, zatem jest funkcją ciągłą odwzorowującą przedział $[0,1]$ na siebie.

Zauważmy ponadto, że $\varphi(C) = [0,1]$, gdzie $C$ jest zbiorem Cantora. Jest to przykład funkcji pokazujący, że ciągły obraz zbioru nigdzie gęstego nie musi być zbiorem nigdzie gęstym (zadanie 4.33).

**Rozwiązanie zadania 7.65.**

Ponieważ ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do funkcji $f$, więc pierwszy warunek quasi-jednostajnej zbieżności jest spełniony.

Niech teraz $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią, natomiast $n$ – dowolną liczba naturalną. Z (punktowej) zbieżności ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ wynika, że dla każdego $x \in X$ istnieje $n_x \in \mathbb{N}$ takie, że $n_x \geqslant n$ oraz

$$\varrho(f_{n_x}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Z ciągłości funkcji $f_{n_x}$ i $f$ wynika, że istnieje otoczenie $U_x$ punktu $x$ takie, że

$$\varrho(f_{n_x}(u), f_{n_x}(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla} \quad u \in U_x$$

i

$$\varrho(f(u), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla} \quad u \in U_x.$$

Zatem

$$\varrho(f_{n_x}(u), f(u)) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad u \in U_x.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób rodzinę $\{U_x : x \in X\}$, która jest otwartym pokryciem zwartej przestrzeni $X$, istnieje zatem skończony układ $x_1, \ldots, x_m$ punktów zbioru $X$ taki, że

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}.$$

Niech teraz $v$ będzie dowolnym punktem przestrzeni $X$. Zatem $v \in U_{x_i}$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, m\}$. Tak więc

$$\varrho(f_{n_{x_i}}(v), f(v)) < \varepsilon,$$

a to już dowodzi drugiego warunku quasi-jednostajnej zbieżności ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

# Rozdział 8

# Przestrzenie spójne

**Rozwiązanie zadania 8.1.**

Jeśli przestrzeń $(X, \varrho)$ nie jest spójna, to dwa zbiory otwarte stanowiące rozkład tej przestrzeni są wzajemnymi dopełnieniami, więc są też zbiorami domkniętymi.

Jeśli istnieje rozkład przestrzeni $(X, \varrho)$ na sumę dwóch zbiorów domkniętych, niepustych i rozłącznych, to ich dopełnienia są otwarte i stanowią rozkład przestrzeni $(X, \varrho)$. Przestrzeń ta nie jest więc spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.2.**

Jeśli przestrzeń $(X, \varrho)$ nie jest spójna, to istnieje rozkład tej przestrzeni na sumę dwóch zbiorów otwartych, rozłącznych i niepustych. Są one też domknięte i każdy z nich spełnia warunek zadania.

Jeśli w przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ istnieje właściwy podzbiór niepusty, otwarty i domknięty, to jego dopełnienie jest też zbiorem otwartym i razem z nim stanowi rozkład przestrzeni na dwa składniki otwarte, co dowodzi, że $(X, \varrho)$ nie jest przestrzenią spójną.

**Rozwiązanie zadania 8.3.**

Załóżmy najpierw, że przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ nie jest spójna. Istnieją niepuste dwa zbiory domknięte i rozłączne, których suma jest całą przestrzenią. Niech to będą zbiory $A$ i $B$. Oczywiście, $\overline{A} = A$ i $\overline{B} = B$, skąd wynika równość

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \quad \text{i} \quad A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Zbiory $A$ i $B$ są więc rozgraniczone.

Jeśli przestrzeń $X$ ma rozkład na dwa niepuste zbiory rozgraniczone, powiedzmy, $A$ i $B$, to z równości

$$X = A \cup B \subset \overline{A} \cup B \quad \text{i} \quad \overline{A} \cap B = \emptyset$$

wynika, że $B = X \setminus \overline{A}$, co oznacza, że zbiór $B$ jest otwarty. Podobne rozumowanie prowadzi do wniosku, że i zbiór $A$ jest otwarty, czyli przestrzeń $X$ nie jest spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.4.**

Jeśli $(X, \varrho)$ jest niejednoelementową przestrzenią metryczną posiadającą punkt izolowany $x$, to zbiór $\{x\}$ jest jednocześnie otwarty i domknięty. Przestrzeń $(X, \varrho)$ nie jest więc przestrzenią spójną.

**Rozwiązanie zadania 8.5.**

Niech $f : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ będzie dowolną funkcją ciągłą przekształcającą przestrzeń spójną $X$ na przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$. Jeśli przestrzeń $(Y, \rho)$ nie jest spójna, to istnieją zbiory otwarte $A$ i $B$ takie, że $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = Y$ i $A \neq \emptyset$ oraz $B \neq \emptyset$. Wtedy zbiory $f^{-1}(A)$ i $f^{-1}(B)$ są otwarte w przestrzeni $X$, niepuste i rozłączne. Stanowią one rozkład przestrzeni spójnej, co jest niemożliwe.

**Rozwiązanie zadania 8.6.**

Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie dowolną funkcją ciągłą przekształcającą przestrzeń spójną $X$ w przestrzeń metryczną $(Y, \rho)$, gdzie $(Y, \rho)$ jest jakąkolwiek przestrzenią metryczną zawierającą co najmniej dwa punkty. Na mocy zadania 8.5 wnioskujemy, że obraz zbioru $X$ wyznaczony przez funkcję $f$ jest zbiorem spójnym.

Niech $(X, \varrho)$ będzie teraz przestrzenią metryczną niespójną, $(Y, \rho)$ – przestrzenią metryczną mającą co najmniej dwa elementy; oznaczmy dwa różne elementy tej przestrzeni jako $y$ i $v$. Istnieje rozkład przestrzeni $X$ na dwa zbiory rozłączne, otwarte i niepuste; niech to będą zbiory $A$ i $B$. Funkcja $f : X \longrightarrow Y$ określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} y, & \text{gdy } x \in A, \\ v, & \text{gdy } x \in B \end{cases}$$

jest ciągła (zadanie 4.17), natomiast obraz zbioru $X$ wyznaczony przez funkcję $f$ jest zbiorem dwuelementowym, nie jest więc spójny.

**Rozwiązanie zadania 8.7.**

Niech $C$ będzie zbiorem spójnym w pewnej przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ i przypuśćmy, że jest on zawarty w sumie dwóch zbiorów rozgraniczonych $A$ i $B$. Wtedy

$$C = (C \cap A) \cup (C \cap B).$$

Zbiory $C \cap A$ i $C \cap B$ są rozgraniczone. Ponieważ $C$ jest zbiorem spójnym, więc jeden z nich jest pusty. Niech np. $C \cap A = \emptyset$. Stąd wynika inkluzja $C \subset B$.

**Rozwiązanie zadania 8.8.**

Przypuśćmy, że zbiór $K = \bigcup_{s\in S} C_s$ nie jest zbiorem spójnym. Istnieją więc dwa zbiory otwarte $A$ i $B$ (w podprzestrzeni $K$), niepuste i rozłączne takie, że $K = A \cup B$.

Niech $s$ będzie dowolnym, ustalonym elementem ze zbioru $S$. Z zadania poprzedniego wnioskujemy, że zbiór $C_{s_0}$ jest zawarty w jednym ze zbiorów $A$ lub $B$. Niech np. $C_{s_0} \subset A$. Ponieważ $C_s \cap C_{s_0} \neq \emptyset$, więc również $C_s \subset A$. Z dowolności wyboru indeksu $s$ wynika, że wszystkie zbiory rodziny $\{C_s\}_{s\in S}$ są zawarte w zbiorze $A$, czyli $B = \emptyset$. Zbiór $K$ jest więc spójny.

**Rozwiązanie zadania 8.9.**

Jeśli zbiór $A$ jest domknięty, to $C = A$, jest więc zbiorem spójnym.

Jeśli tak nie jest, to
$$C = \bigcup_{x\in C\setminus A} (A \cup \{x\}).$$

Jeśli $x \in C \setminus A$, to należy do domknięcia zbioru $A$, więc $A \cup \{x\}$ jest zbiorem spójnym. Istotnie, jeśli zbiór $A \cup \{x\}$ byłby zbiorem niespójnym, to dałby się przedstawić jako suma dwóch niepustych zbiorów rozgraniczonych. Zbiór $A$ byłby podzbiorem jednego z nich, więc i punkt $x$ należący do domknięcia $A$ też byłby elementem tego samego zbioru. Sprzeczność dowodzi spójności każdego ze zbiorów $A \cup \{x\}$ dla $x \in C \setminus A$.

Ponieważ wszystkie zbiory z rodziny $\{A \cup \{x\} : x \in C \setminus A\}$ są spójne i nierozłączne ze zbiorem $A$, więc ich suma, czyli zbiór $C$, też jest spójny (na mocy zadania poprzedniego).

**Rozwiązanie zadania 8.10.**

Jeśli przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ jest spójna, to każde dwa jej punkty są w tym (spójnym) zbiorze zawarte.

Załóżmy teraz, że dla każdych dwóch punktów przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$ istnieje zbiór spójny zawierający te punkty. Ustalmy jakiś punkt $x$ w przestrzeni $X$. Dla każdego punktu $u \in X$ istnieje zbiór spójny $C_u$, do którego należą oba punkty $x$ i $u$. Rodzina zbiorów $\{C_u : u \in X\}$ spełnia założenia zadania 8.8, tak więc zbiór $X = \bigcup_{u\in X} C_u$ jest spójny, co należało dowieść.

**Rozwiązanie zadania 8.11.**

Załóżmy, że przestrzeń metryczna $(X, \varrho)$ jest spójna. Niech $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ będzie dowolnym pokryciem otwartym przestrzeni $X$. Ustalmy punkt $x$ przestrzeni $X$. Przez $V$ oznaczmy zbiór tych wszystkich punktów $y$ przestrzeni $X$, dla których istnieje ciąg $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ elementów zbioru $S$ taki, że
$$x \in U_{s_0}, \quad y \in U_{s_n} \quad \text{i} \quad U_{s_i} \cap U_{s_j} \neq \emptyset \iff |i-j| \leqslant 1.$$

Pokażemy, że zbiór $V$ jest otwarty. Niech $u$ będzie dowolnym elementem zbioru $V$. Istnieje ciąg $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ elementów zbioru $S$ taki, że

$$x \in U_{s_0}, \quad u \in U_{s_n} \quad \text{i} \quad U_{s_i} \cap U_{s_j} \neq \emptyset \iff |i-j| \leqslant 1.$$

Wtedy $u \in U_{s_n} \subset V$. Ponieważ zbiór $U_{s_n}$ jest otwarty, więc $u \in \operatorname{Int}(V)$. Dowodzi to, że zbiór $V$ jest otwarty.

Udowodnimy też, że zbiór $V$ jest domknięty. Istotnie, niech

$$w \in \overline{V}.$$

Istnieje $U_{s_w} \in \mathcal{U}$ taki, że $w \in U_{s_w}$. Ponieważ $w \in \overline{V}$, więc $U_{s_w} \cap V \neq \emptyset$. Istnieje zatem punkt $v \in X$ taki, że $v \in V \cap U_{s_w}$. Dla punktu $v$ istnieje „łańcuch" zbiorów $U_{s_0}, U_{s_1}, \ldots, U_{s_n}$ rodziny $\mathcal{U}$ taki, że

$$x \in U_{s_0}, \quad v \in U_{s_n}, \quad \text{i} \quad U_{s_i} \cap U_{s_j} \neq \emptyset \iff |i-j| \leqslant 1.$$

Ponieważ $w \in \overline{V}$, więc istnieje pewien wskaźnik $s_i$, $i = 1, \ldots, n$ taki, że $U_{s_w} \cap U_{s_i} \neq \emptyset$. Dla

$$k = \min\{i \in \{1, \ldots, n\} : U_s \cap U_{s_i} \neq \emptyset\}$$

ciąg wskźników $s_1, \ldots, s_k, s_w$ spełnia wymagania definicji zbioru $V$. Tak więc punkt $w$ należy do $V$, a to dowodzi, że zbiór $V$ jest domknięty.

Oczywiście, zbiór $V$ jest niepusty, więc z uwagi na spójność przestrzeni $X$ jest on równy $X$. Dowodzi to żądanego warunku.

Załóżmy teraz, że przestrzeń $X$ nie jest spójna. Istnieją więc zbiory $A$ i $B$ otwarte, niepuste, rozłączne i takie, że $X = A \cup B$. Rodzina złożona z tych zbiorów jest otwartym pokryciem przestrzeni $X$. Dla jakichkolwiek punktów $a \in A$ i $b \in B$ nie istnieje żaden ciąg zbiorów z tego pokrycia spełniający warunek z zadania.

**Rozwiązanie zadania 8.12.**

Ustalmy w przestrzeni $(X, \varrho)$ punkty $x$ i $y$ oraz dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon$. Niech

$$\mathcal{K} = \left\{K\left(u, \frac{\varepsilon}{2}\right) : u \in X\right\}.$$

Rodzina ta jest pokryciem przestrzeni $X$. Z zadania 8.11 wnioskujemy, że istnieje układ punktów $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ taki, że

$$x \in K\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad y \in K\left(x_{n-1}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{i} \quad K\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap K\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset \iff |i-j| \leqslant 1.$$

Jeśli przyjmiemy $x_0 = x$ i $x_n = y$, to punkty $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ spełniają warunki zadania.

**Rozwiązanie zadania 8.13.**

Ustalmy przestrzeń metryczną $(X, \varrho)$ i punkt $x$ tej przestrzeni.

Rozważmy rodzinę $\mathcal{C}$ wszystkich zbiorów spójnych zawierających punkt $x$. Jest ona niepusta, gdyż zbiór $\{x\}$ do niej należy. Suma tej rodziny jest zbiorem spójnym (zadanie 8.8) i, oczywiście, jest największym zbiorem spójnym zawierającym punkt $x$. Jest więc składową tego punktu w przestrzeni $X$.

Ze względu na zadanie 8.9 wnioskujemy, że składowa punktu w przestrzeni jest zbiorem domkniętym.

Rozważmy rodzinę $\mathcal{C}$ wszystkich zbiorów otwarto-domkniętych zawierających $x$. Jest ona niepusta, bo zbiór $X$ do niej należy. Przekrój tej rodziny jest quasi-składową tego punktu w przestrzeni $X$. Jest to, oczywiście, zbiór domknięty.

**Rozwiązanie zadania 8.14.**

Jeśli punkt $y \in X$ należy do składowej punktu $x$ i ma inną składową, to suma tych dwu zbiorów, oczywiście, nierozłącznych jest też zbiorem spójnym większym od składowej punktu $x$ albo od składowej punktu $y$, co jest niemożliwe na mocy określenia składowej.

**Rozwiązanie zadania 8.15.**

Jeśli różne składowe dwóch punktów mają niepusty przekrój, to ich suma też jest zbiorem spójnym (zadanie 8.8), jest więc on istotnie większym zbiorem spójnym zawierającym oba rozważane punkty. Jest to niemożliwe z uwagi na definicję składowej.

**Rozwiązanie zadania 8.16.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie dowolną przestrzenią metryczną i $x$ jej dowolnym punktem. Literą $C$ oznaczmy składową tego punktu, zaś symbolem $Q$ jego quasi-składową. Rozważmy dowolny zbiór $E$ otwarto-domknięty w przestrzeni $X$ zawierający punkt $x$. Zbiór ten i jego dopełnienie są zbiorami rozgraniczonymi, więc składowa jako zbiór spójny jest zawarta w jednym z tych zbiorów. Ponieważ $x \in E \cap C$, więc $C \subset E$. Dowodzi to, że $C \subset Q$.

**Rozwiązanie zadania 8.17.**

Zauważmy najpierw, że jeśli zbiory $B$ i $D$ są rozgraniczone oraz zbiory $C$ i $D$ są rozgraniczone, to zbiory $B \cup C$ i $D$ są też rozgraniczone. Istotnie, wynika to z następujących równości:

$$\overline{B \cup C} \cap D = (\overline{B} \cap D) \cup (\overline{C} \cap D) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

i

$$(B \cup C) \cap \overline{D} = (B \cap \overline{D}) \cup (C \cap \overline{D}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Przypuśćmy, że zbiór $A \cup U$ nie jest spójny. Istnieją więc niepuste zbiory rozgraniczone $E$ i $F$ takie, że $A \cup U = E \cup F$. Ponieważ zbiór $A$ jest spójny, więc $A \subset E$ lub $A \subset F$; niech np. spełniona będzie pierwsza z tych inkluzji. Wtedy, oczywiście, $A$ jest rozgraniczony ze zbiorem $F$. Stąd i z zawierania $F \subset A \cup U$ wynika, że $F \subset U$, więc zbiory $F$ i $V$ są rozgraniczone. Zatem zbiory $E \cup V$ i $F$ są rozgraniczone. Ponieważ

$$X = A \cup U \cup V = E \cup F \cup V = F \cup (E \cup V),$$

więc okazuje się, że przestrzeń $X$ ma rozkład na dwa niepuste zbiory rozgraniczone, czyli nie jest spójna, co jest sprzeczne z założeniem. Tak więc zbiór $A \cup U$ jest spójny.

Dowód spójności zbioru $A \cup V$ przebiega analogicznie.

**Rozwiązanie zadania 8.18.**

Niech $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem zstępującym zbiorów będących continuum w pewnej przestrzeni metrycznej $(X, \varrho)$. Zbiór $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jest niepustym zbiorem domkniętym, więc zwartym, gdyż jest domkniętym podzbiorem zbioru zwartego. Wystarczy teraz tylko udowodnić, że jest on zbiorem spójnym.

Załóżmy, że istnieją rozłączne zbiory domknięte $A$ i $B$ takie, że $K = A \cup B$. Wobec zadania 2.113 wnioskujemy, że istnieją zbiory otwarte $U$ i $V$ spełniające warunki

$$A \subset U, \quad B \subset V \quad \text{i} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Zbiory $F_n \setminus (U \cup V)$ są zwarte i stanowią ciąg zstępujący. Ich przekrój jest zbiorem pustym, więc $F_n \subset U \cup V$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Stąd wynika

$$F_n = (F_n \cap U) \cup (F_n \cap V),$$

co dowodzi (wobec spójności zbioru $F_n$), że jeden ze zbiorów $F_n \cap U$ lub $F_n \cap V$ jest pusty. Niech np. $F_n \cap U$ będzie zbiorem pustym. Wtedy $K \cap U \subset F_n \cap U = \emptyset$. Dowodzi to, że $A = K \cap A \subset K \cap U = \emptyset$, skąd wynika spójność zbioru $K$.

**Rozwiązanie zadania 8.19.**

Tak. Załóżmy, że $\mathbb{R} = A \cup B$, gdzie $A$ i $B$ są rozłącznymi zbiorami niepustymi. Niech $a \in A$ i $b \in B$. Przyjmijmy, że $a < b$. Niech $d = \sup(A \cap [a, b])$. Z własności kresu górnego wynika, że $d \in \overline{A}$ i $d \in \overline{B}$. Zatem bez względu na to, czy $d \in A$, czy też $d \in B$, zawsze

$$d \in (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}),$$

co oznacza, że zbiory $A$ i $B$ nie są rozgraniczone. Przestrzeń $\mathbb{R}$ jest więc spójna.

Ten sam dowód pokazuje, że każdy przedział domknięty jest zbiorem spójnym.

**Rozwiązanie zadania 8.20.**

Załóżmy najpierw, że zbiór $A \subset \mathsf{R}$ jest spójny i liczby $a$ oraz $b$ do niego należą. (Zbiór jednoelementowy spełnia warunek zadania, gdyż nie istnieje żaden punkt leżący pomiędzy dwoma elementami zbioru $A$.) Przyjmijmy, że $a < b$. Jeśli istnieje liczba $c \in (a,b)$ nie należąca do zbioru $A$, to zbiory $A \cap (-\infty, c)$ i $A \cap (c, \infty)$ są niepuste, rozgraniczone i ich sumą jest $A$. Dowodzi to niespójności zbioru $A$, co jest sprzeczne z założeniem.

Jeśli zbiór $A$ ma własność opisaną w treści zadania, to jest przedziałem. Rozważymy trzy przypadki:

1. $A = (a,b)$,
2. $A = [a,b]$,
3. $A = [a,b)$.

Ad 1. Funkcja dana wzorem

$$f(x) = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{x}{1+|x|} + \frac{a+b}{2}$$

jest homeomorfizmem przestrzeni $\mathsf{R}$ na przedział $(a,b)$, przedział ten jest więc zbiorem spójnym w myśl zadania 8.5.

Ad 2. Z poprzedniej części zadania wiemy, że przedział $(a,b)$ jest spójny, więc (zadanie 8.9.) i jego domknięcie, czyli $[a,b]$ też jest zbiorem spójnym.

Ad 3. Z pierwszej części zadania wiemy, że przedział $(a,b)$ jest spójny, więc (zadanie 8.9.) przedział $[a,b)$ zawarty w domknięciu przedziału $(a,b)$ też jest zbiorem spójnym.

Pozostałe możliwe rodzaje przedziałów są homeomorficzne z jednym z powyżej rozważonych, są więc też zbiorami spójnymi.

**Rozwiązanie zadania 8.21.**

Na podstawie zadania poprzedniego wnioskujemy, że zbiorami spójnymi w przestrzeni liczb rzeczywistych są zbiory postaci:

$$\mathsf{R}, \{a\}, (a,b), [a,b), (a,b], [a,b], (-\infty,a), (-\infty,a], (a,\infty), [a,\infty)$$

gdzie $a, b$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi (przy $a < b$, oczywiście).

**Rozwiązanie zadania 8.22.**

Niech przedział $E$ będzie dowolną składową zbioru otwartego $U$ w przestrzeni $\mathsf{R}$. Dla każdego $x \in E$ istnieje przedział otwarty $I_x$ taki, że $x \in I_x \subset U$. Zatem $I_x \subset E$, czyli $E = \bigcup_{x \in E} I_x$, co dowodzi otwartości składowej $E$.

Przestrzeń $\mathsf{R}$ jest ośrodkowa, więc rodzina składowych (są to zbiory otwarte i rozłączne) jest co najwyżej przeliczalna (zadanie 5.6).

**Rozwiązanie zadania 8.23.**

Niech $(X,\varrho)$ będzie dowolną niejednoelementową przestrzenią metryczną spójną. Ustalmy jakiś punkt $x_0$ z tej przestrzeni. Rozważmy funkcję $f : X \longrightarrow \mathsf{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = \varrho(x, x_0) \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Jest ona ciągła (zadanie 4.15), więc obraz zbioru $X$ wyznaczony przez funkcję $f$ jest zbiorem spójnym zawierającym 0 i $\varrho(x_1, x_0)$ dla pewnego $x_1 \neq x_0$. Zbiór ten jest niezdegenerowanym przedziałem, ma zatem moc continuum. Stąd wynika, że $X$ jest zbiorem mocy co najmniej continuum.

**Rozwiązanie zadania 8.24.**

Ponieważ składowe są zbiorami rozłącznymi, więc $d \leqslant a$ lub $b \leqslant c$. Przyjmijmy, że $b \leqslant c$. Przypuśćmy, że $\varrho((a,b),(c,d)) = 0$. Wtedy istnieją dwa ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ takie, że

$$x_n < b \leqslant c < y_n \quad \text{i} \quad \varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}.$$

Wynika stąd, że $b = c$. Zatem

$$\operatorname{Int}(\overline{A}) \supset \operatorname{Int}([a,b] \cup [b,d]) = \operatorname{Int}([a,d]) = (a,d),$$

wbrew założeniu, że $A = \operatorname{Int}(A)$.

**Rozwiązanie zadania 8.25.**

Niech $x$ i $y$ będą dowolnymi punktami przestrzeni $\mathsf{R}^n$. Odcinek o końcach $x$ i $y$ jest zbiorem spójnym (jest obrazem homeomorficznym przedziału $[0,1]$. Z zadania 8.10 wynika, że rozważana przestrzeń jest spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.26.**

Niech $A \subset \mathsf{R}^2$ będzie dowolnym zbiorem przeliczalnym. Rozważmy dwa dowolne punkty $x$ i $y$ zbioru $\mathsf{R}^2 \setminus A$. Rodzina wszystkich prostych przechodzących przez punkt $x$ i jakiś punkt ze zbioru $A$ jest przeliczalna. Istnieje więc prosta $L_1$ przechodząca przez punkt $x$ omijająca wszystkie punkty zbioru $A$. Podobnie istnieje prosta $L_2$ nierównoległa do $L_1$ przechodząca przez punkt $y$ i nie przechodząca przez żaden punkt zbioru $A$. Proste $L_1$ i $L_2$ przecinają się, więc ich suma jest zbiorem spójnym łączącym punkty $x$ i $y$. Dowodzi to, że zbiór $\mathsf{R}^2 \setminus A$ jest zbiorem spójnym (zadanie 8.10).

**Rozwiązanie zadania 8.27.**

Niech $a$ i $b$ będą dowolnymi punktami zbioru $G$. Dla każdego punktu $x \in G$ istnieje koło otwarte $K(x, r_x)$ zawarte w zbiorze $G$. Rodzina $\{K(x, r_x) : x \in G\}$ jest pokryciem otwartym zbioru $G$, istnieje więc (zadanie 8.11) skończony zbiór punktów $\{x_0, \ldots, x_n\}$ taki, że

$$a \in K(x_0, r_{x_0}), \quad b \in K(x_n, r_{x_n}), \quad \text{i} \quad K(x_i, r_{x_i}) \cap K(x_j, r_{x_j}) \neq \emptyset \iff |i-j| \leqslant 1.$$

Łamana o wierzchołkach $a, x_0, x_1, \ldots, x_n, b$ jest zawarta w sumie kół łączących punkty $a$ i $b$, więc jest też podzbiorem zbioru $G$.

Jeśli dla podzbioru $A$ przestrzeni $\mathsf{R}^2$ każde dwa punkty można połączyć łamaną leżącą w tym zbiorze, to, z uwagi na to, że łamana jest zbiorem spójnym, zbiór $A$ jest spójny.

**Rozwiązanie zadania 8.28.**

Rozważmy funkcję $\Phi : (a,b) \longrightarrow \mathsf{R}^2$ daną wzorem $\Phi(x) = (x, f(x))$ dla $x \in (a,b)$. Ponieważ dla każdego $x \in (a,b)$ i każdego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżnego do $x$ w przestrzeni $(a,b)$

$$\Phi(x_n) = (x_n, f(x_n)) \longrightarrow (x, f(x)) = \Phi(x),$$

więc $\Phi$ jest funkcją ciągłą. Zatem wykres funkcji $f$ równy zbiorowi $\Phi((a,b))$ jest zbiorem spójnym.

Rozważmy funkcję $\Phi : \mathsf{R} \longrightarrow \mathsf{R}^2$ daną wzorem $\Phi(x) = (x, f(x))$ dla $x \in \mathsf{R}$. Ponieważ dla każdego $x \in \mathsf{R}$ i każdego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżnego do $x$ w przestrzeni $\mathsf{R}$

$$\Phi(x_n) = (x_n, f(x_n)) \longrightarrow (x, f(x)) = \Phi(x),$$

więc $\Phi$ jest funkcją ciągłą. Zatem wykres funkcji $f$ równy zbiorowi $\Phi(\mathsf{R})$ jest zbiorem spójnym.

**Rozwiązanie zadania 8.29.**

Zbiór

$$A_0 = \left\{(x,y) \in \mathsf{R}^2 \ : \ y = \sin\frac{1}{x},\ x > 0\right\}$$

jest spójny, jako wykres funkcji ciągłej, więc również zbiór $A_0 \cup \{(0,a)\}$ zawarty w domknięciu zbioru $A_0$ też jest spójny.

Podobnie zbiór

$$A_1 = \left\{(x,y) \in \mathsf{R}^2 \ : \ y = \sin\frac{1}{x},\ x < 0\right\}$$

jest spójny i co za tym idzie, spójnym jest zbiór $A_1 \cup \{(0,a)\}$. Suma $A_0 \cup A_1 = A$ jest więc też zbiorem spójnym.

Każdy zbiór

$$B_n = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2 \ : \ y = nx\}$$

dla $n \in \mathsf{N}$ jest zbiorem spójnym i wszystkie mają punkt wspólny, zatem ich suma $B_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ jest zbiorem spójnym (zadanie 8.8). Ponieważ zbiór $B$ spełnia inkluzje

$$B_0 \subset B \subset \overline{B_0},$$

więc jest zbiorem spójnym.

Każdy zbiór

$$C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ny = x^2\}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ jest zbiorem spójnym i wszystkie mają punkt wspólny. Zatem zbiór

$$C_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

jest spójny. Ponieważ zbiór $C$ spełnia inkluzje $C_0 \subset C \subset \overline{C_0}$, więc jest spójny.

**Rozwiązanie zadania 8.30.**

Okrąg o środku w punkcie $(a,b)$ i promieniu $r$ ($r > 0$) jest sumą wykresów dwu funkcji ciągłych mających punkty wspólne. Jest więc zbiorem spójnym.

**Rozwiązanie zadania 8.31.**

Tak. Niech $a = (a_1, a_2)$ i $b = (b_1, b_2)$ będą dwoma punktami przestrzeni $X$. Zbiory

$$H = \mathbb{R} \times \{a_2\} \quad \text{i} \quad V = \{b_1\} \times \mathbb{R}$$

są homeomorficzne z przestrzenią $\mathbb{R}$ z naturalną metryką, są więc zbiorami spójnymi. Ponieważ są to zbiory nierozłączne, więc ich suma jest też zbiorem spójnym zawierającym punkty $a$ i $b$. Na mocy zadania 8.10 dowodzi to spójności przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 8.32.**

Tak. Niech $a = (a_1, a_2)$ i $b = (b_1, b_2)$ będą dwoma punktami przestrzeni $X$. Zbiory

$$H = \mathbb{R} \times \{a_2\} \quad \text{i} \quad V = \{b_1\} \times \mathbb{R}$$

są homeomorficzne z przestrzenią $\mathbb{R}$ z naturalną metryką, są więc zbiorami spójnymi. Ponieważ są to zbiory nierozłączne, więc ich suma jest też zbiorem spójnym zawierającym punkty $a$ i $b$. Z zadania 8.10 wynika spójność przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 8.33.**

Tak. Niech $a = (a_1, a_2)$ i $b = (b_1, b_2)$ będą dwoma punktami przestrzeni $X$. Zbiory

$$H = \mathbb{R} \times \{a_2\} \quad \text{i} \quad V = \{b_1\} \times \mathbb{R}$$

są homeomorficzne z przestrzenią $\mathbb{R}$ z naturalną metryką, są więc zbiorami spójnymi. Ponieważ są to zbiory nierozłączne, więc ich suma jest też zbiorem spójnym zawierającym punkty $a$ i $b$. Z zadania 8.10 wynika spójność przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 8.34.**

Nie. Punkt $(1,0)$ jest izolowany w naszej przestrzeni; przestrzeń nie jest więc spójna (zadanie 8.4).

**Rozwiązanie zadania 8.35.**

Tak. Niech $X = A \cup B$, gdzie $A$ i $B$ są niepustymi podzbiorami przestrzeni $X$. Wybierzmy dowolne funkcje $f \in A$ i $g \in B$. Określmy teraz funkcje

$$h_t = (1-t) \cdot f + t \cdot g \quad \text{dla} \quad t \in [0, 1].$$

Pokażemy, że odwzorowanie $\Phi$ określone następująco:

$$\Phi(t) = h_t \quad \text{dla} \quad t \in [0, 1]$$

jest funkcją ciągłą przekształcającą przedział $[0, 1]$ (z naturalną metryką) w przestrzeń $(X, \varrho)$.

Ponieważ $f$ i $g$ są funkcjami ograniczonymi, więc istnieją liczby dodatnie $K$ i $L$ takie, że

$$|f(x)| < K \quad \text{dla} \quad x \in E$$

oraz

$$|g(x)| < L \quad \text{dla} \quad x \in E.$$

Stąd i z własności wartości bezwzględnej wynikają nierówności

$$|h_t(x)| \leqslant (1-t) \cdot |f(x)| + t \cdot |g(x)| < (1-t)K + tL \leqslant K + L$$

dla wszystkich $x \in E$. Dowodzi to ograniczoności funkcji $h_t$ dla każdej liczby $t$ należącej do przedziału $[0, 1]$.

Pokażemy teraz, że funkcja $\Phi$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Określmy teraz liczbę $\delta$ następująco:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{K + L}.$$

Wtedy, dla $|t_1 - t_2| < \delta$ mamy:

$$|h_{t_1}(x) - h_{t_2}(x)| = |f(x) \cdot [(1-t_1) - (1-t_2)] + g(x) \cdot (t_2 - t_1)| \leqslant$$

$$|f(x)| \cdot |t_1 - t_2| + |g(x)| \cdot |t_2 - t_1| \leqslant K \cdot |t_1 - t_2| + L \cdot |t_1 - t_2| < (K + L) \cdot \delta = \varepsilon.$$

Tak więc

$$\varrho(\Phi(t_2), \Phi(t_1)) = \sup\{|h_{t_1}(x) - h_{t_2}(x)| \, : \, x \in E\} \leqslant \varepsilon,$$

gdy $|t_1 - t_2| < \delta$. Wynika stąd jednostajna ciągłość funkcji $\Phi$, zatem też i jej ciągłość.

Zbiór $\Phi([0, 1])$ jest więc spójny i zawiera funkcje $f$ i $g$. Udowodniliśmy w ten sposób, że dla dowolnych elementów $f$ i $g$ przestrzeni $X$ istnieje zbiór spójny zawierający te elementy. Tak więc przestrzeń $(X, \varrho)$ jest spójna.

Każdy zbiór

$$C_n = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 : ny = x^2\}$$

dla $n \in \mathsf{N}$ jest zbiorem spójnym i wszystkie mają punkt wspólny. Zatem zbiór

$$C_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

jest spójny. Ponieważ zbiór $C$ spełnia inkluzje $C_0 \subset C \subset \overline{C_0}$, więc jest spójny.

**Rozwiązanie zadania 8.30.**

Okrąg o środku w punkcie $(a, b)$ i promieniu $r$ $(r > 0)$ jest sumą wykresów dwu funkcji ciągłych mających punkty wspólne. Jest więc zbiorem spójnym.

**Rozwiązanie zadania 8.31.**

Tak. Niech $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ i $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ będą dwoma punktami przestrzeni $X$. Zbiory

$$H = \mathsf{R} \times \{a_2\} \quad \text{i} \quad V = \{b_1\} \times \mathsf{R}$$

są homeomorficzne z przestrzenią $\mathsf{R}$ z naturalną metryką, są więc zbiorami spójnymi. Ponieważ są to zbiory nierozłączne, więc ich suma jest też zbiorem spójnym zawierającym punkty $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Na mocy zadania 8.10 dowodzi to spójności przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 8.32.**

Tak. Niech $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ i $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ będą dwoma punktami przestrzeni $X$. Zbiory

$$H = \mathsf{R} \times \{a_2\} \quad \text{i} \quad V = \{b_1\} \times \mathsf{R}$$

są homeomorficzne z przestrzenią $\mathsf{R}$ z naturalną metryką, są więc zbiorami spójnymi. Ponieważ są to zbiory nierozłączne, więc ich suma jest też zbiorem spójnym zawierającym punkty $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Z zadania 8.10 wynika spójność przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 8.33.**

Tak. Niech $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ i $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ będą dwoma punktami przestrzeni $X$. Zbiory

$$H = \mathsf{R} \times \{a_2\} \quad \text{i} \quad V = \{b_1\} \times \mathsf{R}$$

są homeomorficzne z przestrzenią $\mathsf{R}$ z naturalną metryką, są więc zbiorami spójnymi. Ponieważ są to zbiory nierozłączne, więc ich suma jest też zbiorem spójnym zawierającym punkty $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Z zadania 8.10 wynika spójność przestrzeni $X$.

**Rozwiązanie zadania 8.34.**

Nie. Punkt $(1, 0)$ jest izolowany w naszej przestrzeni; przestrzeń nie jest więc spójna (zadanie 8.4).

**Rozwiązanie zadania 8.35.**

Tak. Niech $X = A \cup B$, gdzie $A$ i $B$ są niepustymi podzbiorami przestrzeni $X$. Wybierzmy dowolne funkcje $f \in A$ i $g \in B$. Określmy teraz funkcje

$$h_t = (1-t)\cdot f + t\cdot g \quad \text{dla} \quad t \in [0,1].$$

Pokażemy, że odwzorowanie $\Phi$ określone następująco:

$$\Phi(t) = h_t \quad \text{dla} \quad t \in [0,1]$$

jest funkcją ciągłą przekształcającą przedział $[0,1]$ (z naturalną metryką) w przestrzeń $(X, \varrho)$.

Ponieważ $f$ i $g$ są funkcjami ograniczonymi, więc istnieją liczby dodatnie $K$ i $L$ takie, że

$$|f(x)| < K \quad \text{dla} \quad x \in E$$

oraz

$$|g(x)| < L \quad \text{dla} \quad x \in E.$$

Stąd i z własności wartości bezwzględnej wynikają nierówności

$$|h_t(x)| \leqslant (1-t)\cdot|f(x)| + t\cdot|g(x)| < (1-t)K + tL \leqslant K + L$$

dla wszystkich $x \in E$. Dowodzi to ograniczoności funkcji $h_t$ dla każdej liczby $t$ należącej do przedziału $[0,1]$.

Pokażemy teraz, że funkcja $\Phi$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Określmy teraz liczbę $\delta$ następująco:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{K+L}.$$

Wtedy, dla $|t_1 - t_2| < \delta$ mamy:

$$|h_{t_1}(x) - h_{t_2}(x)| = |f(x)\cdot[(1-t_1)-(1-t_2)] + g(x)\cdot(t_2-t_1)| \leqslant$$

$$|f(x)|\cdot|t_1-t_2| + |g(x)|\cdot|t_2-t_1| \leqslant K\cdot|t_1-t_2| + L\cdot|t_1-t_2| < (K+L)\cdot\delta = \varepsilon.$$

Tak więc

$$\varrho(\Phi(t_2), \Phi(t_1)) = \sup\{|h_{t_1}(x) - h_{t_2}(x)| \,:\, x \in E\} \leqslant \varepsilon,$$

gdy $|t_1 - t_2| < \delta$. Wynika stąd jednostajna ciągłość funkcji $\Phi$, zatem też i jej ciągłość.

Zbiór $\Phi([0,1])$ jest więc spójny i zawiera funkcje $f$ i $g$. Udowodniliśmy w ten sposób, że dla dowolnych elementów $f$ i $g$ przestrzeni $X$ istnieje zbiór spójny zawierający te elementy. Tak więc przestrzeń $(X, \varrho)$ jest spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.36.**

Tak. Niech $l^p = A \cup B$, gdzie $A$ i $B$ są niepustymi podzbiorami przestrzeni $l^p$. Wybierzmy ciągi $x \in A$ i $y \in B$.

Określmy teraz ciągi

$$h_t = (1-t)\cdot x + t\cdot y \quad \text{dla} \quad t \in [0,1].$$

Pokażemy, że odwzorowanie $\Phi$ określone następująco:

$$\Phi(t) = h_t \quad \text{dla} \quad t \in [0,1]$$

jest funkcją ciągłą przekształcającą przedział $[0,1]$ w przestrzeń $l^p$.

Ponieważ dla każdej liczby $n \in \mathsf{N}$ i $t \in [0,1]$ mamy

$$h_t(n) = (1-t)\cdot x_n + t\cdot y_n.$$

więc z nierówności Minkowskiego wynikają następujące zależności:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}[(1-t)x_n + ty_n]^p\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}[(1-t)x_n]^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}[ty_n]^p\right)^{1/p} < \infty,$$

a to dowodzi, że $h_t$ jest ciągiem należącym do przestrzeni $l^p$.

Pokażemy teraz, że funkcja $\Phi$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Określmy teraz liczbę $\delta$ następująco:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{K+L},$$

gdzie

$$K = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p\right)^{1/p} \quad \text{i} \quad L = \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^p\right)^{1/p}.$$

Wtedy, dla $|t_1 - t_2| < \delta$ mamy:

$$\varrho(\Phi(t_1),\Phi(t_2)) = \varrho(h_{t_1},h_{t_2}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(t_1-t_2)x_n + (t_2-t_1)y_n|^p\right)^{1/p} =$$

$$|t_1-t_2|\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|(t_1-t_2)x_n + (t_2-t_1)y_n|^p\right)^{1/p} \leqslant |t_1-t_2|\cdot(K+L) < \varepsilon.$$

Wynika stąd jednostajna ciągłość funkcji $\Phi$, zatem też i jej ciągłość.

Zbiór $\Phi([0,1])$ jest więc spójny i zawiera ciągi $x$ i $y$. Udowodniliśmy w ten sposób, że dla dowolnych elementów $x$ i $y$ przestrzeni $l^p$ istnieje zbiór spójny zawierający te elementy. Tak więc przestrzeń $l^p$ jest spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.37.**

Nie. Przestrzeń ta jest przeliczalna, nie jest więc spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.38.**

Tak. Załóżmy, że niepuste i rozłączne zbiory $A$ i $B$ stanowią rozkład przestrzeni $X$, tzn. $X = A \cup B$. Niech $I_1 \in A$ i $I_2 \in B$. Oznaczmy $I_1 = [a, b]$, $I_2 = [c, d]$. Z rozłączności zbiorów $A$ i $B$ wynika, że $a \neq c$ lub $b \neq d$.

Przyjmijmy, że $a < c$. Wtedy zbiór $\{t \in [a, c] : [t, d] \in B\}$ jest niepusty, gdyż $c$ do niego należy. Niech teraz

$$c_0 = \inf\{t \in [a, c] : [t, d] \in B\}.$$

Możliwe są dwa przypadki:
(a). $c_0 > a$;
(b). $c_0 = a$.

Ad (a). W tym przypadku $[c_0, d] \in \overline{A} \cap \overline{B}$, czyli (na mocy równości $X = A \cup B$)

$$[c_0, d] \in (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$$

Ad (b). Jeśli $c_0 = a$ i $[a, d] \in A$, to ponieważ, $[a, d] \in \overline{B}$, więc zbiory $A$ i $B$ są nierozgraniczone.

Jeśli $c_0 = a$ i $[a, d] \in B$, to rozważymy trzy możliwości:
(1). $d = b$;
(2). $d < b$;
(3). $d > b$.

Ad (1). W przypadku (1) mamy sprzeczność z rozłącznością zbiorów $A$ i $B$.

Ad (2). Teraz mamy: $[a, d] \in B$, $[a, b] \in A$. Zbiór $\{t \in [d, b] : [a, t] \in B\}$ jest niepusty; niech więc

$$d_0 = \sup\{t \in [d, b] : [a, t] \in B\}.$$

Jeśli $d_0 = b$, to $[a, b] \in A \cap \overline{B}$, czyli zbiory $A$ i $B$ są nierozgraniczone.

Jeśli $d_0 < b$, to $[a, d_0] \in \overline{A} \cap \overline{B}$, zatem też zbiory $A$ i $B$ są nierozgraniczone.

Ad (3). Teraz mamy: $[a, d] \in B$ i $[a, b] \in A$. Zbiór $\{t \in [b, d] : [a, t] \in A\}$ jest niepusty; niech więc

$$b_0 = \sup\{t \in [b, d] : [a, t] \in A\}.$$

Jeśli $b_0 = d$, to $[a, d] \in \overline{A} \cap B$, czyli zbiory $A$ i $B$ są nierozgraniczone.

Jeśli $b_0 < d$, to $[a, b_0] \in \overline{A} \cap \overline{B}$, zatem też zbiory $A$ i $B$ są nierozgraniczone.

Podobnie dowodzimy nierozgraniczoności zbiorów $A$ i $B$ w przypadku, gdy $b \neq d$.

Podsumowując te rozważania stwierdzamy, że przestrzeń $X$ jest spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.39.**

Tak. Niech $X = A \cup B$, gdzie $A$ i $B$ są niepustymi podzbiorami przestrzeni $X$. Wybierzmy ciągi $\boldsymbol{x}_1 \in A$ i $\boldsymbol{x}_2 \in B$.

Określmy teraz ciągi

$$\boldsymbol{h}_t = (1-t)\cdot \boldsymbol{x} + t \cdot \boldsymbol{y} \quad \text{dla} \quad t \in [0,1].$$

Pokażemy, że odwzorowanie $\Phi$ określone następująco:

$$\Phi(t) = \boldsymbol{h}_t \quad \text{dla} \quad t \in [0,1]$$

jest funkcją ciągłą przekształcającą przedział $[0,1]$ w przestrzeń $(X, \varrho)$.

Ciągi $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ są ograniczone, więc istnieją liczby $k$ i $L$ takie, że

$$|x_n| \leqslant K \quad \text{i} \quad |y_n| \leqslant L.$$

Ponieważ dla każdej liczby $n \in \mathrm{N}$ i $t \in [0,1]$ mamy:

$$\boldsymbol{h}_t(n) = (1-t)\cdot x_n + t \cdot y_n \leqslant K + L,$$

więc $\boldsymbol{h}_t$ jest ciągiem ograniczonym.

Pokażemy teraz, że funkcja $\Phi$ jest ciągła. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Określmy teraz liczbę $\delta$ następująco:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{K+L}.$$

Wtedy, dla $|t_1 - t_2| < \delta$ mamy:

$$\varrho(\Phi(t_1), \Phi(t_2)) = \varrho(\boldsymbol{h}_{t_1}, \boldsymbol{h}_{t_2}) = \sup\{|(t_1-t_2)x_n + (t_2-t_1)y_n| \, : \, n \in \mathrm{N}\} \leqslant$$

$$|t_1 - t_2| \cdot \sup\{|x_n + y_n| \, : \, n \in \mathrm{N}\} \leqslant |t_1 - t_2| \cdot \sup\{|x_n| + |y_n| \, : \, n \in \mathrm{N}\} \leqslant$$

$$|t_1 - t_2| \cdot (\sup\{|x_n| \, : \, n \in \mathrm{N}\} + \sup\{|y_n| \, : \, n \in \mathrm{N}\}) \leqslant |t_1 - t_2| \cdot (K+L) < \varepsilon.$$

Wynika stąd jednostajna ciągłość funkcji $\Phi$, zatem też i jej ciągłość.

Zbiór $\Phi([0,1])$ jest więc spójny i zawiera ciągi $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$. Udowodniliśmy w ten sposób, że dla dowolnych elementów $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ przestrzeni $(X, \varrho)$ istnieje zbiór spójny zawierający te elementy. Tak więc przestrzeń $(X, \varrho)$ jest spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.40.**

Tak. Niech $X = A \cup B$, gdzie $A$ i $B$ są niepustymi podzbiorami przestrzeni $X$. Wybierzmy ciągi $x \in A$ i $y \in B$.

Określmy teraz ciągi

$$h_t = (1-t)\cdot x + t\cdot y \quad \text{dla} \quad t \in [0,1].$$

Pokażemy, że odwzorowanie $\Phi$ określone następująco:

$$\Phi(t) = h_t \quad \text{dla} \quad t \in [0,1]$$

jest funkcją ciągłą przekształcającą przedział $[0,1]$ w przestrzeń $(X,\varrho)$.

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Oznaczmy

$$M = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}\cdot |x_n - y_n|.$$

Niech teraz $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Dla $|t_1 - t_2| < \delta$ mamy:

$$\varrho(\Phi(t_1),\Phi(t_2)) = \varrho(h_{t_1},h_{t_2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot \frac{|t_1-t_2|\cdot|x_n-y_n|}{1+|t_1-t_2|\cdot|x_n-y_n|} =$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}\cdot \frac{|t_1-t_2|\cdot|x_n-y_n|}{1+|t_1-t_2|\cdot|x_n-y_n|} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot \frac{|t_1-t_2|\cdot|x_n-y_n|}{1+|t_1-t_2|\cdot|x_n-y_n|} \leqslant$$

$$|t_1-t_2|\cdot \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}\cdot \frac{|x_n-y_n|}{1+|t_1-t_2|\cdot|x_n-y_n|} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} <$$

$$\delta\cdot \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}\cdot|x_n-y_n| + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2M}\cdot M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Wynika stąd jednostajna ciągłość funkcji $\Phi$, zatem też i jej ciągłość.

Zbiór $\Phi([0,1])$ jest więc spójny i zawiera ciągi $x$ i $y$. Udowodniliśmy w ten sposób, że dla dowolnych elementów $x$ i $y$ przestrzeni $(X,\varrho)$ istnieje zbiór spójny zawierający te elementy. Tak więc przestrzeń $(X,\varrho)$ jest spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.41.**

Nie. Zbiory $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ i $B = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ są niepuste i domknięte w rozważanej przestrzeni. Stanowią więc rozkład przestrzeni $X$, a to dowodzi, że nie jest ona spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.42.**

Załóżmy najpierw, że przestrzeń $X$ jest niespójna. Istnieją więc niepuste zbiory otwarte $A$ i $B$ takie, że $A \cup B = X$ i $A \cap B = \emptyset$. Wtedy są one też domknięte oraz $B = X \setminus A$. Wówczas

$$\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = A \cap (X \setminus A) = \emptyset,$$

a to dowodzi warunku zadania.

Załóżmy teraz, że istnieje zbiór $A$ taki, że

$$\emptyset \neq A \neq X, \quad \text{oraz} \quad \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \emptyset.$$

Zbiór $\overline{A}$ jest domknięty i niepusty. Z założenia wynika, że zbiór $X \setminus A$ jest niepusty, czyli tym bardziej $\overline{X \setminus A} \neq \emptyset$. Ponieważ $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \emptyset$, więc $\overline{A} \neq X$. Mamy rozkład przestrzeni $(X, \varrho)$ na dwa zbiory domknięte, niepuste i rozłączne. Przestrzeń nie jest więc spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.43.**

Z relacji

$$\overline{C} \cap D \subset \overline{A} \cap B \quad \text{i} \quad \overline{D} \cap C \subset \overline{B} \cap A$$

oraz rozgraniczoności zbiorów $A$ i $B$ wynika, że zbiory $C$ i $D$ są też rozgraniczone.

**Rozwiązanie zadania 8.44.**

Ponieważ

$$[\overline{A} \cap (B \cup C)] \cup [A \cap \overline{B \cup C}] = [(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap C)] \cup [A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})] =$$

$$[(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap C)] \cup [(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})] =$$

$$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (A \cap \overline{C}) = \emptyset,$$

więc zbiory $A$ i $B \cup C$ są rozgraniczone.

**Rozwiązanie zadania 8.45.**

Zbiory $X \setminus B$ i $X \setminus A$ są domknięte. Wynika stąd

$$\overline{A \setminus B} = \overline{A \cap (X \setminus B)} \subset \overline{A} \cap (X \setminus B) = \overline{A} \setminus B$$

oraz $\overline{B \setminus A} \subset \overline{B} \setminus A$. Zatem

$$\overline{A \setminus B} \cap (B \setminus A) \subset (\overline{A} \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

$$\overline{B \setminus A} \cap (A \setminus B) \subset (\overline{B} \setminus A) \cap (A \setminus B) = \emptyset.$$

Dowodzi to rozgraniczoności zbiorów $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

**Rozwiązanie zadania 8.46.**

Z domkniętości zbiorów $A$ i $B$ wynikają relacje:

$$\overline{A\setminus B}\cap(B\setminus A)=\overline{A\cap(X\setminus B)}\cap(B\setminus A)\subset \overline{A}\cap\overline{X\setminus B}\cap(B\setminus A)=\emptyset$$

oraz

$$\overline{B\setminus A}\cap(A\setminus B)=\overline{B\cap(X\setminus A)}\cap(A\setminus B)\subset \overline{B}\cap\overline{X\setminus A}\cap(A\setminus B)=\emptyset.$$

Dowodzi to rozgraniczoności zbiorów $A\setminus B$ i $B\setminus A$.

**Rozwiązanie zadania 8.47.**

Niech $C$ i $D$ będą spójnymi zbiorami nierozgraniczonymi. Jeśli $C\cup D = A\cup B$, gdzie $A$ i $B$ są rozgraniczone, to $C\subset A\cup B$, więc $C\subset A$ lub $C\subset B$. Załóżmy, że $C\subset A$. Gdyby zbiór $D$ był zawarty w $B$, to byłby rozgraniczony z $C$ (patrz zadanie 8.43). Zatem $D\subset A$, co dowodzi, że $B=\emptyset$. Udowodniliśmy więc, że zbiór $C\cup D$ jest spójny.

**Rozwiązanie zadania 8.48.**

Załóżmy, że istnieją zbiory rozgraniczone $A$ i $B$ takie, że

$$C=\bigcup_{s\in S} C_s = A\cup B.$$

Ponieważ zbiór $C_{s_0}$ jest spójny, więc $C_{s_0}\subset A$ lub $C_{s_0}\subset B$. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $C_{s_0}\subset A$. Rozważmy teraz dowolny zbiór $C_s$ z rodziny $\{C_s : s\in S\}$. Gdyby zbiór $C_s$ był zawarty w $B$, to na mocy zadania 8.43 byłby rozgraniczony z $C_{s_0}$, co jest niemożliwe. Zatem $C_s\subset A$ dla każdego $s\in S$. Dowodzi to, że $B=\emptyset$. Tak więc $C$ jest zbiorem spójnym.

**Rozwiązanie zadania 8.49.**

Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. zbiór $A$ lub $B$ jest niespójny. Załóżmy, że zbiór $A$ jest niespójny. Istnieją więc niepuste zbiory rozgraniczone $E$ i $F$ takie, że $A = E\cup F$. Pokażemy, że są to zbiory otwarte. Niech $x$ będzie dowolnym elementem zbioru $E$. Ponieważ zbiór $A$ jest otwarty i $x\in A$, więc istnieje dodatnia liczba $d$ taka, że $K(x,d)\subset A$. Zbiór $\overline{F}$ jest domknięty i, na mocy rozgraniczoności zbiorów $E$ i $F$, wnioskujemy, że $x$ nie należy do $\overline{F}$. Zatem $\varrho(x,\overline{F})>0$. Niech

$$r=\min\{d,\varrho(x,\overline{F})\}.$$

Wtedy $K(x,r)\subset A$ i $K(x,r)\cap F=\emptyset$, zatem $K(x,r)\subset E$. Każdy punkt zbioru $E$ jest punktem wewnętrznym tego zbioru, więc zbiór $E$ jest otwarty.

Podobnie dowodzi się, że zbiór $F$ jest domknięty.

Z założenia spójności zbioru $A \cap B$ i zawierania $A \cap B \subset E \cup F$ wynika, że $A \cap B \subset E$ lub $A \cap B \subset F$. Niech np. $A \cap B$ będzie podzbiorem zbioru $E$. Wtedy

$$A \cap B \cap F = \emptyset \quad \text{oraz} \quad (B \setminus A) \cap F = \emptyset,$$

gdyż $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$ i $F \subset A$. Zatem $B \cap F = \emptyset$. Ponieważ $B$ i $F$ są zbiorami otwartymi, więc na mocy zadania 3.3 wnioskujemy, że są zbiorami rozgraniczonymi. W ten sposób równość

$$A \cup B = (E \cup B) \cup F$$

przeczy spójności zbioru $A \cup B$. Zbiory $A$ i $B$ są więc spójne.

**Rozwiązanie zadania 8.50.**

Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. zbiór $A$ lub $B$ jest niespójny. Załóżmy, że zbiór $A$ jest niespójny. Istnieją więc niepuste zbiory rozgraniczone $E$ i $F$ takie, że $A = E \cup F$. Pokażemy, że są to zbiory domknięte. Niech $x$ będzie dowolnym elementem zbioru $\overline{E}$. Ponieważ zbiór $A$ jest domknięty, więc $x \in A$, zatem $x \in E$ lub $x \in F$. Gdyby punkt $x$ należał do zbioru $F$, to zbiory $E$ i $F$ nie byłyby rozgraniczone. Tak więc $x \in E$. Zbiór $E$ jest domknięty.

Podobnie dowodzi się, że zbiór $F$ jest domknięty.

Z założenia spójności zbioru $A \cap B$ i zawierania $A \cap B \subset E \cup F$ wynika, że $A \cap B \subset E$ lub $A \cap B \subset F$. Niech np. $A \cap B$ będzie podzbiorem zbioru $E$. Wtedy

$$A \cap B \cap F = \emptyset \quad \text{oraz} \quad (B \setminus A) \cap F = \emptyset,$$

gdyż $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$ i $F \subset A$. Zatem $B \cap F = \emptyset$. Ponieważ $B$ i $F$ są zbiorami domkniętymi, więc są zbiorami rozgraniczonymi. W ten sposób równość

$$A \cup B = (E \cup B) \cup F$$

przeczy spójności zbioru $A \cup B$. Zbiory $A$ i $B$ są więc spójne.

**Rozwiązanie zadania 8.51.**

Przypuśćmy, że $A \cap \mathrm{Fr}(B) = \emptyset$. Ponieważ $X = \overline{B} \cup \overline{X \setminus B}$, więc

$$A = (A \cap \overline{B}) \cup \left(A \cap \overline{X \setminus B}\right).$$

Zbiory $A \cap \overline{B}$ i $A \cap \overline{X \setminus B}$ są niepuste, gdyż

$$A \cap \overline{B} \supset A \cap B \neq \emptyset$$

i

$$A \cap \overline{X \setminus B} \supset X \setminus B \neq \emptyset.$$

Z relacji

$$\overline{A \cap \overline{B}} \cap A \cap \overline{X \setminus B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \cap A \cap \overline{X \setminus B} = A \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$$

oraz

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{A \cap \overline{X \setminus B}} \subset A \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{X \setminus B} = A \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$$

wynika, że zbiory $A \cap \overline{B}$ i $A \cap \overline{X \setminus B}$ (niepuste) są rozgraniczone. Przeczy to założeniu spójności zbioru $A$. Sprzeczność kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania 8.52.**

Załóżmy, że zbiór $A \cup C$ da się przedstawić w postaci

$$A \cup C = E \cup F,$$

gdzie zbiory $E$ i $F$ są rozgraniczone. Ponieważ zbiór $A$ jest spójny i $A \subset E \cup F$, więc $A$ jest zawarty w jednym ze zbiorów $E$ lub $F$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $A \subset E$. Zbiory $A$ i $F$ są więc rozgraniczone, zatem też rozłączne. Ponieważ $F \subset A \cup C$, więc $F \subset C$. Z rozgraniczoności zbiorów $C$ i $D$ wynika, że zbiory $F$ i $D$ są rozgraniczone. Zatem również zbiory $F$ i $E \cup D$ są rozgraniczone. Ponieważ $\emptyset \neq A \subset E \cup D$ oraz

$$X = A \cup C \cup D = E \cup F \cup D = F \cup (E \cup D),$$

więc ze spójności przestrzeni $X$ wynika, że $F = \emptyset$. Dowodzi to spójności zbioru $A \cup C$.

Podobnie dowodzi się, że zbiór $A \cup D$ jest spójny.

**Rozwiązanie zadania 8.53.**

Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną i $A$ jej podzbiorem spójnym i gęstym. Na mocy zadania 8.9 zbiór $X = \overline{A}$ jest spójny.

**Rozwiązanie zadania 8.54.**

Tak. Ponieważ dowolny ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$ w przestrzeni $(X, \varrho^\star)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny do $x$ w przestrzeni $(X, \varrho)$, więc zbiory rozgraniczone w przestrzeni $(X, \varrho^\star)$ są rozgraniczone w $(X, \varrho)$ i odwrotnie. Ze spójności przestrzeni $(X, \varrho)$ wynika więc spójność przestrzeni $(X, \varrho^\star)$.

**Rozwiązanie zadania 8.55.**

Tak. Ponieważ dowolny ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$ w przestrzeni $(X, \varrho^\star)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny do $x$ w przestrzeni $(X, \varrho)$, więc zbiory rozgraniczone w przestrzeni $(X, \varrho^\star)$ są rozgraniczone w $(X, \varrho)$ i odwrotnie. Ze spójności przestrzeni $(X, \varrho)$ wynika więc spójność przestrzeni $(X, \varrho^\star)$.

**Rozwiązanie zadania 8.56.**

Tak. Ponieważ dowolny ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$ w przestrzeni $(X, \varrho^*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny do $x$ w przestrzeni $(X, \varrho)$, więc zbiory rozgraniczone w przestrzeni $(X, \varrho^*)$ są rozgraniczone w $(X, \varrho)$ i odwrotnie. Ze spójności przestrzeni $(X, \varrho)$ wynika więc spójność przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

**Rozwiązanie zadania 8.57.**

Jeśli przestrzeń $X$ składa się tylko z punktu $x_0$, to jest, oczywiście, spójna.

Jeśli przestrzeń $X$ składa się nie tylko z punktu $x_0$, to niech $x_1$ będzie punktem różnym od $x_0$. Zbiór $A = \{x_1\}$ jest domknięty; pokażemy, że zbiór $X \setminus A$ też jest domknięty.

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem elementów zbioru $X \setminus A$ zbieżnym do pewnego punktu $x \in X$. Jeśli $x = x_0$, to, oczywiście, $x \in X \setminus A$. Jeśli $x \neq x_0$, to prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są równe $x$, czyli też $x \in X \setminus A$.

Zbiory $A$ i $X \setminus A$ stanowią więc rozkład przestrzeni $X$; jest ona niespójna.

**Rozwiązanie zadania 8.58.**

Odpowiedź nie jest jednoznaczna.

Jeśli $X$ składa się z co najmniej dwóch punktów, a funkcja $f$ jest prawostronnie nieciągła w zerze, to przestrzeń $(X, \varrho^*)$ nie jest spójna, gdyż każdy jej punkt jest punktem izolowanym.

Jeśli $X$ jest przestrzenią jednoelementową, to $(X, \varrho^*)$ jest, oczywiście, przestrzenią spójną.

Jeśli $(X, \varrho)$ jest dowolną przestrzenią spójną, a funkcja $f$ jest prawostronnie ciągła w zerze, to $(X, \varrho^*)$ jest przestrzenią spójną.

Istotnie, dowolny ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $x$ w przestrzeni $(X, \varrho^*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny do $x$ w przestrzeni $(X, \varrho)$, więc zbiory rozgraniczone w przestrzeni $(X, \varrho^*)$ są rozgraniczone w $(X, \varrho)$ i odwrotnie. Ze spójności przestrzeni $(X, \varrho)$ wynika więc spójność przestrzeni $(X, \varrho^*)$.

**Rozwiązanie zadania 8.59.**

Ponieważ rzutowania przestrzeni $X$ na przestrzenie $X_1$ i $X_2$ są funkcjami ciągłymi, więc ze spójności przestrzeni $X$ wynika spójność obu przestrzeni $X_1$ i $X_2$.

Niech $x_1 = \left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}\right)$ i $x_2 = \left(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}\right)$ będą dwoma dowolnymi punktami przestrzeni $X$. Zbiór

$$V = \left\{x_1^{(1)}\right\} \times X_2$$

jest spójny, gdyż jest homeomorficzny z przestrzenią spójną $X_2$, a zbiór

$$H = X_1 \times \left\{x_2^{(2)}\right\}$$

jest spójny, gdyż jest homeomorficzny z przestrzenią spójną $X_1$. Ponieważ $H \cap V \neq \emptyset$, więc zbiór $H \cap V$ jest spójnym zbiorem łączącym punkty $x_1$ i $x_2$. Na mocy zadania 8.10 wnioskujemy więc, że przestrzeń $X$ jest spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.60.**

Ponieważ rzutowania przestrzeni $X$ na przestrzenie $X_1$ i $X_2$ są funkcjami ciągłymi, więc ze spójności przestrzeni $X$ wynika spójność obu przestrzeni $X_1$ i $X_2$.

Niech $x_1 = \left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}\right)$ i $x_2 = \left(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}\right)$ będą dwoma dowolnymi punktami przestrzeni $X$. Zbiór

$$V = \left\{x_1^{(1)}\right\} \times X_2$$

jest spójny, gdyż jest homeomorficzny z przestrzenią spójną $X_2$, a zbiór

$$H = X_1 \times \left\{x_2^{(2)}\right\}$$

jest spójny, gdyż jest homeomorficzny z przestrzenią spójną $X_1$. Ponieważ $H \cap V \neq \emptyset$, więc zbiór $H \cap V$ jest spójnym zbiorem zawierającym punkty $x_1$ i $x_2$. Na mocy zadania 8.10 wnioskujemy więc, że przestrzeń $X$ jest spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.61.**

Ponieważ rzutowania przestrzeni $X$ na przestrzeni $X_1$ i $X_2$ są funkcjami ciągłymi, więc ze spójności przestrzeni $X$ wynika spójność obu przestrzeni $X_1$ i $X_2$.

Niech $x_1 = \left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}\right)$ i $x_2 = \left(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}\right)$ będą dwoma dowolnymi punktami przestrzeni $X$. Zbiór

$$V = \left\{x_1^{(1)}\right\} \times X_2$$

jest spójny, gdyż jest homeomorficzny z przestrzenią spójną $X_2$, a zbiór

$$H = X_1 \times \left\{x_2^{(2)}\right\}$$

jest spójny, gdyż jest homeomorficzny z przestrzenią spójną $X_1$. Ponieważ $H \cap V \neq \emptyset$, więc zbiór $H \cap V$ jest spójnym zbiorem zawierającym punkty $x_1$ i $x_2$. Na mocy zadania 8.10 wnioskujemy więc, że przestrzeń $X$ jest spójna.

**Rozwiązanie zadania 8.62.**

Funkcja $f_{|[a,b]}$ jest ciągła, więc, zgodnie z zadaniami 8.5, 8.20 i 8.21, zbiór $f([a,b])$ jest spójny. Ponieważ zbiór ten zawiera punkty $f(a)$ i $f(b)$, więc dla każdego $c$ leżącego pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ istnieje $x \in (a,b)$ takie, że $f(x) = c$.

**Rozwiązanie zadania 8.63.**

Jeśli $f(0) = 0$ lub $f(1) = 1$, to, oczywiście, funkcja $f$ ma punkt stały.

Jesli $f(0) \neq 0$ i $f(1) \neq 1$, to rozważamy funkcję $\varphi = f - \mathrm{id}_{[0,1]}$. Jest to funkcja ciągła i $\varphi(0) > 0$ oraz $\varphi(1) < 0$. Na mocy zadania poprzedniego wnioskujemy, że istnieje punkt $x \in (0,1)$ taki, że $\varphi(x) = 0$, czyli $f(x) = x$.

**Rozwiązanie zadania 8.64.**

Zbiór złożony z punktu izolowanego jest jednocześnie otwarty i domknięty. Jeśli nie jest to jedyny element przestrzeni, to $X$ nie jest przestrzenią spójną.

**Rozwiązanie zadania 8.65.**

Rozważmy funkcję $f : X \longrightarrow \mathrm{R}$ określoną następująco:

$$f(x) = \varrho(x, A) - \varrho(x, B) \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Dla $x_1 \in A$ wiemy, że $x_1 \notin B = \overline{B}$, zatem $\varrho(x_1, A) = 0$ i $\varrho(x_1, B) > 0$. Wobec tego $f(x_1) < 0$. Dla $x_2 \in B$ spełniona jest nierówność $f(x_2) > 0$. Z zadania 8.62 wynika teraz, że istnieje punkt $x \in X$ taki, że $f(x) = 0$, czyli

$$\varrho(x, A) = \varrho(x, B).$$

**Rozwiązanie zadania 8.66.**

Nie. Przez $E$ oznaczmy zbiór $[(\mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}) \times \mathrm{Q}] \cup [\mathrm{Q} \times (\mathrm{R} \setminus \mathrm{Q})]$. Zauważmy, że zbiory

$$A = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x < y\} \quad \text{i} \quad B = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x > y\}$$

są otwarte, rozłączne i mają punkty wspólne ze zbiorem $E$. Zatem zbiory $A \cap E$ i $B \cap E$ stanowią rozkład zbioru $E$ na dwa niepuste zbiory rozgraniczone, gdyż $\{(x, x) \in \mathrm{R}^2 : x \in \mathrm{R}\} \cap E = \emptyset$.