Lokalna odwracalność odwzorowań, odwzorowania uwikłane

Jacek Kłopotowski

Katedra Matematyki i Ekonomii Matematycznej
Szkoła Główna Handlowa

17 maja 2012

Definicja

Mówimy, że odwzorowanie $F : X \to \mathbb{R}^n$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$, jest lokalnie odwracalne w punkcie $\mathbf{x}_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie $U \subset X$ punktu $\mathbf{x}_0$, że odwzorowanie $F\,|_U : U \to V$, gdzie $V = F(U)$, jest bijekcją. Jeśli $F : X \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem różnowartościowym (czyli $F : X \to F(X)$ jest bijekcją), to mówimy, że F jest globalnie odwracalne.

Przykład

a) Każda bijekcja $F : X \to Y$, gdzie $X,\ Y \subset \mathbb{R}^n$, jest lokalnie odwracalna w dowolnym punkcie $\mathbf{x} \in X$.
b) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ jest lokalnie odwracalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
c) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, jest lokalnie odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, F jest wówczas bijekcją i $F^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ dla każdego $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Twierdzenie

Niech $F : X \to \mathbb{R}^n$*, gdzie* X *jest otwartym podzbiorem przestrzeni* $\mathbb{R}^n$*, będzie takim odwzorowaniem różniczkowalnym w sposób ciągły w pewnym otoczeniu* $K(\mathbf{x}_0, r)$ *punktu* $\mathbf{x}_0 \in X$*, że* $\det F'(\mathbf{x}_0) \neq 0$*. Wówczas:*

a) istnieje takie otoczenie $U \subset K(\mathbf{x}_0, r)$ *punktu* $\mathbf{x}_0$*, że odwzorowanie* $F|_U : U \to V$*, gdzie* $V = F(U)$*, jest bijekcją,*

b) odwzorowanie $(F|_U)^{-1}$ *odwrotne do odwzorowania* $F|_U$ *jest różniczkowalne w punkcie* $\mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}_0)$ *oraz* $\left((F|_U)^{-1}\right)'(\mathbf{y}_0) = (F'(\mathbf{x}_0))^{-1}$*.*

Uwaga

Jeśli $F : X \to \mathbb{R}^n$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$, jest odwzorowaniem różniczkowalnym w punkcie $\mathbf{x}_0$, to $F'(\mathbf{x}_0)$ jest macierzą kwadratową, jej wyznacznik nazywamy jakobianem odwzorowania F w punkcie $\mathbf{x}_0$.

Przykład

Zbadamy lokalną odwracalność odwzorowania $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$ w punkcie $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i wyznaczymy pochodną odwzorowania odwrotnego $\left((F|_U)^{-1}\right)'(\mathbf{y}_0)$, gdzie $\mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. Odwzorowanie F ma pochodną $F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$, wszystkie pochodne cząstkowe są funkcjami ciągłymi, a więc F jest różniczkowalne w sposób ciągły oraz $F'(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ponieważ $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$, więc odwzorowanie F jest lokalnie odwracalne w punkcie $\mathbf{x}_0$. Ponadto

$$\left((F|_U)^{-1}\right)'(\mathbf{y}_0) = (F'(\mathbf{x}_0))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy w tym miejscu, że odwzorowanie F z przykładu jest lokalnie odwracalne w każdym punkcie $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ takim, że $x_1 \neq x_2$. Odwzorowanie $F|_X : X \to F(X)$, gdzie $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq x_2\}$, nie jest jednak bijekcją (czyli nie jest globalnie odwracalne), gdyż nie jest iniekcją, np. $F(1,2) = F(2,1)$.

W szczególnym przypadku, gdy $n = 1$ można udowodnić mocniejszą wersję twierdzenia.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : (a, b) \to ((a, b))$ *jest różniczkowalna i* $f'(x) \neq 0$ *dla każdego* $x \in (a, b)$, *to* f *jest bijekcją, funkcja odwrotna* f^{-1} *jest różniczkowalna oraz* $\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$, *gdzie* $y = f(x)$.

Przykład

Obliczymy pochodną funkcji $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

Rozwiązanie. Funkcja $g : \mathbb{R} \to \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$, $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ jest funkcją odwrotną do różniczkowalnej funkcji $f : \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Ponieważ $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$, więc funkcja odwrotna $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$, $f^{-1}(y) = \operatorname{arc\,tg} y$ jest różniczkowalna oraz

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2},$$

czyli $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Definicja

Niech $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym, $F : X \to \mathbb{R}^m$, a $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in X$, gdzie $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, będzie takim punktem, że

$$F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}.$$

Mówimy, że układ równań $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ określa w pewnym otoczeniu $V \subset X$ punktu $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ odwzorowanie uwikłane wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie U punktu $\mathbf{x}_0$ i odwzorowanie $G : U \to \mathbb{R}^m$, że dla każdego $\mathbf{x} \in U$ mamy $(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})) \in V$, $\mathbf{y}_0 = G(\mathbf{x}_0)$ oraz $F(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$.

Przykład

Niech $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Równanie $x^2 + y^2 - 1 = 0$ wyznacza funkcję uwikłaną $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ określoną dla $x \in (-1, 1)$. Gdy $(x_0, y_0) = (0, -1)$, to szukana funkcja uwikłana jest dana wzorem $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, gdzie również $x \in (-1, 1)$. Zauważmy, że w przypadku punktów $(x_0, y_0) = (1, 0)$ oraz $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ równanie $x^2 + y^2 - 1 = 0$ nie wyznacza funkcji uwikłanej $y = g(x)$ (ale wyznacza funkcję uwikłaną $x = h(y)$).

Przykład

Rozważmy układ równań liniowych $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$, gdzie rząd macierzy $\mathbf{A}$ o wymiarach $m \times (n+m)$ jest równy m. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że kolumny $\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+2}, \ldots, \mathbf{a}_{n+m}$ macierzy $\mathbf{A}$ są liniowo niezależne. Macierz $\mathbf{A}$ możemy zapisać w postaci blokowej $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$, gdzie macierz $\mathbf{B}$ ma wymiary $m \times n$, a nieosobliwa macierz $\mathbf{C}$ – wymiary $m \times m$. Przyjmując oznaczenia $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$, gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, układ równań możemy zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Bx} + \mathbf{Cy} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Cy} = \mathbf{b} - \mathbf{Bx}.$$

Przykład (cd)

Mnożąc obustronnie ostatnie równanie przez $\mathbf{C}^{-1}$, otrzymujemy rozwiązanie $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Bx}) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{Bx}$. Wektor $\mathbf{y}$ jest utworzony ze zmiennych bazowych, a wektor $\mathbf{x}$ ze zmiennych niebazowych układu $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$ odpowiadających postaci bazowej względem m ostatnich kolumn macierzy $\mathbf{A}$.

Podamy warunki wystarczające na to, aby układ równań $F(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$ wyznaczał odwzorowanie uwikłane. Wprowadźmy następujące oznaczenia. Dla różniczkowalnego odwzorowania $F : X \to \mathbb{R}^m$ o składowych $f_1, f_2, ..., f_m$ oznaczmy przez

$$F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) \end{bmatrix},$$

Podamy warunki wystarczające na to, aby układ równań $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ wyznaczał odwzorowanie uwikłane. Wprowadźmy następujące oznaczenia. Dla różniczkowalnego odwzorowania $F : X \to \mathbb{R}^m$ o składowych $f_1, f_2, ..., f_m$ oznaczmy przez

$$F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix},$$

$$F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix}.$$

Podamy warunki wystarczające na to, aby układ równań $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ wyznaczał odwzorowanie uwikłane. Wprowadźmy następujące oznaczenia. Dla różniczkowalnego odwzorowania $F : X \to \mathbb{R}^m$ o składowych $f_1, f_2, ..., f_m$ oznaczmy przez

$$F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix},$$

$$F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że $F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ jest macierzą o wymiarach $m \times n$, a $F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ – macierzą o wymiarach $m \times m$.

Twierdzenie (Gravesa)

Niech $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *będzie zbiorem otwartym. Jeśli odwzorowanie* $F : X \to \mathbb{R}^m$ *jest różniczkowalne w sposób ciągły, istnieje taki punkt* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in X$, *że* $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$, $\det F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$, *to układ równań* $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ *wyznacza jednoznacznie odwzorowanie uwikłane* $\mathbf{y} = G(\mathbf{x})$ *określone w pewnym otoczeniu* U *punktu* $\mathbf{x}_0$, *które jest różniczkowalne w sposób ciągły oraz spełnia warunek* $G'(\mathbf{x}_0) = -\left(F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\right)^{-1} F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.

Uwaga

Jeśli $n = 1$ i $m = 1$, tzn., gdy rozważamy równanie $f(x, y) = 0$ i $y = g(x)$ jest funkcją uwikłaną jednej zmiennej, otrzymany wzór można zapisać w postaci

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Uwaga

Jeśli $n = 1$ i $m = 1$, tzn., gdy rozważamy równanie $f(x, y) = 0$ i $y = g(x)$ jest funkcją uwikłaną jednej zmiennej, otrzymany wzór można zapisać w postaci

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Przykład

Wyznaczymy pochodną funkcji uwikłanej $y = g(x)$ w punkcie x_0 określonej warunkami $x^3 - 2xy + 3y^2 - 2x = 0$, $x_0 = 1$.

Uwaga

Jeśli $n > 1$, $m = 1$, to g jest funkcją n-zmiennych, jej pochodne cząstkowe są równe

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = -\frac{\frac{\partial f(\mathbf{x}_0, y_0)}{\partial x_j}}{\frac{\partial f(\mathbf{x}_0, y_0)}{\partial y}}.$$

dla $j = 1, 2, \ldots, n$.

Uwaga

Jeśli $n > 1$, $m = 1$, to g jest funkcją n-zmiennych, jej pochodne cząstkowe są równe

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = -\frac{\frac{\partial f(\mathbf{x}_0, y_0)}{\partial x_j}}{\frac{\partial f(\mathbf{x}_0, y_0)}{\partial y}}.$$

dla $j = 1, 2, ..., n$.

Przykład

Wyznaczymy wszystkie takie wartości y, że równanie $y^2 - y + x_1 + 2x_2 - 1 = 0$, gdzie $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, generuje różniczkowalne funkcję uwikłaną $y = g(x_1, x_2)$ określoną w pewnym otoczeniu punktu $(1, 0)$. Wyznaczymy $g'(1, 0)$.

Przykład

Wykażemy, że w pewnym otoczeniu punktu $\mathbf{x}_0$ istnieje odwzorowanie uwikłane $\mathbf{y} = G(\mathbf{x})$ wyznaczone przez układ równań $F(x, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ i spełniające warunek $\mathbf{y}_0 = G(\mathbf{x}_0)$ oraz obliczymy $G'(\mathbf{x}_0)$, jeśli: $F(x, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x + y_1 + y_2 \\ x^2 + y_1^3 + y_2^4 - 2 \end{bmatrix}$, $x_0 = 0$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.